

京都大学数理解析研究所共同利用研究会「情報物理学の数学的構造」2006 年 6 月 28 日-30 日

双対性によるスピングラスの解析と量子誤り訂正符号

東京工業大学・大学院総合理工学研究科 竹田 晃人 (Koujin Takeda)

Dept. of Compt. Intell. & Syst. Sci.,
Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

量子誤り訂正符号 (quantum error correcting code) とは文字通り量子情報に対する誤り訂正符号であり、この手法は量子計算機が実用化されたとして、その運用の際に量子状態を安定に保つ為に重要な技術である。しかしながらその構成法は量子状態の持つ特性 (観測による状態の破壊・量子非複製定理) に由来する困難さのため、Shor[1], Steane[2] 等の提示した方法まで知られていなかった。彼らの成果の後、様々な符号の構成法が提示され量子誤り訂正符号に関しての理解は進んだのだが、一般的な量子誤り訂正符号は量子情報の環境系に対する不安定さ (デコヒーレンス) の為にノイズに対する耐性が小さいという性質を持つことが分かった。そこで大きい誤り耐性を備えた量子誤り訂正符号は構成出来るのかという新たな問題が生じたのだが、これに応えたのが本稿で取り上げる Kitaev [3] によるトーラス符号である。この符号は、“トポロジカル” 符号というべきもので、符号を構成する系のトポロジカルな性質を利用して誤り耐性を大きくしようとするものである。(他方、大変冗長な符号であるという面も持つ。)

このトーラス符号に関しては、オリジナルの情報が (キュービット数が十分大きい極限で) 正しく復号出来る為の誤りキュービット比率の最大値、即ち誤り訂正限界が実は統計力学模型であるスピングラスの臨界現象の解析により分かるという興味深い対応が示されている [4]。具体的には、スピングラスの多重臨界点 (Nishimori line 上の臨界点) の相図上での位置が求められれば誤り訂正限界が求められるという対応である。ところがここで 1 つ問題がある。Kitaev が考案した 2 次元のトーラス符号だと対応するスピングラスの模型は 2 次元、或いは 3 次元の模型であるが、実は低次元のスピングラスの臨界点は解析的には求められていない。例えば Sherrington-Kirkpatrick 模型のような無限次元スピングラス模型であると平均場近似が厳密なので解析的に相境界がある程度求まるのだが、低次元系では平均場近似が悪くなるのでこの方法は利用出来ない。従って相転移点を求めるには数値解析に拠るしか方法が無かったのである。

本稿で説明するのはこの問題に対する 1 つの解決法である。それはスピングラス模型の双対構造を利用して臨界点を求めようとするものである。(但し、残念ながら本稿で提示する方法が厳密であることの証明は得られていない。) ここで提案する手法を用いることによりスピングラスの多重臨界点の位置に関する予想が行え、従ってトーラス符号の誤り訂正限界について統計力学の立場からの解析的な予想が可能になるのである。

この多重臨界点の予想は統計力学自体の問題としても興味深い。また、ここで示される多重臨界点の予想に関しての手続きではレプリカ法を利用する。レプリカ法はランダム系の統計力学、或いは情報統計力学には欠かせない解析手法であるが、その正当性は未だに議論されており決着されていない。ここで示す方法はレプリカ法の正当性の問題とも直接に関わり、その観点からも今後のより深い理解が望まれる。

共同研究者：西森秀稔氏 (東工大理), 佐本智弘氏 (千葉大理), 一瀬都夫氏 (名工大機能工学), 荒河孝氏 (元名工大機能工学), 松居哲生氏 (近畿大理工)

2 量子誤り訂正符号の一般的構造

トラス符号について述べる前に一般的な量子誤り訂正符号 (stabilizer 符号と呼ばれるもの) の構成について述べる。ここではトラス符号の理解の為に必要な最小限の事項について述べるが、より詳しく知りたい方は例えば [5] [6] 等を参照すると良いであろう。

まず符号化する前の量子情報 $|\Psi\rangle$ を用意する。今 1 キュービット分の量子情報を符号化するとすれば、

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (1)$$

が元の情報であるが、この情報を例えば N キュービットに符号化する際に、基底を

$$|\bar{\Psi}\rangle = a|\bar{0}\rangle + b|\bar{1}\rangle \quad (2)$$

と置き換えて符号語 $|\bar{\Psi}\rangle$ を作る。但し、上線付の基底は N キュービットからなる“冗長化”基底 (例えば、 $|\bar{0}\rangle = |000\dots(N \text{ 個})\dots 000\rangle$ のように) である。さて、符号語 $|\bar{\Psi}\rangle$ を構成する N 個の各キュービットには環境に起因した誤りが生じる可能性がある。環境の影響は物理的作用である為量子状態に対する誤りは一般にはユニタリ変換で表現され、従って誤りも連続的である。しかし量子誤り訂正符号では一般には次の 2 種の誤りのみを考えれば良いことが知られる。

ビット反転誤り (bit-flip error) : N キュービット系の任意の第 s キュービットについて、

$$|0\rangle_s \rightarrow |1\rangle_s, |1\rangle_s \rightarrow |0\rangle_s$$

位相誤り (phase error) : N キュービット系の任意の第 s キュービットについて、

$$|0\rangle_s \rightarrow |0\rangle_s, |1\rangle_s \rightarrow -|1\rangle_s$$

(3)

これらの誤りは行列表示すると Pauli 行列で書ける。通常ビット反転誤りを σ_s^X 、位相誤りを σ_s^Z と書き表す。(下添字 s は第 s キュービットに作用する Pauli 行列であることを示す。) 何故これら 2 種の誤りのみで他の誤りを考えなくて良いかその理由は後で述べる。

ところで N キュービット系の個々のキュービットではなく符号語 (2) 自体に同様のビット反転・位相誤りが生じることも起こりうる。この誤りを以下のように表す。

$$\text{ビット反転誤り: } \bar{X} \quad |\bar{\Psi}\rangle \rightarrow \bar{X}|\bar{\Psi}\rangle = b|\bar{0}\rangle + a|\bar{1}\rangle$$

$$\text{位相誤り: } \bar{Z} \quad |\bar{\Psi}\rangle \rightarrow \bar{Z}|\bar{\Psi}\rangle = a|\bar{0}\rangle - b|\bar{1}\rangle \quad (4)$$

である。(これらも同様に Pauli 行列で表現出来る。) またビット反転誤りの定義から冗長基底に関して $|\bar{0}\rangle = \bar{X}|\bar{1}\rangle, |\bar{1}\rangle = \bar{X}|\bar{0}\rangle$ となる。

