

完全二部グラフの cluttered ordering の構成

東邦大学 理学部 情報科学科

足立 智子, 菊池 大吾

Toho University, Department of Information Sciences

Daigo Kikuchi, Tomoko Adachi

1. はじめに

RAID とはハードディスクドライブの処理速度と安全性を高める技術である。この技術は、ネットワーク構築やサーバなど、高い信頼性と性能が要求されるコンピュータでは不可欠な存在となっている。RAID は基本的に、ディスクの読み込み・書き込みを複数のディスクで並列に行うことにより処理速度を高め、記憶すべきデータを格納した information disk の他に ディスクの破損箇所の発見・修復のための check disk と呼ばれる冗長性を持たせたディスクを用いることによって安全性を高めている。しかし、安全性を高めるためといって check disk を多くすると、追加のコストが増えてしまう。そこで、安全性と追加コストのバランスを考えることが重要になってくる。

RAID のアクセスコストを低減するため、Cohen 等(2001, 文献[6])によって cluttered ordering という概念が導入された。これは、RAID の information disk と check disk を完全グラフの辺と頂点に対応させて information disk の順序付けを考察する、というものである。また、Mueller 等(2005, 文献[8])は、二次元の RAID を完全二部グラフに対応させることで数理モデル化を行った。

本稿では Mueller 等の研究をさらに発展させ、効率的な RAID を構築するため、完全二部グラフの cluttered ordering の構成法について報告する。

2. 完全二部グラフを用いた二次元 RAID の数理モデル化

information disk には保存したいデータを分割して格納し、check disk には information disk 内のデータが破損した場合に復旧するための冗長データを格納する。そして今、 n 個の information disk と c 個の check disk があるとする。本稿で扱う二次元 RAID では、information disk, check disk を縦横の二次元に配列するので、information disk の個数 $n = m_1 \times m_2$ に対し、check disk の個数は $c = m_1 + m_2$ となる。本稿では $m_1 = m_2 (=m)$ の場合を扱う。

図 1 では 9 個の information disk を縦 3 行・横 3 列の二次元に配列しているので、対応する check disk は縦方向に 3 個・横方向に 3 個の計 6 個となる。

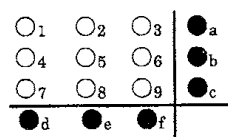


図 1. 二次元の RAID

この二次元 RAID を完全二部グラフで表現することで数理モデル化を行う。

RAID の check disk を頂点, information disk を辺とみなすことで, RAID を完全グラフで表現することができる. $n(=m^2)$ 個の information disk $\cdot c(=2m)$ 個の check disk を持つ二次元の RAID は, 上下に m 個ずつ計 $c = 2m$ 個の頂点 $\cdot n = m^2$ 本の辺を持つ完全二部グラフ $K_{m,m}$ に対応する.

先に図 1 で示した二次元の RAID は, 図 2 のように完全二部グラフ $K_{3,3}$ で表現できる.

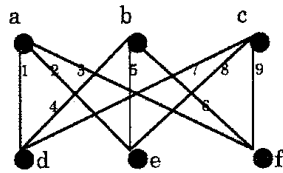


図 2. 図 1 に対応する完全二部グラフ

information disk 内のデータが破損した場合には, 次のように check disk を用いて復旧する. n 個の information disk と c 個の check disk を持つ RAID に対し, これらの関係を 0, 1 を成分にもつ $c \times (n+c)$ 行列 $H=[P|I]$ で表す. この行列 H はパリティ検査行列と呼ばれる (文献[2]). ただし, I は単位行列であり, P は c 行 n 列の $\{0,1\}$ -行列である. パリティ検査行列 H の最初の n 列は information disk に対応し, 後半の c 列は check disk に対応している. パリティ検査行列 H の 1 つの行に現れる information disk の内容の排他的論理和が計算され, その行に対応する check disk に書き込まれている. そして, 1 つのディスクが壊れても復旧できるように, パリティ検査行列 H の列は mod 2 で線形独立になっている. パリティ検査行列の詳細については, 文献[2]および[7]を紹介する.

