

コーシー問題の適切性の必要条件について

(空間方向の退化を扱う試み)

Necessary conditions for the well-posedness of Cauchy problems

-- A try to treat the degeneracy w.r.t. space variables --

京大数理研 万代 武史

(Takeshi Mandai)

§ 1. 序

$\mathbb{R}^{n+1}$ に座標 $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$ を入れ、 $t=0$ を初期面とする次のコーシー問題を原点の近傍 Ω で考える。(実際はあとでみるように初期面を $t=t_0$ の形で動かして考える。)

$$(1-1) \begin{cases} Pu = f & \text{in } \Omega \cap \{t \geq 0\} \\ \partial_t^j u|_{t=0} = g_j & (0 \leq j \leq m-1) \text{ in } \Omega \cap \{t=0\} \end{cases}$$

但し、 $P = \sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j,\alpha}(t,x) D_t^j D_x^\alpha$, $a_{j,\alpha} \in C^\infty(\Omega)$, $a_{m,0} \equiv 1$.

Lax-Mizohata の定理により、このコーシー問題が(一様に)適切(正確な定義は § 2 で与える)なとば、 P は双曲型でなければならぬ。すなわち、 $p_m(t,x;\tau,\xi) = \sum_{j+|\alpha|=m} a_{j,\alpha}(t,x) \tau^j \xi^\alpha = 0$ を τ の方程式とみるとき、任意の $(t,x) \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対し

て、実根のみをもつ。さらに、Mizohata-Ohya [1], Flaschka-Straug [2], Ivrii-Petrov [3] によって、低階項が次のレビ条件を満たす必要のあることが示されている。

『 $p_k(t, x; \tau, \xi) = \sum_{j+|\alpha|=k} a_{j,\alpha}(t, x) \tau^j \xi^\alpha$ とし、 $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ とする。 $p_m(t, x; \tau, e_n) = \tau^m + A_{m-1}(t, x) \tau^{m-1} + \dots + A_0(t, x)$ において、 $A_0(t, x) = \dots = A_{r-1}(t, x) = 0$ on Ω (--- ①) と仮定すると、

$p_{m-h}(t, x; \tau, e_n) = A_{m-h}^{(h)}(t, x) \tau^{m-h} + \dots + A_0^{(h)}(t, x)$ において、
 $A_0^{(h)}(t, x) = \dots = A_{r-h-1}^{(h)}(t, x) = 0$ on Ω かつ $h = 1, \dots, r-1$

に対して、成立する。』

これは、[1], [2] で述べられている形とはちがひ、 $\xi = e_n$ 方向のみに着目し、さらに $\tau = 0$ という特性根についてのみ着目したときのレビ条件である。($p_m(t, x; \tau, e_n) = 0$ を τ の方程式とみたとき、①式は $\tau = 0$ がすべての (t, x) について少なくとも r 重根になっているということである。) その意味で、“micro-local Levi condition with respect to the characteristic root 0” とでも呼ぶべきものであろう。しかし、 τ 変数を変えない座標変換によって、他の ξ 方向、 $\tau = 0$ 以外の特性根についてもこの条件を適用することができる。 P の特性根の多重度が一定の場合には、これらの条件を統合すると、 r 度おつりのレビ条件が得られ、これがコーシー問題が適切

なための必要十分条件になる。

この講演の目標は、上のような micro-local な形で、特性根の多重度が変わる場合にも、同様の低階項への条件を得ることである。この際、ある程度“よい”作用素に適用すると、丁度必要十分条件になるようなもの成ほしい。 t 方向の退化に関しては、すでに結果がでている。(Mandai [4], [5]) ここでは x 方向の退化も扱うための1つの試みを述べたい。

§ 2. 定義と結果 (定理 1)

まず、コーシー問題が(一様に)適切ということの定義を与えよう。

定義 2.1.

コーシー問題 (1-1) が $\Omega \cap \{t \geq 0\}$ において適切とは、次の2条件が成立することである。

- 1) 任意の $f \in C^\infty(\Omega)$, $f=0$ for $t \leq 0$ に対して、 $u \in C^\infty(\Omega)$ が存在して、 $u=0$ for $t \leq 0$, $Pu=f$ in Ω が成立する。
- 2) 任意の $u \in C^\infty(\Omega)$, $u=0$ for $t \leq 0$ と、任意の $t_0 \geq 0$ に対して、もし $Pu=0$ for $t \leq t_0$ が成立するならば、
 $u=0$ for $t \leq t_0$ が成立する。

注意 2.2.

