

Yoccoz puzzle の combinatorics について

東工大理工学研 榊原 宏紀 (Hironori Sakakihara)

1 Notations

$V, W \subset C_\infty$ に対して, $dV \subset \text{int } W$ が成り立つとき $V \subset\subset W$ と書き、
 $\text{orb}_n(z_0) = \{f^m(z_0)\}_{m=1}^n, \text{orb}(z_0) = \{f^n(z_0)\}_{n=1}^\infty$ と書く。

2 Polynomials

f : polynomial, $\deg f = d \geq 2$ を考える。

$D(\infty)$ は、*basin of infinity*、つまり、 $\{z \in C_\infty : f^n(z) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}$ とし、 $K(f) = C_\infty \setminus D(\infty)$ は、*filled Juliaset* とする。よく知られているように、 $J(f) = \partial D(\infty) = \partial K(f)$ である。

以後、 $J(f)$ は連結と仮定する。

f に対して、*Böttcher coordinate* と呼ばれる U_f から $\{z : |z| > r_f \geq 1\}$ への conformal map B_f が存在して、 $B_f(f(z)) = (B_f(z))^d, B_f(z) = z + o(1) (z \rightarrow \infty)$ が成立する。ここで、 U_f は ∞ の近傍である。

今、 $J(f)$ は連結としているから、 $r_f = 1$ ととれる。

角 θ をもつ *external ray* を $\{re^{i\theta} : r_f < r < \infty\}$ の B_f -preimage、level h の *equipotential* を $\{he^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ の B_f -preimage でそれぞれ定義する。

角 θ をもつ *external ray* を R_θ と表すと、 $f(B_f^{-1}(z)) = B_f^{-1}(z^d)$ であるから、 $f(R_\theta) = R_{d\theta}$ となることがわかる。

また、*equipotential* とは、言い換えれば、 ∞ を極にもつ $D(\infty)$ 上の *Green 関数* の level curve である。

Theorem. 1

a を repelling periodic point とすると、 a についている external rays が存在し、それらは高々有限個である。

もちろん、 $a \in J(f) = \partial K(f)$ である。これをもう少し詳しくみると、

Theorem. 2

f を次数 2 以上の polynomial とし、 $K(f)$ は連結とする。

そのとき、Th.1 で得られた external rays は巡回的に置換される。

つまり、 a についている external rays を $R_{t(i)}$ ($0 \leq t(0) < \dots < t(n-1) < 1$) とすると、ある整数 m が存在して、 f は $R_{t(i)}$ を $R_{t(i')}$ に写す。ここで、 $i' = i + m \pmod{n}$ であり、各 $t(i)$ は 2π を無視した external rays の角を表しておけばよい。

このとき、 $\frac{m}{n}$ を rotation number という。

rotation number とは、その名前の通り、rotation の割合を表している。それを明らかにするのが次の定理である。

Theorem. 3

z_0 を $f'(z_0) = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$ なる parabolic fixed point とすると、 z_0 での rotation number は、 $\frac{m}{n}$ である。

parabolic fixed point のときは $|f'(z_0)| = 1$ だから $f'(z_0) = e^{2\pi i \theta}$, $\theta \in [0, 1]$ と書け、attracting petals を考えれば、ある種の回転になっていることは理解しやすい。

しかし、 $|f'(z_0)| > 1$ となる repelling fixed point のときは、Th.3 のようにはいかない。

repelling fixed point のときのその点での微分係数と rotation number の関係を示したのが次の Yoccoz inequality である。

Yoccoz inequality

z を repelling fixed point とすると、

$$\frac{\text{Reg}(z)}{|g(z) - 2\pi i q/p|} \geq \frac{mq}{2 \log d}$$

ここで、 $m = g.c.d(p, q)$ 、 $g(z)$ は $\log f'(z)$ の branch である。

この不等式から、 $g(z)$ は $2\pi i \frac{q}{p}$ で虚軸に接する半径 $\frac{mq}{\log d}$ の closed disk 内にあることがわかる。