次に誤り訂正の為に演算子として検査演算子 (check operator) というものを定義する。これは古典誤り訂正符号で誤りの位置を判定するのに用いるシンドロームに対応するものである。検査演算子は複数用意するが、各検査演算子 M_i は各キュービットに生じる誤りを表す Pauli 演算子 σ_s^X, σ_s^Z の直積により構成され、また

$$[M_i, M_j] = 0, [M_i, \bar{X}] = 0, [M_i, \bar{Z}] = 0 \quad (5)$$

となるように選ばれる。従って M_i を状態 $|\bar{\Psi}\rangle$ に作用させても状態は不変となる (この性質より M_i は stabilizer と呼ばれる) ので、誤り訂正の為に演算=観測により元の状態を破壊しないという保障がされているのである。

以上で道具が揃ったので次は誤り訂正の手続きについて述べる。今元の状態 $|\bar{\Psi}\rangle$ を全ての検査演算子の固有値 1 の固有状態と選んでおいたとしよう。この時例えばあるキュービット s にビット反転誤り・位相誤りが (或いは両方とも) 生じたとすれば、状態は $\sigma_s^X|\bar{\Psi}\rangle, \sigma_s^Z|\bar{\Psi}\rangle, \sigma_s^X\sigma_s^Z|\bar{\Psi}\rangle$ の何れかへ遷移するが、検査演算

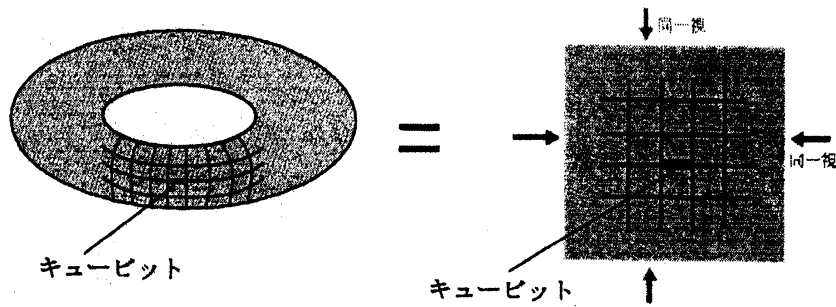


図 1: トーラス符号

子を前述のように Pauli 行列の直積で構成していることから、これらの誤りが生じた状態は (Pauli 行列の性質から) 固有値 1 又は -1 の検査演算子の固有状態となっている。元の状態は全ての検査演算子の固有値を 1 と選んでいるので、どの検査演算子の固有値が -1 になったかという結果が誤りに付いての情報を含んでいるのである。(この意味で、古典情報のシンジロームに対応している。) 実際の符号では検査演算子を巧みに設定することにより、(通常は) 検査演算子の固有値の値を調べることでどのキュービットに誤りが生じたか、またビット反転誤り・位相誤りのどちらが生じたかが分かるような構造になっている。但し古典符号と同様に誤りが発生したキュービット数が大きくなるとこの限りでは無く、固有値と誤りの対応が崩れる為に復号が正しく行えなくなるのである。

次に誤りの種類の限定について述べる。一般的な誤りを表す 2 行 2 列のユニタリ行列は (A) 元の状態 (B) ビット反転誤り σ^X が起きた状態 (C) 位相誤り σ^Z が起きた状態 (D) 両方の誤り $\sigma^X \sigma^Z = -i\sigma^Y$ が起きた状態に対応する 4 つの行列 ((A) に対応する単位行列・(B)~(D) に対応する 3 つの Pauli 行列) の線形結合で表される。従って (B)~(D) の誤り、つまりビット反転誤りと位相誤り (と両方が起きた場合) の訂正方法を正しく規定しておけば任意の誤りの訂正が可能なのである。(任意のキュービットに付いて (A)~(D) の重ね合わせの状態も勿論考えられるが、検査演算子の固有値によって (A)~(D) の状態は全て区別されているので、検査演算子による固有値の観測の結果重ね合わせの状態は (A)~(D) の何れかへと確率的に収縮する。) 量子誤り訂正符号では以上の仕組みにより連続的な誤りを離散化し、2 種の誤り = ビット反転誤り及び位相誤りのみを考えれば良いように出来る為、古典誤り訂正符号とほぼ同様の手続き (シンジロームより誤りの発生とその位置を判定する手続き) で誤り訂正が出来るのである。

3 トーラス符号

以上を踏まえ Kitaev の考案したトーラス符号に付いて説明する。(なお日本語の解説として [7] もあるので興味のある方は参照されたい。) ここでは、Kitaev の 2 次元トーラス符号について説明するが、トーラス符号をより高次元のものに拡張することも可能である [4, 8]。

2 次元トーラス符号は 2 次元トーラス上の正方格子、つまり通常の 2 次元正方格子で上下及び左右に周期的境界条件を持った系で定義される (図 1)。この格子上の各ボンド (リンク) に対して 1 キュービットを配置する。従ってトーラス符号はボンド数分のキュービットにより定義される系である。(図で見るとトーラスの表面にキュービットが乗っているような構成法なので、表面符号 (surface code) と呼ばれたりもする。) 以下ボンド数を N 、つまり N キュービット系を考えることとする。

トーラス符号では符号化前の元の情報は 2 キュービット分である。従って、元の情報 $|\Psi\rangle$ は

$$|\Psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle \quad (6)$$

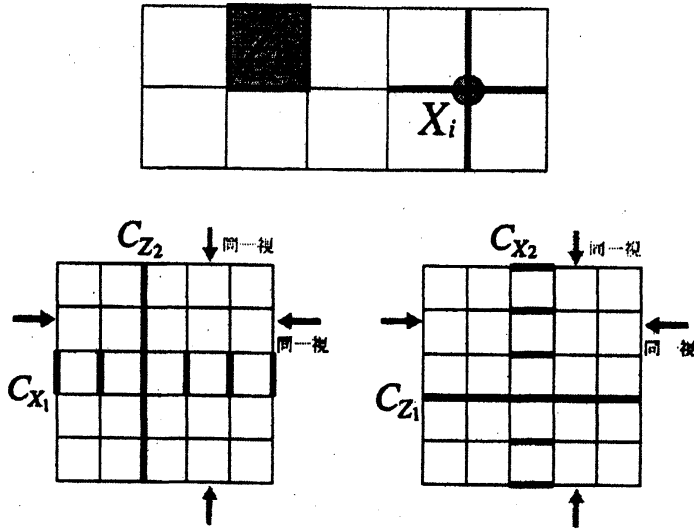


図 2: トーラス符号における検査演算子及びビット誤り・位相誤り演算子の構成.

(但し $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$) と 2 キュービット分の基底で表される. 符号化後の情報は

$$|\Psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle \quad (7)$$

と表す. 但し, 上線付の基底は N キュービットからなる基底である.

前式に現れる冗長基底の選び方を説明する前に検査演算子を定義する. 検査演算子は 2 種あり,

$$X_i = \bigotimes_{l \in \partial i} \sigma_l^x, \quad Z_P = \bigotimes_{l \in \partial P} \sigma_l^z \quad (8)$$

とする (図 2 上). 但し, X_i は格子上の全てのサイト (頂点), Z_P は全てのブラケット (最小正方形) に定義されている. また Pauli 演算子の添字 l はボンドを示す. (∂ は要素の境界を示す.) これらの検査演算子は容易に分かるように全てのサイト・ブラケットに関して $[X_i, Z_P] = 0$ と交換するので, 前に説明した (5) の性質を満たしている.