上の 1), 2) は次の 3) と同値である。

3) 任意の $t_0 \geq 0$ と任意の $f \in C^\infty(\Omega)$ と任意の $g_j \in C^\infty(\Omega \cap \{t=t_0\})$ ($j=0, 1, \dots, m-1$) に対して、 $u \in C^\infty(\Omega)$ が一意的に存在して、

$$\begin{cases} Pu = f & \text{in } \Omega \cap \{t \geq t_0\} \\ \partial_t^j u|_{t=t_0} = g_j & \text{on } \Omega \cap \{t=t_0\} \quad (j=0, 1, \dots, m-1) \end{cases}$$

が成立する。

この意味で、上の定義は“一様に適切”というべきものであるが以下では単に“適切”と呼ぶことにする。なお、3)のほうは1), 2)よりも自然なのに、なぜ1), 2)のほうを主にするのかと思われるであろうが、実はこの講演で述べた結果は、 C^∞ -係数の非特性初期値問題のみでなく、Fuchs型の方程式を含む singular な方程式についても成立するものであり、それらに対しては、3)のような定義は意味がないが、1), 2)の形（これは“フラット・コーシー問題の適切性”とでもいうべきもの）なら、自然な意味があるからである。（[4], [5]参照）なお、蛇足だが、 P の係数がすべて real-analytic なら、Holmgrenの定理によって、上の2)はいつでも満たされている。

さて、定理1を述べよう。以下、 p_m は双曲型とする。

$(n+1)$ 個の有理数 θ_j ($j=0, 1, \dots, n$) をとる。（任意に固定する。）

$(\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_c^j p_m)(0, 0; 0, e_n) \neq 0$ なる (k, β, j) に対して、 $(\theta_j, \mu)-$

平面に、点 $(j, g_0 k + \langle g, \beta \rangle)$ をとる。 $(\langle g, \beta \rangle = g_1 \beta_1 + \dots + g_n \beta_n)$
 これらの点から、ニュートン図形 Δ を描く。つまり、上の
 点全体を P とするとき、 Δ は $\{(j, \mu); \mu \geq \mu' \text{ for some } (j, \mu') \in P\}$ の closed convex hull である。

Δ の下辺は有限個の線分 $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ になる。 Σ_i の両端を (j_i, μ_i) と (j_{i-1}, μ_{i-1}) ($j_i < j_{i-1}$) とすると、

$$\begin{cases} 0 \leq j_r < j_{r-1} < \dots < j_1 < j_0 = m \\ \mu_r > \mu_{r-1} > \dots > \mu_1 \geq \mu_0 = 0 \end{cases}$$

又、 Σ_i の傾きを $-\kappa_i$ とすると、

$$\kappa_r > \kappa_{r-1} > \dots > \kappa_1 \geq 0 \text{ とする。}$$

さて、 $\kappa_1 = 0$ のときは、 $0 \leq \tilde{\kappa}_1 \leq \kappa_2$ なる $\tilde{\kappa}_1$ をとって、 Δ を右図の
 ように修正する。つまり、 Σ_1 の
 かわりに、2点 $(j_1, 0), (m, -\tilde{\kappa}_1(m-j_1))$
 を両端とする線分 $\tilde{\Sigma}_1$ をとり、 Σ_1
 のかわりに $\tilde{\Sigma}_1$ としたものを $\tilde{\Delta}$ とする。 $\kappa_1 > 0$ のときは、
 修正せずに、 $\tilde{\kappa}_1 = \kappa_1, \tilde{\Delta} = \Delta$ とする。

ここで、次の仮定をおく。

仮定 - A

$$f(1) \quad g_0 + \tilde{\kappa}_1 > g_j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2) \quad (\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\tau^j \partial_\xi^\alpha p_m)(0,0;0,e_n) = 0 \\ \text{if } (j+|\alpha|, g_0(k+|\alpha|) + \langle g, \beta - \alpha \rangle) \notin \widehat{\Delta} \end{array} \right.$$

注意 2.3.