3. Cluttered Ordering

あるグラフ $G=(V, E)$ について, $c=|V|$, $E=\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ とし, n より小さい正の整数 d を考える. また, $\{0, 1, \dots, n-1\}$ 上の置換 π に対して $V_i^{\pi,d}$ を「 $\{e_{\pi(i)}, e_{\pi(i+1)}, \dots, e_{\pi(i+d-1)}\}$ の各辺に含まれる点の集合」とする (インデックスは mod n で計算し, $0 \leq i \leq n-1$ である).

ここで, d 本の辺を持つ部分グラフのアクセスコストを その部分グラフの頂点数で測る. するとアクセスコストの上限は $\max_i |V_i^{\pi,d}|$ で与えられる. このとき, $\max_i |V_i^{\pi,d}|=f$ となる辺の順序付けを (d,f) -cluttered ordering と呼ぶ.

完全二部グラフ $K_{3,3}$ の $(3,4)$ -cluttered ordering を図 3 に示す.

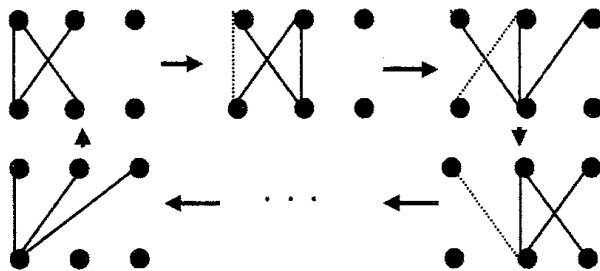


図 3. $K_{3,3}$ の $(3,4)$ -cluttered ordering

4. 二部グラフにおける Cluttered Ordering

完全グラフにおける cluttered ordering の構成法は Cohen 等 (文献[5]および[6]) によって与えられた. また, Steiner triple system での cluttered ordering の構成法は Cohen 等(文献[4])によって与えられた.

本稿では, 二次元 RAID に自然に対応するように, Mueller 等 (文献[8]) によって与えられた完全二部グラフの cluttered ordering の構成法について述べる. そのために, wrapped $\triangleleft$ -labelling と (d, f) -movement という 2 つの概念を導入する.

4.1. wrapped $\triangleleft$ -labelling

二部グラフ $H=(U, E)$ について $U=V \cup W$, $d=|E|$ とする. このとき, 写像 $\delta: U \rightarrow \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_2$ が以下の二つの条件を満たすとき, この写像 δ のことを H の $\triangleleft$ -labelling と呼ぶ.

- 1 : $\delta(V) \subset \mathbb{Z}_d \times \{0\}$, $\delta(W) \subset \mathbb{Z}_d \times \{1\}$ を満たす.
- 2 : $\mathbb{Z}_d$ の各要素が $\{\delta(v) - \delta(w) \mid v \in V, w \in W, (v, w) \in E\}$ に一つずつ存在する.

$\triangleleft$ -labelling δ は, 二部グラフ H の頂点を $\mathbb{Z}_d$ の各要素でラベル付けしている. 一般に, 頂点のラベル付けは, グラフをその部分グラフに分解するツールとしてよく知られている. グラフの分解の詳細については, 文献[1]を紹介する.

更に U の部分集合 X, Y に対し, $\mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_2$ において

$$\delta(Y) = \delta(X) + (k, 0), \quad \gcd(k, d) = 1$$

を満たす整数 k が存在するとき, この $\triangleleft$ -labelling δ のことを H の wrapped $\triangleleft$ -labelling と呼ぶ.

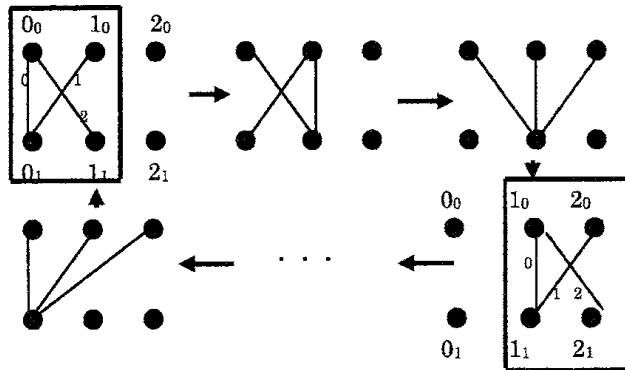


図 4. $K_{3,3}$ の wrapped $\triangleleft$ -labelling

4.2. (d, f) - movement

次に (d, f) - movement について述べる.