次に符号語に対してビット反転誤り・位相誤りを起こす演算子を定義する. 符号化前の情報は 2 キュービット分なので誤りに対応する演算子は 4 つあり, それぞれを $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2$ とする. 定義は,

$$\bar{X}_{1,2} = \bigotimes_{l \in C_{X_{1,2}}} \sigma_l^x, \quad \bar{Z}_{1,2} = \bigotimes_{l \in C_{Z_{1,2}}} \sigma_l^z \quad (9)$$

であり, 集合 C_{X_1, X_2, Z_1, Z_2} は図 2 下で示す通りである. またこれらの演算子は全ての検査演算子と交換するので (5) の性質を満たす.

さて冗長基底であるが, $\bar{X}_{1,2}$ を上のように定義したので次のように選べば良い.

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow \text{全ての } P, i \text{ で } Z_P|00\rangle = 1, X_i|00\rangle = 1 \text{ となる状態を 1 つ用意する.} \\ |10\rangle &= \bar{X}_1|00\rangle, \\ |01\rangle &= \bar{X}_2|00\rangle, \\ |11\rangle &= \bar{X}_1\bar{X}_2|00\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

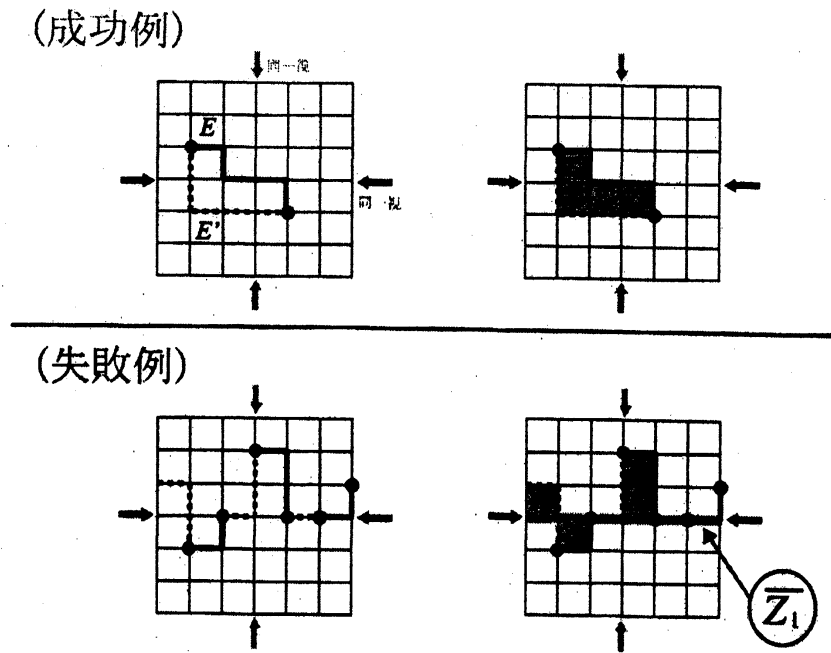


図 3: トーラス符号における誤り訂正

以上で系は定義されたのでこれらを用いて誤り訂正がどのように行われるかを述べる (図 3 参照). まず, 4 基底 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ に関しては全て検査演算子を作用させた結果は 1 である. (X は検査演算子と交換するから.) 次に各ボンドに配置されているキュービットに位相誤り σ^z が生じた場合を考えよう. この時検査演算子 X_i を全てのサイトに作用させると, 位相誤りの”鎖”(図 3 左上の E) の端点のみ (図の黒丸) で -1 の結果を与えることが分かる. 従って, 検査演算子 X_i が -1 を与えるところに位相誤り鎖の端点があるということが分かる (図 3 左上の黒丸). 但し位相誤り鎖 E 自体は検査演算子の作用の結果から知ることが出来ない. つまりトーラス符号では検査演算子の情報 (シンδροーム) から誤りを確実に決定することが出来ないのである. (同じシンδροームに対して複数の誤りのパターンが縮退している.)

しかし検査演算子からの情報に対して誤りの縮退が存在するにも関わらず, トーラス符号では誤りの生じたキュービットを適切に推定すれば復号が可能である. 例えば図 3 左上 E の誤り鎖が発生したとして, この誤り鎖を E' のように推定したとしよう. この場合は E と E' が異なっているので誤り訂正がうまくいっていないように見えるが実は誤り訂正は成功している. この推定では真の位相誤り鎖 E と推定した位相誤り鎖 E' が丁度トーラス面上で閉じた (可縮な) ループを構成したことになるが, この結果行われる訂正手続きにおいては, 元の状態に位相誤り鎖 E の部分に σ^z の誤りが発生している時に, 推定した位相誤り鎖 E' のボンドの箇所にさらに σ^z を作用させることになるので, 全体の操作としては実は元の状態に対してループの中にある全てのプラケットに Z_p を作用させることと同じ結果をもたらす (図 3 右上). 元の状態に関しては Z_p を作用させても 1 である為, 実はこの推定に基づく誤り訂正は元の状態を不変に保つことが分かる. 従ってこの場合は誤り訂正は成功しているのである.

一方, 真の位相誤り鎖 E と推定した位相誤り鎖 E' を繋いだ時にトーラスの周期境界を 1 周した場合 (ホモトピー的に非自明な場合) を考えよう (図 3 左下). この場合, 推定に基づく誤り訂正を行った結果は元の状態に複数の Z_p のみを作用させたとは見なせず, さらに $\bar{Z}_1$ (又は $\bar{Z}_2$) を作用させたことに対応する (図 3 右下). この結果, 符号語に位相誤りが発生したことになる. この誤りは (5) の性質から検査演算子で検出さ

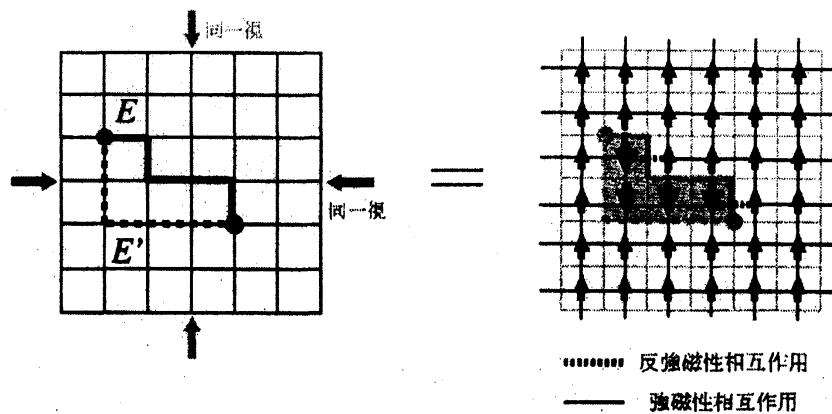


図 4: 誤り訂正の手続きとスピングラス模型との対応: ループの内外で逆向きのスピンを配置する. さらに E に当たる双対ボンドに反強磁性相互作用を割り当てる.