1. $k_1 = 0$ のとき、上の $\widehat{K}_1$ のとり方は、もちろん一意的ではないが、上の仮定を満たす範囲でできるだけ小さくとりうが、下でのべる定理の結論は強くなる。ただし、上の仮定 1), 2) を満たすように必ず $\widehat{K}_1$ とれるとは限らない。

2. $g_0 \geq g_j$ ($j=1, \dots, m$) となっている場合は、上の仮定の 2) は、実は、 p_m が双曲型ということから導びかれる。もちろん、1) は自動的に成立するか、この場合には、仮定-A は必ず満たされている。

定理 1.

上の状況のもとで、 P に対するコーシー問題が Ω で適切とする。このとき、次が成立する。($h=1, 2, \dots, m$)

$$\begin{aligned} & (\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\tau^j \partial_\xi^\alpha p_{m-h})(0,0;0,e_n) = 0 \\ & \text{if } (j+|\alpha|+h, g_0(k+|\alpha|+h) + \langle g, \beta - \alpha \rangle) \notin \widehat{\Delta} \end{aligned}$$

注意 2.4.

この定理では、[3] や [4] のように、有限伝播速度の存在を仮定していない。証明の基礎となるエネルギー不等式は、§4 の (4-8) である。したがって、適切性の定義はこゝで述べたものの以外も採用でき、特に H^∞ -適切性でもよい。

§ 3. 応用 (定理 2)

このセクションでは、定理 1 をつかって具体的な作用素について、適切性のための必要十分条件を決定したい。ここでは、 $\Omega = [0, T] \times \mathbb{R}^n$ とし、 P の係数は、 $\mathcal{B}^\infty(\Omega)$ に属するとしておく。 $(\mathcal{B}^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega); \text{任意の } \alpha \text{ に対して、} D^\alpha f \text{ は } \Omega \text{ で有界}\})$

定義 3.1.

P が t -involutive とは、 $P_m(t, x; \tau, \xi) = \prod_{j=1}^m (\tau - \lambda_j(t, x; \xi))$, $\lambda_j \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ ($j = 1, \dots, m$) とおき、任意の j, k について、 $A_{j,k}(t, x; \xi) \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ があって、

(3-1) $\{\tau - \lambda_j(t, x; \xi), \tau - \lambda_k(t, x; \xi)\} = \frac{1}{t} A_{j,k}(t, x; \xi) (\lambda_j(t, x; \xi) - \lambda_k(t, x; \xi))$ となることである。但し、 $\{\cdot, \cdot\}$ は $(t, x; \tau, \xi)$ についての Poisson bracket.

$\partial_j \equiv D_t - \lambda_j(t, x; D_x)$ とおく。 t -involutive な作用素については、適切性の十分条件が次の形で知られている。(Yamamoto [6], Uryu [7])

□ $J \subset \{1, \dots, m\} \equiv I$ に対して、 $\pi_J \equiv \prod_{j \in J} \partial_j$ とおく。(積の順序は 1 つ 1 つの J に対して、任意に決めておく。) 任意の $J \subset I$ に対して、 $A_J(t, x; D_x)$ なる 0 階の α についての擬微分作用素 (t は C^∞ -パラメーター) があって、

$$(3-2) \quad P = \pi_I + \sum_{J \subsetneq I} t^{|J|-m} A_J(t, x; D_x) \pi_J$$

とかけるならば、 P に対するコーシー問題は Ω で適切。』

注意 3.2.

[6]では、 H^∞ -適切性のみが示されているが、実は有限伝播速度の存在が証明できるので、ここでの意味の適切性も成立する。もっとも、注意2.4で述べたように、 H^∞ -適切性でも定理1が成立するので定理2も H^∞ -適切性についても成立する。

残念ながさ、上の条件(3-2)は、必ずしも適切性の必要条件ではない。

例 3.3.

$P = D_t^2 - (x^2 + y^2)D_x^2 - a(x, y)D_x \in R_{(t, x, y)}^3$ で考える。

(3-2)の形にかけるということは、 $a(x, y)/(x^2 + y^2) \in C^\infty$ ということであるが、適切性の必要十分条件は、実は、 $a(0, 0) = (\partial_x a)(0, 0) = (\partial_y a)(0, 0) = 0$ である。