同型な二つの二部グラフ $H=(U, E)$, $H'=(U', E')$ について

$$U = V \cup W, U' = V' \cup W', |V| = |V'|, |W| = |W'|,$$

$$E = \{e_0, e_1, \dots, e_{d-1}\}, E' = \{e'_0, e'_1, \dots, e'_{d-1}\}$$

とする. また, $\{0, 1, \dots, d-1\}$ 上の置換 π を用いて, 完全二部グラフ G を

$$H_0 = H, H_i = (U_i, E_i), 1 \leq i \leq d$$

と, $d+1$ 個の部分グラフに分割する. 但し

$$E_i = (E_{i-1} \setminus \{e_{\pi(i-1)}\}) \cup \{e'_{\pi(i-1)}\}$$

U_i は E_i の各辺に含まれる頂点の集合とする. このとき, $H_d = H'$ となり, $\max_{0 \leq i \leq d} |U_i| = f$ ならば, π を H から H' への (d, f) -movement と呼ぶ.

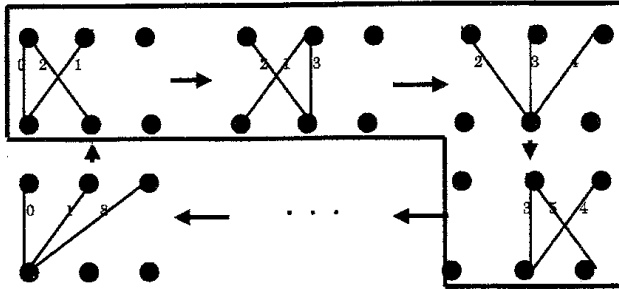


図 5. $(3,4)$ -movement

4.3. Cluttered Ordering の存在定理

wrapped $\triangleleft$ -labelling と (d, f) -movement を用いることにより, 完全二部グラフにおける (d, f) -cluttered ordering の存在に関して, 次の定理が得られる.

定理 1 (文献[8]). 同型な二部グラフ H, H' に対し, wrapped $\triangleleft$ -labelling と (d, f) -movement が存在するならば, 完全二部グラフ $K_{d,d}$ において (d, f) -cluttered ordering が存在する.

5. 完全二部グラフの Cluttered Ordering の構成

本章では, 自然数 h, t をパラメータとして, 次で与えられる特別な二部グラフ $H(h; t) = (U, E)$ について考察する.

まず頂点集合 $U = V \cup W$ を, 次のように 各 $h(t+1)$ 個の頂点を持つ 2 つの部分集合 V, W に分ける.

$$V := \{v_i \mid 0 \leq i < h(t+1)\},$$

$$W := \{w_i \mid 0 \leq i < h(t+1)\},$$

よって頂点の個数は $|U| = 2h(t+1)$ となる.

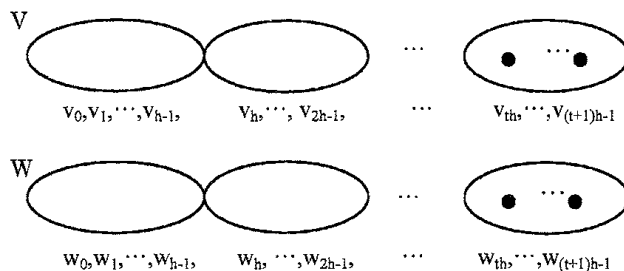


図 6. 二部グラフ $H(h; t)$ の頂点集合

次に辺集合を, 次のように t 個の部分集合 $E_s (0 \leq s < t)$ に分割する. 更に, 部分集合 E_s は, それぞれ, E_s', E_s'', E_s''' の 3 つの部分集合に分けられる.

$$E_s' := \{\{v_i, w_j\} \mid s \times h \leq i, j < s \times h + h\},$$

$$E_s'' := \{\{v_i, w_{h+j}\} \mid s \times h \leq j < s \times h + h\},$$

$$E_s''' := \{ \{v_{h+i}, w_j\} \mid s \times h \leq i \leq s \times h + h \},$$

$$E_s := E_s' \cup E_s'' \cup E_s''' \quad 0 \leq s < t$$

$$E := \bigcup_{0 \leq s < t-1} E_s$$

よって辺の本数は $|E| = t \times (h^2 + h(h+1)/2 + h(h+1)/2) = th(2h+1)$ となる. 下の図 7 は, $h=3$, $t=1$ の場合の二部グラフ $H(3;1)$ の辺集合の分割を表している.