つまり、repelling fixed point の場合でもその点の微分係数と rotation number とは ” ある意味で ” 近いと思ってよい。

新たに、記号を導入する。

$R(a) := \{a \text{ についている external rays の union}\}$

$R(\tilde{a}) := \bigcup_{k=1}^{p-1} R(f^k(a)) \quad (p: \text{周期})$

3 Quadratic family

ここでは、特に $f(z) \equiv P_c(z) = z^2 + c$ について考える。

Proposition .4

$\tilde{a} = \{a_k\}_{k=1}^{p-1}$ を repelling periodic cycle とし、各 a_k についている external rays は少なくとも 2 つあるとする。

そのとき、次のことが成り立つ。

(1) critical value c を含む $C_\infty \setminus R(\tilde{a})$ の component S_1 は 2 つの external rays によって境界づけられた sector である。

(2) critical point 0 を含む $C_\infty \setminus f^{-1}(R(\tilde{a}))$ の component S_0 は 4 つの external rays によって境界づけられる。

それらの 2 つは a_k 、他の 2 つは $-a_k$ についている。

4 Douady – Hubbard polynomial – like map

U', U を topological disk、すなわち、単連結な領域で、 $U' \subset \subset U$ とする。

$f: U' \rightarrow U$ が d -fold branched covering のとき、 f を次数 d の DH polynomial-like map という。

特に、次数 2 のとき、DH quadratic like map という。

polynomial like map f に対して、*filled Juliaset*、*julia set* を次のように定めればよいことがわかる。

$$K(f) = \{z : f^n(z) \in U', n = 1, 2, \dots\}$$

$$J(f) = \partial K(f)$$

この節の残りで、polynomial like maps の性質をいくつか述べる。

polynomial like map はその名前の通り、polynomial らしきものである。もちろん、polynomials は polynomial like maps である。実際、 ∞ が superattracting fixed point であるから、ある領域に制限すればよい。

polynomials に対してはよく知られているつぎのことが、polynomial like maps に対しても成り立つ。

$K(f), J(f)$ が連結であることと有限な critical points がすべて $K(f)$ に含まれることとは必要十分である。

2つの polynomial like maps f, g に対して、 h が f と g の quasiconformal conjugacy であるとは、 h は $K(f)$ の近傍から $K(g)$ の近傍への写像で、 $h \circ f = g \circ h$ が成り立つきをいう。

f と g が hybrid equivalent であるとは、 $K(f)$ のほとんど至るところ $\bar{\partial}h = 0$ となるときをいう。

Straightening Theorem

(1) 次数 d の polynomial like map f は、次数 d のある polynomial に hybrid equivalent である。

(2) (1) において $K(f)$ が連結のとき、 f と hybrid equivalent な polynomial は affine conjugacy を除いて一意に決まる。

(3) 連結な Juliaset をもつ quadratic like map は $z^2 + c$ の形の polynomial と hybrid equivalent で、その対応は一意的である。

5 DH renormalization

ここからは次数を 2 に限って考え、critical point は 0 とする。

f を quadratic like map とし、 $\tilde{a}$ を dividing repelling cycle とする。

dividing point とは、 $K(f) \setminus a$ が dividing となるときをいう。もっといえば、その点に2つ以上の external rays が存在するときである。

$R = R(\tilde{a})$ とおき、 R と symmetric な rays を $R' = -R$ で表し、 E を任意の equipotential とする。

Ω を critical point を含む $C_\infty \setminus (E \cup R \cup R')$ の component とする。この Ω は Th.3(2) によって得られるものである。

さらに、 p は rays の周期とし、 Ω' は $f^{-p}(\Omega)$ の a についている component とする。ここで、 $a \in \tilde{a}$ である。

$\Omega' \ni 0$ のとき、 $f^p: \Omega' \rightarrow \Omega$ は double covering map になる。

quadratic like map f が DH renormalizable (くり込み可能) であるとは、上のように、repelling cycle $\tilde{a}$ が存在して、 $0 \in \Omega'$ であって、 $f^{pn}(0) \in \Omega', n = 1, 2, \dots$ となるときをいう。

さらに、 f が immediately DH renormalizable であるとは、DH renormalizable であって、 a が f の dividing fixed point としてとれるときをいう。

6 Yoccoz puzzle

f を quadratic polynomial とし、2つの fixed points α, β は repelling とする。

さらに、 α は dividing fixed point で、rotation number は $\frac{q}{p} (p > 1)$ とする。

E を $K(f)$ に十分近い equipotential とすると、 $K(f)$ を含む E に囲まれた領域は α についている external rays によって p 個の領域に分割される。