れない為訂正することは出来ない. 従って観測されないまま符号語が変化してしまうのでこれは誤り訂正の失敗の場合に対応するのである. これより, 真の位相誤り鎖と推定した位相誤り鎖がトーラス表面上で閉じたループを構成するか, または周期境界を1周するかで誤り訂正が成功か失敗かが分かれることになる.

ちなみに今は位相誤りの訂正のみを考えたが, ビット反転誤りの訂正は今考えたような位相誤りの手続きと全く同様に行える. ビット反転誤りを検出する際には検査演算子 Z_P が用いられるが, 正方格子の双対格子 (同じく正方格子) を考えると図2の検査演算子の定義から分かる通り検査演算子 Z_P の双対格子上的形状は丁度検査演算子 X_i の形状になっている. 従ってビット反転誤りを X_i で検出・訂正する際には双対格子上で行えば位相誤りの検出・訂正と全く同じ手続きで行えるということを意味している. またこのことから, トーラス符号においてはビット反転誤りと位相誤りの訂正は完全に分けて行うことが出来ることが分かるので, 誤り訂正限界を議論する場合にはどちらか1種類の誤りの訂正のみを考えれば良いのである.

4 トーラス符号とスピングラス模型

さて, 上記の誤り訂正の手続きと統計力学におけるスピングラスの関係 [4] を以下で簡単に説明する. これらの関係は古典情報の枠内で誤り訂正符号とスピングラス模型と関連付ける場合と同様に, 誤り訂正の際の事後確率分布と Boltzmann 因子との対応によって示される.

その対応は図4で示す通りであり, 与えられた誤り鎖 E が存在する時特定の誤り訂正 (E' による推定) に対する事後確率分布が, 双対格子上で統計力学模型を定義した際に, 特定の Ising スピン及びランダムな相互作用の配位に対する Boltzmann 因子と丁度比例するということである. そのような Boltzmann 因子を持つ模型は正方格子上に定義された2値ランダムネスを持つ Ising 模型であり, Hamiltonian (エネルギー関数) は,

$$H = -J \sum_{ij} \tau_{ij} S_i S_j \quad (11)$$

である. ここで ij の組は正方格子上でボンドにより結ばれる2つのサイトの組, J は相互作用定数, S_i は Ising 変数 (± 1 の値を取る変数), τ_{ij} は ± 1 の2値を取るボンド毎に定義されたランダムな変数であり, 確率 p で1, $1-p$ で-1を取るとする.

トーラス符号と Ising 模型とのパラメータの対応であるが, キュービットに誤りが発生する確率が $1-p$ であるときに, 対応するランダムネスを含む Ising 模型での強磁性相互作用確率 (相互作用の符号が正であ

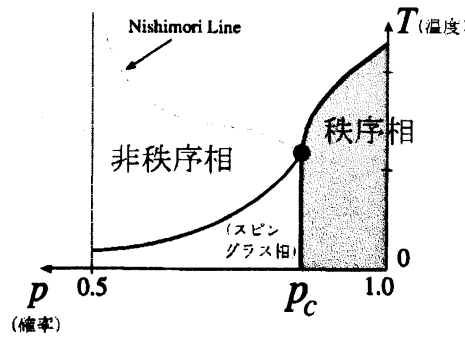


図 5: 有限次元スピングラス模型の典型的な相図: Ising 系であれば秩序相は強磁性相, 非秩序相は常磁性相である。低温のスピングラス相は模型によっては存在しない。多重臨界点 (黒丸) は Nishimori line 上に存在する。

る確率) が p となる。ここで1つ注意して頂きたいのは、トーラス符号のパラメータは誤り確率のみで、一方ランダムネスを含む Ising 模型にはパラメータとして確率パラメータ p 及び温度 T の2つがあり自由度が合わないのだが、トーラス符号と関係するのは確率パラメータと温度の間に Nishimori line[9] の関係式

$$e^{-2K} = \frac{1-p}{p} \quad (12)$$

(K は相互作用係数を含んだ逆温度で $K \equiv \beta J$, $\beta \equiv T^{-1}$ は逆温度) が成立する場合である。従ってパラメータの自由度は等しい。これは、キュービットに誤りが生じる確率と生じない確率との比が $(1-p)/p$ であるのに対し、それぞれに割り当てられる Boltzmann 因子の比が e^{-K}/e^K となっているからである。

事後確率分布と Boltzmann 因子の関連より、トーラス符号の誤り訂正限界もランダムネスを含む Ising 模型を解析することにより求められることが予想される。その予想は正しく、実際にはキュービット数が無限大の極限 (統計力学での熱力学的極限) で模型の多重臨界点 (Nishimori line 上の相転移点, 図 5) より誤り訂正限界が求められる。(この場合、符号としての冗長度は非常に大きい。) おおよそこれは次のように説明される。事後確率分布に Boltzmann 因子を対応させる時、閉じたループの中にループの外側とは逆向きのスピンを対応させる (図 4) とした。誤り訂正が成功するときはループに対応して局所的な磁区が所々に存在することになるが、熱力学的極限を考えた際は全体の磁化は零でない有限値と見なせ、それが強磁性相=秩序相に対応すると考えられる。誤り訂正が失敗するときにはそのような描像が取れなくなり、全体としてスピンのランダムに配位しているので常磁性相=非秩序相となる。従って成功・失敗の閾値確率=誤り訂正限界が相転移点に対応するのである。以上から、2次元トーラス符号の誤り訂正限界を求めるには、(11) 式で定義される2次元正方格子上的2値ランダムネスを持つ Ising 模型の Nishimori line 上での相転移点 (=多重臨界点) を求めれば良いことが分かった。

但し上の議論では検査演算子の作用により読み取られるシンδροームの情報は100%正しいことを仮定したが、一般には検査演算の過程でも誤りが存在するので誤り訂正の際にはその影響も考慮しなければならない。詳細は [4] を見て頂きたいが、これを考慮した場合には (検査演算の誤りを取り入れることに対応して、模型の時間軸方向の自由度が増え、模型の次元が1次元増す為) 対応する模型が変わり、3次元立方格子上で定義されたランダムプラケットゲージ模型 (=4 体相互作用する2値ランダム Ising 模型で、ランダム格子ゲージ模型とも呼称する) となる。Hamiltonian は

$$H = -J \sum_P \tau_P \prod_{l \in \partial P} S_l \quad (13)$$

である。\$P\$ は正方格子状のブラケット、\$\tau_P\$ はブラケット毎のランダム変数、\$S_l\$ はボンド毎に定義された Ising 変数である。従って検査演算の過程の誤りを考慮した場合はこの模型の Nishimori line 上の相転移点を求めなければならない。（参考までにこの模型は格子ゲージ模型で良く知られるクォークの閉じ込め転移に当たる confinement-Higgs 転移という秩序・非秩序相転移を起こす。）なお、ここでは単純化の為にキュービットの誤り確率と検査演算子による観測の誤り確率は等しいとした。一般にはこれらの確率は異なるので模型としては異方的なランダムネスを含んだランダムブラケットゲージ模型が対応する。