ここでは、(3-2)が必要条件にもなるような主部への条件を1つ与えよう。

仮定 - B

任意の $(t, x) \in \Omega$ に対して、 (t, x) の近傍 U 、非負整数 s 、 $C_l(t, x) \in C^\infty(U)$ ($l=1, \dots, s$)、非負整数 $K_l(j, k)$ ($l=0, 1, \dots, s$; $1 \leq j \neq k \leq m$) が存在して、次の3条件が成立する。

a) $C_\ell(\hat{t}, \hat{x}) = 0 \quad (\ell = 1, \dots, S)$

b) $\{(\text{grad}_{(t,x)} C_\ell)(\hat{t}, \hat{x}) : \ell = 1, \dots, S\}$ は 1 次独立

c) 任意の $1 \leq j \neq k \leq m$ に対して、

$$\lambda_j(t, x; \xi) - \lambda_k(t, x; \xi) = t^{\kappa_0(j,k)} C_1(t, x)^{\kappa_1(j,k)} \cdots C_S(t, x)^{\kappa_S(j,k)} \times$$

$$\times (\text{non-zero } C^\infty\text{-fcn})$$

か又は、 $\lambda_j \equiv \lambda_k$

定理 2.

P が t -involutive での仮定 - B をみたすとする。

「 P に対するコーシー問題が Ω で適切



P が (3-2) の形にかける。

注意 3.4.

仮定 - B において、任意の j, k に対して $\kappa_0(j, k) = 0$ とすると、 P が t -involutive なことと、 P が involutive (つまり、

$$\{\tau - \lambda_j(t, x; \xi), \tau - \lambda_k(t, x; \xi)\} = A_{j,k}(t, x; \xi) (\lambda_j(t, x; \xi) - \lambda_k(t, x; \xi))$$

なる。) なことと 同値になり、さらにこのとき、

「 P が (3-2) の形にかける。



$$P \text{ が } P = \pi_I + \sum_{J \in I} \tilde{A}_J(t, x; D_x) \pi_J \quad \text{--- (3-3)}$$

の形にかける。

§ 4. 定理 1 の証明の概略

ここでは、有限伝播速度の存在を仮定せずにどうやるかを
中心に述べる。定理1はニュートン図形の各辺ごとに Σ_i から
順に以下に述べるような議論をやって証明するのであるが、
そのあたりのことは省略する。

定理の結論が成立しなると仮定する。まず適当な正の有理数 μ_j ($j=0, 1, \dots, n$) をとって、

$$\begin{cases} t = \rho^{-\mu_0} s \\ x_j = \rho^{-\mu_j} y_j \quad (j=1, \dots, n) \end{cases} \quad (P>1)$$

存在座標変換をして、 $P \in P_p$ にうつす。

$$E = \exp\{i\gamma y_n P + i\varphi(s, y) P^\sigma\} \text{ とおくと, } 0 < \sigma < 1 \text{ ならば}$$

$$(4-1) \quad E^{-1} \circ P_p \circ E = P^d \left\{ \Phi(s, y, \gamma; \partial_s \varphi, \partial_y \varphi) + \sum_{j=1}^{\infty} P^{-\frac{j}{m}} R_j(s, y; D_s, D_y) \right\}$$

と P について漸近展開でき、さうに次成成立する。

『 $\Phi(s, y, y'; \sigma, \eta')$ は (σ, η') についての多項式であり,

$\phi \neq \emptyset \subset \{s > 0\}$, $\phi \neq U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $F(s, y; \gamma)$: analytic
fcn. in $V \times U$, $0 < \theta \in \mathbb{R}$, 正整数 k があって.

$$(4-2) \begin{cases} \partial_{\bar{z}}^j \Phi(s, y, \hat{\rho}; F(s, y, \eta'), \eta') = 0 & (0 \leq j < l-1) \\ \quad \quad \quad " \quad \quad \quad \neq 0 & (j=l) \\ \operatorname{Im} F(s, y, \eta') < -\theta & \text{on } V \times U \end{cases}$$

が成立する。

ここで、 $(\hat{s}, \hat{y}) \in V$, $\hat{y}' \in U$ を固定し、

$$(4-3) \begin{cases} \partial_s \varphi = F(s, y; \partial_y \varphi) \\ \varphi(\hat{s}, \hat{y}) = \langle \hat{y}', y' \rangle + i |y - \hat{y}|^2 \end{cases}$$

と φ を $(\hat{s}, \hat{y})$ の近傍 $\hat{V}$ でとる。このとき、

$$(4-4) \operatorname{Im} \varphi(s, y) \geq |y - \hat{y}|^2 + o(|\hat{s} - s|) \quad \text{for } s \leq \hat{s}$$