その分割によってできる p 個の領域を $Y_i^{(0)}$ ($i = 0, \dots, p-1$) とおいて depth zero の puzzle pieces という。

depth n の puzzle pieces $Y_i^{(n)}$ を $f^{-n}(Y_k^{(0)})$ の connected component とする。

ここで、critical point の iterates は、 α にならないとする。

そのとき、critical point を含む唯一つの puzzle piece がとれるので、その puzzle piece を $Y^{(n)} = Y_0^{(n)}$ とおき、critical という。

もし、仮に、critical point の iterates が α になったとすると、critically finite になる。

このとき Julia set は locally connected になることがわかっている。

$M(f) := \{\text{すべての level の puzzle pieces}\}$ とすると、Markov property を満たす。
つまり、

(1) 任意の 2 つの puzzle pieces は、交わりのない内部をもつか、depth の大きい piece が depth の小さい piece に含まれているかである。

(2) 任意の puzzle piece $Y_i^{(n)}$ に対して、ある整数 k が存在して、 $f: Y_i^{(n)} \rightarrow Y_k^{(n-1)}$ である。この写像は $Y_i^{(n)}$ が critical かどうかによって double covering か、conformal かになっている。

Theorem.5

f は quadratic polynomial とし、2 つの fixed points は repelling とする。

f が DH non-renormalizable であるなら、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{mod}(Y^{(n)} \setminus Y^{(n+1)}) = \infty$$

このことから、

$$\text{diam} Y^{(n)} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

Corollary.6

Th.5 が成り立つとき、 $J(f)$ は locally connected となる。

Cor.6 の "Th.5 が成り立つとき" というのは少し曖昧だが、重要なのは $Y^{(n)}$ の diameter が 0 にいくことである。

また、critical puzzle piece である $Y^{(n)}$ だから意味がある。

7 Principal nest

ここでも、 f は quadratic polynomial とし、その 2 つの fixed points は repelling としておく。

W を閉集合とし、ある z に対して $f^l(z) \in W$ とする。

$\text{orb}_l(z)$ に沿う W の pull back $W_0, W_1, \dots, W_l$ を次のように定義する。

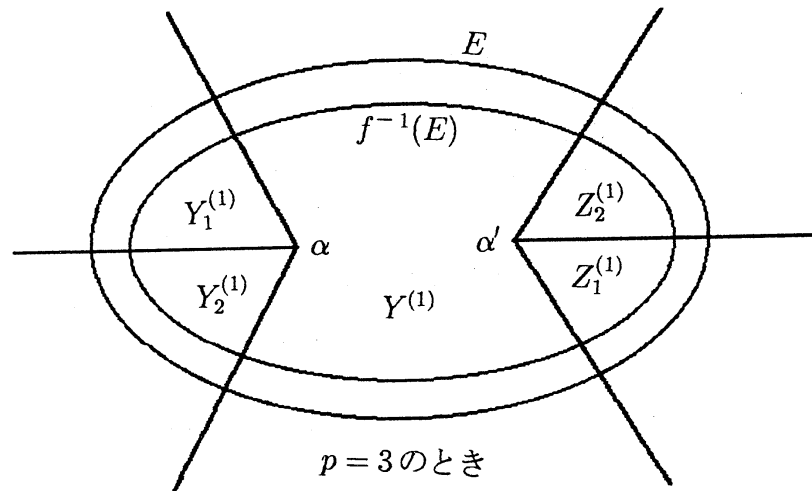
$W_0 = W, W_{-1} \ni f^{l-1}(z), \dots, W_{-l} \ni z$, 各 W_{-k} は $f^{l-k}(z)$ を含む $f^{-1}(W_{-k+1})$ の component の closure とする。

$z \in \text{int } W$ のとき、 $\text{int } W$ への $\text{orb}(z)$ の first return に対応する pull back ということにする。

Sec.6 で考えた depth 1 の puzzle pieces に注目する。

f の depth 1 の puzzle pieces を $Y^{(1)}, Y_i^{(1)}, Z_i^{(1)} (i = 1, \dots, p-1)$ とおく。

ここで、 $Y_i^{(1)}$ は dividing repelling fixed point α についている puzzle pieces とし、 $Z_i^{(1)}$ は α と symmetric な点 α' についている puzzle pieces とする。