5 ランダムスピン系の双対性と多重臨界点の予想

前節まででトーラス符号とスピングラスの相図の關係に付いて述べたが、これ以降はスピングラス（ランダムスピン系）の相図、特に多重臨界点（Nishimori line 上での臨界点）の相図上での位置を如何に予想するか [10][11][12] に付いて述べる。

それを行う上で必要となるものが模型の双対構造に関する知識である。まず、ランダムネスの無い古典スピン系の双対性から話を始める。古典スピン系の双対構造として最も有名なものが 2 次元正方格子上の Ising 模型の高温・低温相の間の双対性（Kramers-Wannier 双対性）である。いま、2 次元正方格子上の Ising 模型、つまり (11) からランダムネスを取り除いた模型

$$H = -J \sum_{ij} S_i S_j \quad (14)$$

を考える。このとき系の分配関数

$$Z = \sum_{S_i = \pm 1} \exp(-\beta H) \quad (15)$$

について次の性質が成り立つ。

$$Z(K) \propto Z(K^*), \text{ 但し } e^{-2K^*} = \tanh K. \quad (16)$$

これが Kramers-Wannier 双対性を示す関係式であり、逆温度 \$K\$ と双対逆温度 \$K^*\$ での分配関数間に關係があることを示している。そして、この双対關係式で逆温度と双対逆温度が一致する点 \$K_c\$

$$e^{-2K_c} = \tanh K_c \rightarrow K_c = \frac{1}{2} \log(\sqrt{2} + 1) \quad (17)$$

が 2 次元正方格子上の Ising 模型の相転移点（秩序・非秩序、或いは強磁性・常磁性相転移点）として求まる。これは温度の関数として分配関数の特異点が 1 点（すなわち相転移点が 1 点）のみである場合、双対性から逆温度と双対逆温度が一致する点のみにしか特異性が存在し得ないからである。通常、この事実は 2 次元正方格子上の Ising 模型の高温展開と低温展開の間の關係を調べることによって理解されるが、Boltzmann 因子の Fourier 変換の技法 [13] を用いるとより直接に理解することが出来る。（この技法を後にランダム系の双対性を考える際に利用する。）

ところで模型の双対性は 2 次元正方格子上の Ising 模型に限らずより多くの場合について知られている。ここでは Ising 型の模型に話を限定するが、例えば Potts 模型等の多成分スピン系にも同様の構造が存在する。

Ising 型の模型（=2 値スピン模型、\$Z_2\$ 模型）については Wegner によりその双対構造が系統的に調べられた [14] が、その結果は以下の通りである。まず \$d\$ 次元格子を考え、その上に以下の Hamiltonian で定義される \$r\$ 次元相互作用を持つ模型

$$H = -J \sum_C \prod_{x \in \partial C} S_x \quad (18)$$

を考える。但し \$C\$ は格子上的 \$r\$ 次元要素で、\$\partial C\$ は要素 \$C\$ の境界を示す。この模型で \$r = 1\$ の場合が Ising 模型であり、\$r = 2\$ の場合が (13) のランダムブラケットゲージ模型からランダムネスを取り除いた模型である。

この模型の双対は d 次元の双対格子 (双対格子の定義は詳しくは [14] 参照) で定義され, 上記の要素 C の次元が $d-r$ となる模型である。つまり,

$$(d \text{ 次元} \cdot r \text{ 次元相互作用 Ising}) \leftrightarrow (d \text{ 次元} \cdot d-r \text{ 次元相互作用 Ising} \cdot \text{双対格子}) \quad (19)$$

という双対関係が有り, このときこれらの模型間の相転移点 K_{c1}, K_{c2} の間には, $e^{-2K_{c2}} = \tanh K_{c1}$ という 2 次元正方格子上的 Ising 模型の高温・低温相間の関係式と同様の関係が成り立つ。(ここでは, 各模型で相転移点は 1 点のみであることを仮定した。) またこれから格子が自己双対であれば $d = 2r$ の場合に模型が自己双対になることが分かる。(2 次元正方格子上的 Ising 模型もこれに当てはまる。)

ここまでは非ランダムな Ising 模型の双対性と相転移点に関する議論であるが, 我々を取り扱いたいのはランダムネスを含む系である。従ってランダム系で同様の議論を行わねばならないが, ここでランダムネスの配位平均を行う際にレプリカ法の技法を利用する。レプリカ法は対数量 (統計力学的には自由エネルギー) のランダム平均を求める際の解析的困難を回避するための手法であり, 平均量の計算に関して

$$\langle \log Z \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\langle Z^n \rangle - 1}{n} \quad (20)$$

という恒等式を利用するのである。($\langle \rangle$ はランダムネスについての平均操作を示す。) 左辺は一般的に解析困難な量であるが, 右辺の $\langle Z^n \rangle$, つまり Z の n 次モーメントが解析が比較的容易であることを利用し, まず $\langle Z^n \rangle$ を n が自然数の範囲で計算しそれを実数に解析接続する操作を行うのである。(但し, どのような場合に解析接続の操作が正当化されるかは現在も議論されている。本講義録の田中利幸氏の記事を参照。)

統計力学では相転移を判断するのに用いる量は自由エネルギー, 即ち対数量 $\langle \log Z \rangle$ に当たる量である。従って相転移点を求める際に双対性を次のように利用する。まず, $\langle Z^n \rangle$ の双対性を n が自然数の場合に調べ, その場合に予想される相転移点の式 (或いは相転移点間の関係式) を求め, その予想式を $n \rightarrow 0$ へ外挿するのである。

次に模型についてであるが, (18) で定義した d 次元 r 次元相互作用型 Ising 模型に 2 値ランダムネスを導入した模型を考える。これは, 次のような Hamiltonian で表される模型である。

$$H = -J \sum_C \tau_C \prod_{x \in \partial C} S_x. \quad (21)$$

(18) 式の模型に τ_C という要素 C 毎のランダム変数が導入されている。このランダム変数は確率 p で 1, 確率 $1-p$ で -1 を取るものとする。

さてこの模型に関して, 分配関数の n 次モーメント (平均化 n レプリカ分配関数) $\langle Z^n \rangle$ の双対性を考える。まず $\langle Z^n \rangle$ は定義から平均 Boltzmann 因子 $\langle \exp(-\beta H) \rangle$ の全配位についての和であるが, 平均 Boltzmann 因子は各要素 C についての因子 (平均局所 Boltzmann 因子) の積として表されるので, $\langle Z^n \rangle$ は平均局所 Boltzmann 因子の同次式である。そこで以下では平均局所 Boltzmann 因子の性質に着目する。