が成立するので、 E は $s \leq \hat{s}$ においては、 $(\hat{s}, \hat{y})$ の近傍の外では急激に減少している。

さて、[2], [3] でつかわれた方法では、さらに、 $l_1(s, y)$,
 $\dots$, $l_k(s, y)$ なる函数と $\sigma > \sigma_1 > \dots > \sigma_k > 0$ なる有理数の
 列をうまくつらって、

$$(4-5) u = e^{i(\hat{p} y_n p + p^\sigma \varphi(s, y) + \sum_{j=1}^k p^{\sigma_j} l_j(s, y))} \sum_{j=0}^{\infty} v_j(s, y) p^{-\frac{j}{m}}$$

の形で $p_p u = 0$ の漸近解をつくらせている。しかし、この過程で、 $l_1, \dots, l_k$ の存在域は、一般には、 $(\hat{s}, \hat{y})$ の近傍としてはとることができず、 $\hat{V}$ の中の開集合に存在のみである。したがって、(4-4) というより不等式がつかえず、有限伝播速度の存在を仮定する必要がでてきたのであった。しかし、この困難は、Ivrii [8, 9] でつかわれたアイデアをつかうと次のように回避できる。

上のように φ をとり、 $E = e^{i(\hat{p} y_n p + p^\sigma \varphi(s, y))}$ とおくと、
 ある $0 < \sigma' < \sigma$ が存在して、

$$E^{-1} \circ P_p \circ E = P^{d-\delta\sigma} \{Q_0 + R\},$$

$$\begin{cases} Q_0 = \sum_{j+|\nu| \leq j} \frac{1}{\nu!} a_{\nu,j}(s,y) P^{j\sigma'} D_{(s,y)}^\nu \\ (a_{\nu,j} \text{ は analytic fcn. で } a_{(j,0,\dots,0),0} \neq 0) \\ R \text{ は } P \text{ の負巾について漸近展開できる。} \end{cases}$$

となることはいえる。\$Q_0\$ には \$P\$ の正巾がでてくるが、そのでてきたが制限されているので、\$(Q_0+R)u=0\$ の近似解が次の性質をもつようにつくれる。

□ \$\tilde{u} = \sum_{j=0}^N u_j\$ の形で、\$u_j\$ は、

$$(4-6) \quad |\partial_s^p \partial_y^\beta u_j(s,y)| \leq C_{p,\beta,j} e^{MP\sigma'(s-s)} P^{-j\sigma + (j+p)\sigma'}$$

を満たし、さらに、\$(Q_0+R)\tilde{u}=v\$ とすると、

$$(4-7) \quad |\partial_s^p \partial_y^\beta v(s,y)| \leq C_{p,\beta} e^{MP\sigma'(s-s)} P^{d-\delta\sigma - (N+1)\sigma + (N+2+p)\sigma'}$$

が成立する。但し、\$C_{p,\beta,j}\$, \$C_{p,\beta}\$, \$M\$ は定数。 □

さて、適切性の仮定から、次の不等式が成立している。

□ 任意のコンパクト集合 \$K \subset \Omega\$ に対して、ある \$C, L\$ があって、任意の \$(t,x)\$ と任意の \$u \in C_0^\infty(K)\$, \$u(t,x)=0\$ for \$t \le 0\$ に対して、

$$(4-8) \quad |u(t,x)| \leq C \sup_{\substack{t' \leq t, (t',x') \in K \\ p+|\beta| \leq L}} |(\partial_s^p \partial_y^\beta P u)(t',x')|$$

が成立する。 □

このことより、ある \$A, C, L\$ があって、次の不等式が成立している。

$$(4-9) \quad |u(s, y)| \leq C \cdot \rho^A \sup_{\substack{s \leq \hat{s}, \\ |y| \leq L}} |\partial_s^P \partial_y^A \rho_P u)(s, y)|$$

for $u \in C_0^\infty(\hat{V})$

$\chi \in C_0^\infty(\hat{V})$ を $\chi(s, y) = 1$ ととり、 $u = \chi \cdot E \cdot \tilde{u}$ とすると、(4-4), (4-6), (4-7) と σ' のなることから、十分大きい N に対して、この u は (4-9) をみたさないうことになる。

§ 5. 定理 2 の証明の概略

簡単のため、仮定 - B において、任意の $j \neq k$ に対して、 $\lambda_j \neq \lambda_k$ かつ $\kappa_0(j, k) = 0$ としておく。任意の $(t, x) \in \Omega$ に対して、 (t, x) の近傍で、 P が (3-3) の形にかければよい。

補題 5.1.