$f^{-1}(E)$ によって cut された $f^p(Y^{(1)})$ は $Y^{(1)}$ と $Z_i^{(1)} (i = 1, \dots, p-1)$ の union であるから、次の2つが考えられる。

$$(1) f^{kp}(0) \in Y^{(1)} (k = 1, 2, \dots)$$

$$(2) t > 0, j > 0 \text{ が存在して、} f^{tp}(0) \in Z_j^{(1)}$$

(1) のとき、 f は immediately DH renormalizable であり、principal nest を $Y^{(0)}$ で定義する。

ここから、(2) のときについて考え、principal nest $Y^{(0)} \supset V^0 \supset V^1 \supset \dots$ を構成する。

t を $f^{tp}(0) \in Z_i^{(1)}$ なる first moment とする。

V^0 を $orb_{ip}(0)$ に沿うpull backとし、 V^{n+1} を $int V^n$ へのcritical pointのfirst returnに対応するpull backとする。

critical pointが $int Y^{n+1}$ へreturn backしないとき、combinatorically non-recurrentといい、principal nestは有限である。

そうでないとき、つまり、combinatorically recurrentのとき、principal nestは無限となる。

$l = l(n)$ を $int V^n$ へのcritical pointのfirst return timeとおくと、

$g_n = f^{l(n)} : V^n \rightarrow V^{n-1}$ はtwo-to-one branched coveringとなる。

level $n-1$ へのreturnがcentralであるとは、 $g_n(0) \in V^n$ のときをいう。いいかえれば、 $l(n) = l(n+1)$ となるときである。

level $n, n+1, \dots, n+N-1$ ($N \geq 1$)がcentral cascadeを形成するとは、

level $n, n+1, \dots, n+N-2$ へのreturnがcentralであって、level $n+N-1$ へのreturnがnon-centralのときをいう。

このとき、 $g_{n+k}|_{V^{n+k}} = g_{n+1}|_{V^{n+k}}$ ($k = 1, \dots, N$)であって、 $g_{n+1}(0) \in V^{n+N-1} \setminus V^{n+N}$ である。 $g_{n+k}|_{V^{n+k}} = g_{n+1}|_{V^{n+k}}$ ($k = 1, \dots, N$)は $g_{n+1}, \dots, g_{n+N}$ がquadratic like mapとして同じであることを意味する。

level $n, n+1, \dots, n+N-1$ ($N \geq 1$)がcentral cascadeを形成し、さらに、level $n-1$ へのreturnがnon-centralのとき、maximalという。

principal nestはmaximal cascadesのunionである。

maximal cascadesの数を f のheightといい、 $\chi(f)$ で表す。ただし、 f がimmediately renormalizableのときは、 $\chi(f) = -1$ とする。

8 DH renormalization and central cascades

Proposition.7

quadratic like map f がrenormalizableであることと、 $\chi(f)$ が有限になることとは必要十分である。

9 Increasing of moduli

Theorem.8

principal nest $\{V^n\}$ 内の non - central level を count したものを $n(k)$ とすると、

$$\text{mod} A^{n(k)+1} \geq Bk$$

ここで、 $A^n = V^n \setminus V^{n+1}$, $B = B(\mu)$ は $\mu = \text{mod} A^1$ にのみによる定数である。

Prop.7 から、renormalizable でなければ maximal cascades の個数が無限になることがわかる。つまり、 $\text{mod} A^{n(k)}$ の和は Bk の和以上の速さで無限大にいくことになる。

Reference

[1] M.Lyubich; Dynamics of quadratic polynomials, combinatorics and geometry of the Yoccoz puzzle. MSRI preprint. 1995

[2] J.H.Hubbard; Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J.C.Yoccoz. In: "Topological Methods in Modern Mathematics, A Symposium in Honor of John Milnor's 60'th Birthday", Publish or Perish. 1993

[3] L.Goldberg & J.Milnor; Fixed points of polynomial maps. Part 2. Fixed point portraits. *Ann.Sc.Ec.Norm.Sup.*, 26(1993)

[4] A.Douady & J.H.Hubbard; On the dynamics of polynomial - like maps. *Ann.Sc.Ec.Norm.Sup.*, 18(1985)