今考えている系について平均局所 Boltzmann 因子の種類はスピン変数 S_x の配位を全て考えると $n+1$ 種類であることが分かる。これらの平均局所 Boltzmann 因子を x_m ($0 \leq m \leq n$ の整数) と添字で区別して表すことにすると, その具体形は

$$x_m(p, K) = pe^{(n-2m)K} + (1-p)e^{-(n-2m)K} \quad (22)$$

である。但し添字 m は $n-m$ 個のレプリカ内で $\prod_{x \in \partial C} S_x = 1$, m 個のレプリカ内で -1 という配位に対応した平均局所 Boltzmann 因子であることを示す。

このとき, 平均化 n レプリカ分配関数 $\langle Z^n \rangle$ はこれらの平均局所 Boltzmann 因子の多項式であるから,

$$Z_n\{x_0(p, K), x_1(p, K), \dots, x_n(p, K)\} \equiv \langle Z^n \rangle \quad (23)$$

と表せる。

次にこの平均化 n レプリカ分配関数の双対表現を得る為に、先程定義した平均局所 Boltzmann 因子の双対を考える。“双対”平均局所 Boltzmann 因子は元の因子の Fourier 変換 [11] により定義される。ここでは変換の結果のみを記すが、因子 $x_m(p, K)$ の双対を $x_m^*(p, K)$ とすると、

$$\begin{aligned} x_{2m}^*(p, K) &= 2^{\frac{n}{2}} \cosh^n K \tanh^{2m} K, \\ x_{2m+1}^*(p, K) &= 2^{\frac{n}{2}} (2p - 1) \cosh^n K \tanh^{2m+1} K. \end{aligned} \quad (24)$$

ここで m は 0 以上の整数である (偶奇で形が異なる). $x_m^*(p, K)$ は $x_m(p, K)$ と同じく $0 \leq m \leq n$ で定義される。

ところで (18) で定義される非ランダム模型には (19) の双対性があったが、ランダム模型 (21) についてもレプリカ分配関数の性質よりこの双対性が同様に成立するとみなすことが出来る。つまり (21) の模型について

$$(d \text{ 次元} \cdot r \text{ 次元 } 2 \text{ 値ランダム相互作用 Ising}) \leftrightarrow (d \text{ 次元} \cdot d - r \text{ 次元 } 2 \text{ 値ランダム相互作用 Ising} \cdot \text{双対格子上}) \quad (25)$$

という双対関係が成り立つということである。

以下でこの性質を説明するが、まず自己双対系の場合 ($d = 2r$, 格子が自己双対) の場合を取り上げる。上の (25) の意味で自己双対で有る場合、平均化 n レプリカ分配関数の自己双対性はこれら平均局所 Boltzmann 因子及びその双対を用いると以下のように表現される [10][11].

$$Z_n\{x_0, \dots, x_n\} \propto Z_n\{x_0^*, \dots, x_n^*\}. \quad (26)$$

即ち平均化 n レプリカ分配関数 Z_n を平均局所 Boltzmann 因子の同次式として考えた場合、それらの因子を全て同じ添字 m を持つ双対因子に置き換えても、 Z_n は (格子の形状に依存しない定数を除いて) 不変だということである。

この双対表現から相転移点を求めようとするのだが、 $x_m(p, K)$ 及び $x_m^*(p, K)$ が確率 p 及び逆温度 K の関数であることを考慮すると、上記で定義される Z_n に対しての双対変換の固定点は

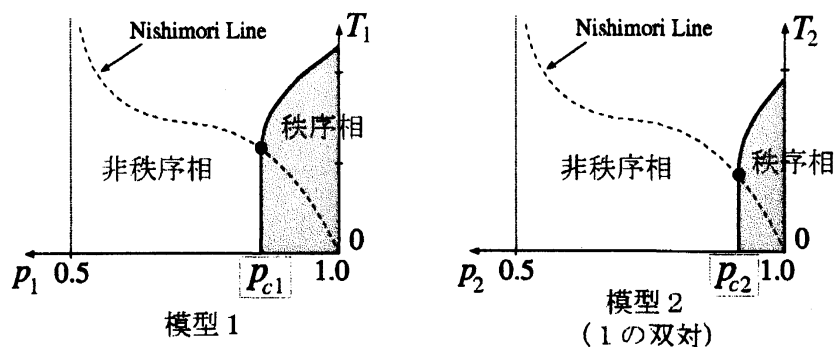
$$x_m(p_c, K_c) = x_m^*(p_c, K_c) \quad (27)$$

の条件をすべての m について満たす相図の (p, K) 平面上の点 (p_c, K_c) であることが分かる。(厳密には十分条件であるが、必要条件であることも示せる [15].) しかし今考えている模型ではこの条件を全て満たす点は $n = 1, 2$ については $p \neq 1$ でも存在するが、 $n \geq 3$ では $p = 1$ 上 (非ランダムな模型に対応する場合) にしか存在しない。(具体的に計算すれば分かる.) つまり一般の n で双対変換の固定点が存在し得るのは相図の (p, K) 平面上で $p = 1$ 上のみということになる。我々が得たいのはランダム系に対する固定点 (=ランダム系の相転移点) なので $p \neq 1$ の固定点を得たいのだが、この結論はそのような点が無いということの意味する。

これでは双対性からランダム系に対する相転移点が求まらないことになるので、ここで 1 つ仮定を置く。それは上記の $n+1$ 本の条件式を全て満たすという要請を諦め、そのうちの 1 つのみを満たすことを要請し、その条件に当てはまる点を相転移点だと予想するということである。そしてそれを (27) 式で $m = 0$ の場合ものと定め、

$$x_0(p_c, K_c) = x_0^*(p_c, K_c) \quad (28)$$

を満たす点 (p_c, K_c) を求めるのである。従って上記の条件を満たす点が厳密な意味で相転移点となっているかは (双対表現から厳密に導出されるわけではないので) 明らかではなく、現段階ではこの条件により相転移点が求まるということはいくまでも仮定である。さらに、ここでは上記を満たす点 (p_c, K_c) のうち Nishimori



$$H(p_{c1}) + H(p_{c2}) = 1$$

図 6: 2つの双対なランダム模型についての多重臨界点の予想関係式

line 上の点, つまり $e^{-2K} = (1-p)/p$ を満たす点のみに着目する. この理由は, 今考えているトーラス符号の誤り訂正限界と関係するのが (p, K) 相図上での多重臨界点 (Nishimori line 上の相転移点) だからである. (なお, Nishimori line 上以外の点についての (28) 式の妥当性に関しては様々な議論が有るがここでは割愛する.)