$1 \leq \hat{s} \leq s$, $1 \leq \hat{k} \leq m$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して、次のような座標変換 $T = T(\hat{s}, \hat{k}; \xi)$ がある。

(i) T は (t, x) の近傍 $\tilde{V}$ を $(0, 0)$ の近傍 $\tilde{U}$ にうつす。

$$(ii) \quad T \text{ は } \begin{cases} s = t - \hat{s} \\ y = f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_m(t, x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

の形をしている。

(iii) T により、 P が $\tilde{P}$ にうつったとすると、 $\tilde{P}$ の主部は

$$\tilde{P}_m(s, y; \sigma, \eta) = \prod_{j=1}^m (\sigma - \tilde{\lambda}_j(s, y; \eta)) \quad , \quad \tilde{\lambda}_j(s, y; \eta) = \lambda_j(t, x; \partial_x \langle f, \eta \rangle - \partial_t \langle f, \eta \rangle) \quad \text{で、} \quad \tilde{\lambda}_{\hat{k}}(s, y; e_n) \equiv 0, \quad \xi = (\text{grad}_x f_n)(0, 0) \text{ が成立する。}$$

(iv) ある $d = d(\hat{\ell}, \hat{k}; \hat{\xi})$ があって、

$$C_{\hat{\ell}}(t, x) \equiv \tilde{C}_{\hat{\ell}}(s, y) = y_d \times (\text{non-zero } C^\infty\text{-fun})$$

とかける。

$\tilde{U} \ni (s, y)$ を、 $\tilde{C}_{\hat{\ell}}(s, y) \neq 0$ for $\ell \neq \hat{\ell}$, $y_d = 0$ ととり、上の
iii) の $\tilde{P}$ について、 $p_d = 1$, $p_j = \varepsilon > 0$ ($0 \leq j \leq m$, $j \neq d$) として、
 (s, y) を原点とみて、§1 のようにニュートン図形を描くと、
これは、十分小さい ε については、 ε によらなくなり、さう
に (s, y) や $\hat{\xi}$ のとり方にもよらない。このニュートン図形で
は、 $K_1 = 0$ のときは $K_2 \geq 1$ がいえているので $\tilde{K}_1 = 1$ として
修正することができる。この修正したニュートン図形を、

$\tilde{\Delta}(\hat{\ell}, \hat{k})$ とし、下辺を $\mu = \mu_{\hat{\ell}, \hat{k}}(\hat{\xi})$ とする。 $\tilde{P}$ と $\tilde{\Delta}(\hat{\ell}, \hat{k})$
については、仮定 A がみたされて、定理 1 がつかえる。

定義 5.2.

(t, x) の十分小さい近傍 U を考える。 W を次の条件をみた
す U 上の作用素 $Q = \sum_{h=0}^m a_h(t, x; D_x) D_t^{m-h}$ の全体とする。

- (i) a_h は t を C^∞ -パラメータとする x についての
classical 擬微分作用素で、 $\text{ord. } a_h \leq h$ 。
ii) 任意の $1 \leq \hat{\ell} \leq s$, $1 \leq \hat{k} \leq m$, $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して、 Q を
 $T(\hat{\ell}, \hat{k}; \hat{\xi})$ でうつした作用素を $\tilde{Q} = \sum_{h=0}^m \tilde{a}_h(s, y; D_y) D_s^{m-h}$ とする
とき、 $\tilde{a}_h$ のシンボルの漸近展開 $\sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{a}_{h, h-\ell}(s, y; \gamma)$ ($\tilde{a}_{h, h-\ell}$
は γ について、 $(h-\ell)$ 次同次) が次をみたす。

$$(5-1) \quad \partial_\eta^\alpha \tilde{a}_{h,h-l}(s, y; c_n) \in y_d^{\Gamma_{l,h}(m-h+l+|d|)+d_d} \times C^\infty$$

if $l+|d| \leq h$

但し、 d は補題 5.1. の $d(l, h; \frac{1}{2})$

又、 $W_H \equiv \{Q = \sum_{h=H}^m a_h(t, x; D_x) D_t^{m-h} \in W; \text{ord. } a_h \leq h-H\}$ とする。

この定義の直前にのべたように、定理 1 によって、

命題 5.

$$P \in W$$

が成り立つ。又、 W_H をくわしく調べると、

補題 5.