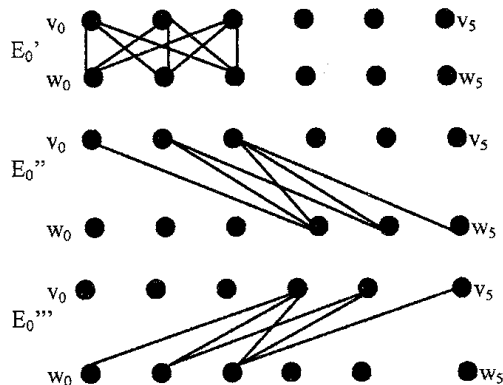


図 7. 二部グラフ $H(3;1)$ の辺集合の分割

ここで, 二部グラフ $H(h;t)$ に関して, 次の定理により (d,f) -movement の存在が保証される.

定理 2 (文献[8]). 自然数 h, t (但し $t \geq 2$) に対し, $d=h(2h+1)$, $f=4h$ とすれば, 二部グラフ $H(h;t)$ に関して E_0 から E_{t-1} への (d,f) -movement が存在する.

従って, $H(h;t)$ に関して, 同型な二部グラフへの wrapped $\triangleleft$ -labelling の構成法を与えれば, 定理 1 および定理 2 より, 対応する完全二部グラフにおける cluttered ordering が与えられる. このことより, 次の定理が得られる.

定理 3 (文献[8]). 自然数 h, t に対して, 二部グラフ $H(h;t)$ の任意の wrapped $\triangleleft$ -labelling から, 完全二部グラフ $K_{m,m}$ の (d,f) -cluttered ordering が得られる. このときのパラメータの値は, $m=th(2h+1)$, $d=h(2h+1)$, $f=4h$ となる.

Mueller 等 (文献[8]) は, $H(1;t) \cdot H(2;t) \cdot H(h;1)$ に対して, それぞれに同型な二部グラフへの wrapped $\triangleleft$ -labelling の構成法を与えた. 本稿では, $H(1;t) \cdot H(2;t)$ の wrapped $\triangleleft$ -labelling の構成法を紹介するとともに, さらに研究を発展させ, $H(3;t)$ に関して, 同型な二部グラフへの wrapped $\triangleleft$ -labelling の構成法を与える. また, 一般の $H(h;t)$ に関して予想を与える.

5.1. $H(1;t)$ の wrapped $\triangleleft$ -labelling の構成

本節では, 任意の自然数 t に対して, $H(1;t)$ の wrapped $\triangleleft$ -labelling の構成法を与える.

二部グラフ $H(1;t)=(U, E)$ は, $2(t+1)$ 個の頂点と $3t$ 本の辺を持つ. 自然数 t が与えられた時, 頂点集合 $U=V \cup W$ 上の写像 $\delta: U \rightarrow \mathbb{Z}_{3t} \times \mathbb{Z}_2$ を次のように定める.

$$\delta(v_i) = \begin{cases} (jt, 0) & 0 \leq j \leq t-1 \text{ の時} \\ (t^2+1, 0) & j=t \text{ の時} \end{cases}$$

$$\delta(w_i) = \begin{cases} (j(t-1), 1) & 0 \leq j \leq t-1 \text{ の時} \\ (t^2+1, 1) & j=t \text{ の時} \end{cases}$$