さて, この条件を実際に今考えている模型について平均局所 Boltzmann 因子の具体系を用いて書き表すと,

$$p_c e^{nK_c} + (1-p_c) e^{-nK_c} = 2^{\frac{n}{2}} \cosh^n K_c \quad (29)$$

である. さらに Nishimori line の条件を課し, $n \rightarrow 0$ の極限を考えると,

$$H(p_c) = \frac{1}{2}, \quad \text{但し } H(p) \equiv (-p \log p - (1-p) \log(1-p)) / \log 2 \quad (30)$$

という式が導かれる. この式を満たす p_c は数値的に求めるしかないが, 解となる p_c は $p_c = 0.889972\dots$ である (表 1 参照). 従ってこの値が (p, K) 相図上での多重臨界点の p_c の値と予想されるが, 実際この値は表 1 の通り数値計算の結果と非常によく合うことが分かっている.

今考えたのは 2 値ランダムネスを持つ Ising 型の自己双対模型であるが, 同じく正方格子上で定義されていれば, Gauss 型ランダムネスのような異なるランダムネス, 或いは Potts 模型のような多成分スピン (Z_q スピン) 系でも同様の考察から多重臨界点の予想値が求まり (値は Ising の場合と同じではない), やはり数値解析の結果と良く合っている (表 1 参照). つまりより広い模型で同様の予想が可能なのである.

これまで考えたのは自己双対模型に対しての双対性を用いた多重臨界点の議論であるが, 実はこの議論は自己双対でない模型についても拡張することが出来る [12]. ランダムな模型の双対関係は (25) で定義したが, この双対関係が成り立つ 2 つのランダム模型についてそれぞれの模型の平均化 n レプリカ分配関数を $Z_{1n}, Z_{2n} (\equiv \langle (Z_1)^n \rangle, \langle (Z_2)^n \rangle)$ と表すことにすると,

$$\begin{aligned} & Z_{1n} \{x_0(p_1, K_1), \dots, x_n(p_1, K_1)\} Z_{2n} \{x_0(p_2, K_2), \dots, x_n(p_2, K_2)\} \\ &= Z_{1n} \{x_0^*(p_2, K_2), \dots, x_n^*(p_2, K_2)\} Z_{2n} \{x_0^*(p_1, K_1), \dots, x_n^*(p_1, K_1)\} \end{aligned} \quad (31)$$

という関係が示せる. ここで p_1, K_1 及び p_2, K_2 はそれぞれの模型の確率及び逆温度である. さて先程の自己双対模型と同様に多重臨界点に対する仮定を置く. 今は分配関数積について双対性があるので, 平均局所 Boltzmann 因子で多重臨界点についての予想式を書き下す場合,

$$x_0(p_{c1}, K_{c1}) x_0(p_{c2}, K_{c2}) = x_0^*(p_{c1}, K_{c1}) x_0^*(p_{c2}, K_{c2}) \quad (32)$$

と因子積の形で表すのが自然である。さらに、各模型のパラメータ $(p_{1,2}, K_{1,2})$ がそれぞれ Nishimori line の条件を満たす場合を考えると、2 模型の多重臨界点間の予想関係式が導かれると期待される。実際に (32) 式に Nishimori line の条件式を課して $n \rightarrow 0$ の極限を取ると、

$$H(p_{c1}) + H(p_{c2}) = 1 \quad (33)$$

という多重臨界点間の予想関係式が得られる (図 6)。 $H(p)$ の定義は (30) 式と同じである。

この相互双対ランダム系の予想関係式についての議論は多成分スピン系にも拡張することが出来る。(またここで導かれた予想関係式は自己双対模型が 2 回相転移する場合も記述出来ると考えられるが、多成分スピン系にはこの観点からの応用が重要である。) その拡張から導かれる予想に関して近年数値解析による検証が進んでいるがここでは詳細は述べない。予想の導出については [12] を参照して頂きたい。

今までに述べた自己双対模型の多重臨界点での確率 p_c の予想値、及び相互双対模型間での予想関係式 (33) を数値解析の結果と比較してみる。(多数の検証があるので表にまとめた。表 1, [16] から借用。) この比較を見る限り全ての数値解析の結果は予想値・予想関係式と矛盾していないように見える。従って仮定より導き出された予想はおそらく正しいのではないかとと思われる。

次元 (d)	相互作用 次元 (r)	模型	数値解析による評価	双対性による予想値
2	1	正方格子 Ising	0.8900(5)[17]	0.889972...[10]
2	1	正方格子 Gauss 型ランダム	1.00(2)[18]	1.021770...[11]
2	1	正方格子 3 状態 Potts	0.079-0.080[19]	0.079731...[11]
4	2	超立方ブラケットゲージ	0.890(2)[20]	0.889972...[8]
2	1	三角格子 Ising	0.8355(5)[21]	0.835806...[22]
2	1	六角格子 Ising	0.9325(5)[21]	0.932704...[22]
3	1	立方格子 Ising	0.7673(3)(= p_{c1})[23]	—
3	2	立方格子ブラケットゲージ	0.967(4)(= p_{c2})[24]	—
		立方 Ising+立方ゲージ	$H(p_{c1}) + H(p_{c2}) = 0.99(2)$	$H(p_{c1}) + H(p_{c2}) = 1$
2	1	階層格子 Ising(その 1)	0.8265(= p_{c3})[25]	—
2	1	階層格子 Ising(上の双対)	0.93380(= p_{c4})[25]	—
		階層その 1 + 双対	$H(p_{c3}) + H(p_{c4}) = 1.0172$	$H(p_{c3}) + H(p_{c4}) = 1$
2	1	階層格子 Ising(その 2)	0.8149(= p_{c5})[25]	—
2	1	階層格子 Ising(上の双対)	0.94872(= p_{c6})[25]	—
		階層その 2 + 双対	$H(p_{c5}) + H(p_{c6}) = 0.9829$	$H(p_{c5}) + H(p_{c6}) = 1$
2	1	階層格子 Ising(その 3)	0.7527(= p_{c7})[25]	—
2	1	階層格子 Ising(上の双対)	0.97204(= p_{c8})[25]	—
		階層その 3 + 双対	$H(p_{c7}) + H(p_{c8}) = 0.9911$	$H(p_{c7}) + H(p_{c8}) = 1$
2	1	自己双対階層格子 Ising	0.8902(4)[26]	0.889972...[16]

表 1: ランダム模型の多重臨界点 (Nishimori line 上の臨界点) での確率 p_c の値。Gauss 型ランダム模型と Potts 模型を除いて 2 値ランダムネスを持つ模型である。上から 4 つは自己双対模型であり多重臨界点の位置が予想出来る。次の三角格子の場合は特殊な双対変換を定義することで自己双対模型とみなせる [22]。その次の六角格子の場合は三角格子の双対として予想出来る。その他の場合は互いの多重臨界点の位置の関係式のみが予想出来る。(階層格子に関しては各文献を参照のこと。一番下の階層格子は自己双対なので正方格子と同じ予想値となる。) 全ての数値解析の結果は予想と矛盾しないように見える。