$A(t, x; D_x)$ を t を C^∞ -パラメーターにもつ x についての擬微分作用素で、 $\text{ord. } A \leq 0$ とすると、任意の $J \subset I$ に対して、

$$A(t, x; D_x) \cdot \pi_J \in W_{m-|J|}$$

が成り立つ。さらに、次の命題が成立する。

命題 5.5.

(1) $Q = \sum_{h=H}^m a_h(t, x; D_x) D_t^{m-h} \in W_H$ とし、 Q の主シンボルを、
 $q(t, x; \tau, \xi) = \sum_{h=H}^m a_h^0(t, x; \xi) \tau^{m-h}$ (a_h^0 は ξ について $(h-H)$ 次同次)
 とする。このとき、任意の $1 \leq h \leq m$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して、

$$(5-2) \quad \left\{ \frac{(\partial_\tau^n q)(t, x; \lambda_h(t, x; \xi), \xi)}{C_1(t, x)^{\Gamma_{1,h}(n+H)} \cdots C_s(t, x)^{\Gamma_{s,h}(n+H)}} \in C^\infty \right.$$

for $n=0, 1, \dots, m-H$

(2) $g(t, x; \tau, \xi) = \sum_{h=H}^m a_h(t, x; \xi) \tau^{m-h}$, (a_h は ξ につき, $(h-H)$ 次同次) が (5-2) をみたすとする. 任意の $J \subset I$, $|J|=m-H$ に対して, $A_J(t, x; \xi) \in C^\infty(U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ なる 0 次同次函数があって, 次のようにかける.

$$g(t, x; \tau, \xi) = \sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=m-H}} A_J(t, x; \xi) \prod_{j \in J} (\tau - \lambda_j(t, x; \xi)).$$

(1) は W_H を少し調べるとわかる。(2) は [5] の §5 の議論を少し拡張すると示せる.

以上で準備はととのった。まず、命題 5.3 と補題 5.4 により、 $Q_1 \equiv P - \pi_I \in W_1$ かわかる。命題 5.5 により、 Q_1 の主シンボル g_1 が $g_1 = \sum_{|J|=m-1} A_J(t, x; \xi) \prod_{j \in J} (\tau - \lambda_j(t, x; \xi))$ とかける。 $P - \pi_I = \sum_{|J|=m-1} A_J(t, x; D_x) \pi_J$ の D_x^{m-1} の係数は 0 階以下である。これを $B(t, x; D_x)$ とする。 $|J_0|=m-1$ なる J_0 を一つとり、 $A_{J_0} + B$ を改めて A_{J_0} とすると、 $Q_1 = \sum_{|J|=m-1} A_J(t, x; D_x) \pi_J \in$ かわかる。ゆえに、この主シンボル g_2 が $g_2 = \sum_{|J|=m-2} A_J(t, x; \xi) \times \prod_{j \in J} (\tau - \lambda_j(t, x; \xi))$ とかける。以下同様にして、 P が $(\xi, \hat{x})$ のある近傍で、(3-3) の形にかける。

文 献

- [1] S. Mizohata-Y. Ohya; Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, 4 (1968), 511-526, Japan. J. Math., 40 (1971), 63-104.

- [2] H. Flaschka - G. Strang ; *Advances in Math.*, 6 (1971),
347-379.
- [3] V. Ivrii - V. Petkov ; *Russian Math. Surveys*, 29 (1974),
1-70.
- [4] T. Mandai ; *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 19 (1983), 145-168.
- [5] ——— ; *Commun. in Partial Differ. Equations*, 8 (1983),
735-771.
- [6] K. Yamamoto ; *J. Math. Soc. Japan*, 31 (1979), 481-502.
- [7] H. Uryu ; *Commun. in Partial Differ. Equations*, 5 (1980),
23-40.
- [8] V. Ivrii ; *Siberian Math. J.*, 17 (1976), 422-435.
- [9] ——— ; *Siberian Math. J.*, 17 (1977), 921-931.