但し、写像 δ による像の第 1 成分は、 $\text{mod } 3t$ で計算された整数である。

ここで、上で定めた δ の差のリスト $\Delta(E)$ を計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Delta(\cup_{0 \leq s \leq t-1} E_j') &= \{jt-j(t-1) \mid 0 \leq j \leq t-1\} = (0, 1, 2, \dots, t-1), \\ \Delta(\cup_{0 \leq s \leq t-2} E_j'') &= \{jt-(j+1)(t-1) \mid 0 \leq j \leq t-2\} \\ &= (2t+1, 2t+2, \dots, 3t-1), \\ \Delta(\cup_{0 \leq s \leq t-2} E_j''') &= \{(j+1)t-j(t-1) \mid 0 \leq j \leq t-2\} \\ &= (t, t+1, \dots, 2t-2), \\ \Delta(E_{t-1}'' \cup E_{t-1}''') &= \{(t-1)t-(t^2+1), t^2+1-(t-1)^2\} = (2t-1, 2t), \\ \Delta(E) &= \Delta(\cup_{0 \leq s \leq t-1} E_j') \cup \Delta(\cup_{0 \leq s \leq t-2} E_j'') \\ &\quad \cup \Delta(\cup_{0 \leq s \leq t-2} E_j''') \cup \Delta(E_{t-1}'' \cup E_{t-1}''') \\ &= (0, 1, 2, \dots, 3t-1) \end{aligned}$$

以上のように、 Z_{3t} のすべての要素は、 $\Delta(E)$ にちょうど 1 度ずつ現れることがわかる。

また、任意の t に関して、 $k=t^2+1$ とおけば、 k は $3t$ と互いに素である。よって明らかに上で定めた写像 δ は、4.1 節で定めた wrapped $\triangleleft$ -labelling の条件を満たしている。従って、この写像 δ を $H(1;t)$ の wrapped $\triangleleft$ -labelling と定めれば、定理 3 を適用することにより、次の結果が得られる。

定理 4 (文献[8]). 任意の自然数 t に対し、パラメータの値が $d=3$, $f=4$ となるような完全二部グラフ $K_{3t,3t}$ の (d,f) -cluttered ordering が存在する。

定理 5 (文献[8]). 任意の自然数 t に対し、パラメータの値が $d=3s+r$, $f=2(s+1)+r$ ($s>0$, $r=0, 1, 2$) となるような完全二部グラフ $K_{3t,3t}$ の (d,f) -cluttered ordering が存在する。

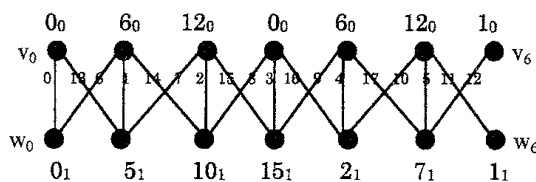


図 8. $H(1;6)$, $|E|=18$, $|V|=12$, $k=1$ の wrapped $\triangleleft$ -labelling

5.2. $H(2;t)$ の wrapped $\triangleleft$ -labelling の構成

本節では、任意の自然数 t に対して、 $H(2;t)$ の wrapped $\triangleleft$ -labelling の構成法を与える。

二部グラフ $H(2;t)=(U, E)$ は、 $4(t+1)$ 個の頂点と $10t$ 本の辺を持つ。自然数 t が与えられた時、labelling δ は、頂点集合 $U=V \cup W$ 上の写像 $\delta: U \rightarrow Z_{10t} \times Z_2$ である。

上部の頂点集合 $V=\{v_0, v_1, \dots, v_{2t+1}\}$ を写像 δ によって写した像 $(x, 0)$ の第一成分 x は、

下記のような $2t+2$ 個の整数の数列になるとする.

$$c_0, c_0+a, c_1, c_1+a, \dots, c_j, c_j+a, \dots, c_{t-1}, c_{t-1}+a, c_0+k, c_0+k+a$$

同様に, 下部の頂点集合 $W=\{w_0, w_1, \dots, w_{2t+1}\}$ を写像 δ によって写した像の第一成分は, 下記のような $2t+2$ 個の整数の数列になるとする.

$$d_0, d_0+b, d_1, d_1+b, \dots, d_j, d_j+b, \dots, d_{t-1}, d_{t-1}+b, d_0+k, d_0+k+b$$

ここで, a, b, c_j, d_j, k の値を,

$$a:=6t-1, \quad c_j:=2jt, \quad (j=0, 1, \dots, t-1)$$

$$b:=6t-2, \quad d_j:=2j(t-1), \quad (j=0, 1, \dots, t-1)$$

$$k:=2t^2+1$$

と定める. すると Z_{10t} のすべての要素は, $\Delta(E)$ にちょうど 1 度ずつ現れる(文献[8]). よってこの写像 δ は wrapped $\angle$ -labelling の条件を満たしている. 従って, この写像 δ を $H(2;t)$ の wrapped $\angle$ -labelling と定めれば, 定理 3 を適用することにより, 次の結果が得られる.