さて、この結果を用いればトーラス符号の誤り訂正限界が求められることになる。Kitaev の 2 次元トーラス符号に関しては、対応するモデルは $d = 2, r = 1$ である 2 次元正方格子上的 2 値ランダムネスを含む Ising 模型であり、このモデルが自己双対と見なせることから誤り訂正限界（の予想値）が双対性の議論から定まる。誤り訂正限界の値は多重臨界点での確率 p_c の値から $1 - p_c$ として求まるので、2 次元トーラス符号についてはおよそ 11% と予想出来る。前に述べたように検査演算の際の誤り確率も考慮すると、2 次元トーラス符号の誤り訂正限界は $d = 3, r = 2$ のモデル、つまり 3 次元立方格子上のランダムプラケットゲージ模型の相転移点から求まる。この場合はモデルが自己双対で無いので予想式から誤り訂正限界の値は決まらないが、数値計算による結果と合わせて約 3.3% であるとほぼ確定させることが出来る。

6 結論及び課題

本稿では量子誤り符号の 1 つであるトーラス符号についてその構成法を紹介し、この符号の性能（誤り訂正限界）がスピングラスの相図より評価出来ることを述べた。そして有限次元スピングラスの相図の解析法について説明したが、それは平均化レプリカ分配関数の双対性の表式を導出し、その双対表現から 1 つの仮定を置くことにより (p, K) 相図上での多重臨界点についての予想式を導き出すというものであった。この予想式より自己双対模型については多重臨界点の位置が決定出来、さらに相互に双対な 2 模型間については 2 つの多重臨界点に関する予想関係式を導くことが出来た。これらの予想について数値解析による多数の検証があるが、それらの結果でこの予想と矛盾するものは無いように思われる。予想が厳密であることは示されていないが、この事実よりおそらく正しい位置及び関係式を与えているのではないかと考えられる。

この関係式からトーラス符号の誤り訂正限界が求められた。Kitaev の 2 次元トーラス符号に関する誤り訂正限界は約 11%、また、検査演算の際の誤りも含めて誤り訂正限界を評価すると約 3.3% である。トポロジカルな構成法を用いない量子誤り訂正符号の訂正限界は 0.01% 程度との評価が有るので、トポロジカルな性質を利用したトーラス符号が良い誤り耐性を持つことが双対性の議論からほぼ確定出来たのである。（他の符号の誤り訂正限界の評価については詳しくは [4] の Introduction を参照。文献が紹介されている。）

本稿では取り上げなかったが、高次元のトーラス符号も定義することが出来、それらについても上記の双対性の議論から誤り訂正限界が予想出来る。（4 次元型トーラス符号については [4][8] で議論している。）同時に量子反復符号という 1 次元の量子誤り訂正符号の誤り訂正限界も見積もることが出来る。（[4][12] で議論されている。）これらもスピングラスの知見が量子誤り訂正符号の解析に役立つ例である。

ここで述べた双対性による予想が厳密であるかという問題は統計力学の観点から重要である。さらに言えば本稿での議論は平均化 n レプリカ分配関数の予想相転移点を $n \rightarrow 0$ に外挿する操作を行っている為、レプリカ法の正当性とも関係する話であり、その点も興味深い。この双対性の議論に関しては厳密証明への一歩進んだ試み [16] があるがやはり完全には解決していない。今後のさらなる進展が望まれる。

謝辞

当研究は科学研究費補助金特定領域研究「確率的情報処理への統計力学的アプローチ (SMAPIP)」, 及び 21 世紀 COE プログラム「量子ナノ物理学」の支援の下に遂行された。

参考文献

- [1] P. Shor, Phys. Rev. A **52** (1995) 2493.
- [2] A. M. Steane, Phys. Rev. Lett **77** (1996) 793.

- [3] A. Kitaev, *Ann. Phys.* **303** (2003) 2.
- [4] E. Dennis, A. Kitaev, A. Landahl and J. Preskill, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 4452.
- [5] J. Preskill, "Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation" Chapter 7 (J. Preskill 氏のホームページから入手可能).
- [6] D. Gottesman, Doctor Thesis, quant-ph/9705052.
- [7] 西森秀稔, 数理科学 2005 年 12 月号記事 "量子情報処理と統計力学" サイエンス社.
- [8] K. Takeda and H. Nishimori, *Nucl. Phys.* **B686** (2004) 377.
- [9] H. Nishimori, *Prog. Theor. Phys.* **66** (1981) 1169.
- [10] H. Nishimori and K. Nemoto, *J. Phys. Soc. Jpn.* **71** (2002) 1198.
- [11] J. -M. Maillard, K. Nemoto and H. Nishimori, *J. Phys.* **A36** (2003) 9799.
- [12] K. Takeda, T. Sasamoto and H. Nishimori, *J. Phys.* **A38** (2005) 3751.
- [13] F. Wu and Y. Wang, *J. Math. Phys.* **17** (1976) 439.
- [14] F. Wegner, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 2259.
- [15] A. Aharony and M. J. Stephen, *J. Phys.* **C13** (1980) L407.
- [16] H. Nishimori, cond-mat/0602453, to appear in *J. Stat. Phys.*
- [17] 表の値は S. L. A. de Queiroz, *Phys. Rev.* **B73** (2006) 064410. 表には載せていないが他にも多数の結果が有る. F. D. A. Aarao Reis, S. L. A. de Queiroz and R. R. dos Santos, *Phys. Rev.* **B60** (1999) 6740; A. Honecker, M. Picco and P. Pujol, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 047201; F. Merz and J. T. Chalker, *Phys. Rev.* **B65** (2002) 054425; N. Ito and Y. Ozeki, *Physica* **A321** (2003) 262 等. 何れの結果も p_c の値は 0.890 程度である.
- [18] Y. Ozeki, private communication.
- [19] J. L. Jacobsen and M. Picco, *Phys. Rev.* **E65** (2002) 026113.
- [20] G. Arakawa, I. Ichinose, T. Matsui and K. Takeda, *Nucl. Phys.* **B709** (2005) 296.
- [21] S. L. A. de Queiroz, *Phys. Rev.* **B73** (2006) 064410.
- [22] H. Nishimori and M. Ohzeki, *J. Phys. Soc. Jpn* **75** (2006) 034004.
- [23] Y. Ozeki and N. Ito, *J. Phys.* **A31** (1998) 5451; N. Ito, Y. Ozeki and H. Kitatani, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68** (1999) 803.
- [24] T. Ohno, G. Arakawa, I. Ichinose and T. Matsui, *Nucl. Phys.* **B697** (2004) 462; C. Wang, J. Harrington and J. Preskill, *Ann. Phys.* **303** (2003) 31.
- [25] M. Hinczewski and A. N. Berker, *Phys. Rev.* **B72** (2005) 144402.
- [26] F. D. Nobre. *Phys. Rev.* **E64** (2001) 046108.