定理 6 (文献[8]). 任意の自然数 t に対して, パラメータの値が $d=10, f=8$ となるような完全二部グラフ $K_{10t,10t}$ の (d,f) -cluttered ordering が存在する.

定理 7 (文献[8]). 任意の自然数 t に対して, パラメータの値が $d=10s+r, f=4(s+1)+\min(r, 4)$ ($s>0, r=0, 1, 2, \dots, 9$) となるような完全二部グラフ $K_{10t,10t}$ の (d,f) -cluttered ordering が存在する.

定理 7 より, $K_{30,30}$ の cluttered ordering として, $(30, 16)$ -cluttered ordering を得ることができる. これは, 定理 5 で得られる $(30, 22)$ -cluttered ordering よりも「良い」cluttered ordering である.

5.3. $H(3;t)$ の cluttered ordering の構成

本節では, 任意の自然数 t に対して, $H(3;t)$ の wrapped $\angle$ -labelling の構成法を与える.

二部グラフ $H(3;t)=(U, E)$ は, $6(t+1)$ 個の頂点と $21t$ 本の辺を持つ. 自然数 t が与えられた時, labelling δ は, 頂点集合 $U=V \cup W$ 上の写像 $\delta:U \rightarrow Z_{21t} \times Z_2$ である.

上部の頂点集合 $V=\{v_0, v_1, \dots, v_{3t+2}\}$ を写像 δ によって写した像 $(x, 0)$ の第一成分 x は, 下記のような $3t+3$ 個の整数の数列になるとする.

$$c_0, c_0+a, c_0+2a, c_1, c_1+a, c_1+2a, \dots, c_j, c_j+a, c_j+2a, \dots, \\ c_{t-1}, c_{t-1}+a, c_{t-1}+2a, c_0+k, c_0+k+a, c_0+k+2a$$

同様に, 下部の頂点集合 $W=\{w_0, w_1, \dots, w_{3t+2}\}$ を写像 δ によって写した像の第一成分は, 下記のような $3t+3$ 個の整数の数列になるとする.

$$d_0, d_0+b, d_0+2b, d_1, d_1+b, d_1+2b, \dots, d_j, d_j+b, d_j+2b, \dots, \\ d_{t-1}, d_{t-1}+b, d_{t-1}+2b, d_0+k, d_0+k+b, d_0+k+2b$$

ここで, $a, b, c_0, c_j, d_0, d_j, k$ の値を,

$$a:=15t-1, \quad c_0:=0, \quad c_j:=3jt, \quad (j=1, 2, \dots, t-1)$$

$$b:=15t-2, \quad d_0:=0, \quad d_j:=3j(t-1) \quad (j=1, 2, \dots, t-1)$$

$$k:=3t^2+1$$

と定める.

ここで $\Delta(E)$ を計算すると下記のようになる.

$$\Delta(E_0') = (c_0-d_0, c_0-d_0+(a-b), c_0-d_0+(2a-2b), c_0-d_0+a, c_0-d_0+2a, c_0-d_0-b, c_0-d_0-2b, c_0-d_0+(2a-b), c_0-d_0+(a-2b))$$

$$= (0, 1, 2, 15t-1, 9t-2, 6t+2, 12t+4, 15t, 6t+3)$$

$$\Delta(E_j') = (c_j-d_j, c_j-d_j+(a-b), c_j-d_j+(2a-2b), c_j-d_j+a, c_j-d_j+2a, c_j-d_j-b, c_j-d_j-2b, c_j-d_j+(2a-b), c_j-d_j+(a-2b))$$

$$= (3j, 3j+1, 3j+2, 3j+15t-1, 3j+9t-2, 3j+6t+2, 3j+12t+4, 3j+15t, 3j+6t+3)$$

各 j の値は $1, 2, \dots, t-1$

$$\Delta(E_{j-1}'') = (c_{j-1}-d_j, c_{j-1}-d_j+a, c_{j-1}-d_j+2a, c_{j-1}-d_j+(a-b), c_{j-1}-d_j+(2a-b), c_{j-1}-d_j+(2a-2b))$$

$$= (3j+18t, 3j+12t-1, 3j+6t-2, 3j+18t+1, 3j+12t, 3j+18t+2)$$

各 j の値は $1, 2, \dots, t-1$

$$\Delta(E_{j-1}''') = (c_j-d_{j-1}, c_j-d_{j-1}-b, c_j-d_{j-1}-2b, c_j-d_{j-1}+(a-b), c_j-d_{j-1}+(a-2b), c_j-d_{j-1}+(2a-2b))$$

$$= (3j+3t-3, 3j+9t-1, 3j+15t+1, 3j+3t-2, 3j+9t, 3j+3t-1)$$

各 j の値は $1, 2, \dots, t-1$

$$\Delta(E_{t-1}''') = (c_{t-1}-d_0-k, c_{t-1}-d_0+(a-k), c_{t-1}-d_0+(2a-k), c_{t-1}-d_0+(a-b-k), c_{t-1}-d_0+(2a-b-k), c_{t-1}-d_0+(2a-2b-k))$$

$$= (18t-1, 12t-2, 6t-3, 18t, 12t-1, 18t+1)$$

$$\Delta(E_{t-1}''') = (c_0+k-d_{t-1}, c_0+k-d_{t-1}-b, c_0+k-d_{t-1}-2b, c_0+a+k-d_{t-1}-b, c_0+a+k-d_{t-1}-2b, c_0+2a+k-d_{t-1}-2b)$$

$$= (6t-2, 12t, 18t+2, 6t-1, 12t+1, 6t)$$

また, 上記の $\Delta(E)$ に各 j の値を代入してまとめると,

$$(1) \Delta(E_0') \text{ より, } (0, 1, 2)$$

$$(2) \Delta(E_j') \text{ より, } \{3j, 3j+1, 3j+2 \mid j=1, 2, \dots, t-1\} = (3, \dots, 3t-1)$$

$$(3) \Delta(E_{j-1}''') \text{ より, } \{3j+3t-3, 3j+3t-2, 3j+3t-1 \mid j=1, \dots, t-1\} = (3t, \dots, 6t-4)$$

となり, 以下同様に

$$(4) (6t-3, 6t-2, 6t-1, 6t)$$

$$(5) \{3j+6t+3, 3j+6t-2, 3j+6t+2 \mid j=1, \dots, t-1\} \cup \{6t+2, 6t+3, 9t-2\} = (6t+1, \dots, 9t)$$

$$(6) \{3j+9t, 3j+9t-2, 3j+9t-1 \mid j=1, \dots, t-1\} = (9t+1, \dots, 12t-3)$$

$$(7) (12t-2, 12t-1, 12t, 12t+1)$$

$$(8) \{3j+12t, 3j+12t+4, 3j+12t-1 \mid j=1, \dots, t-1\} \cup \{12t+4, 15t-1, 15t\} = (12t+2, \dots, 15t+1)$$

$$(9) \{3j+15t, 3j+15t+1, 3j+15t-1 \mid j=1, \dots, t-1\} = (15t+2, \dots, 18t-2)$$

$$(10) (18t-1, 18t, 18t+1, 18t+2)$$

$$(11) \{3j+18t, 3j+18t+1, 3j+18t+2 \mid j=1, \dots, t-1\} = (18t+3, \dots, 21t-1)$$

となる. 上記のように Z_{21t} のすべての要素は, $\Delta(E)$ にちょうど 1 度ずつ現れることがわかる.

また, 任意の t に関して $k=3t^2+1$ は $21t$ と互いに素である. よって明らかに写像 δ は

wrapped Δ -labelling の条件を満たしている. 従って, この写像 δ を $H(3;t)$ の wrapped Δ -labelling と定め, 定理 3 を適用することにより, 次の結果が得られる.

定理 8. 任意の自然数 t に対して, パラメータの値が $d=2t$, $f=12$ となるような完全二部グラフ $K_{2t,2t}$ の (d,f) -cluttered ordering が存在する.

定理 9. 任意の自然数 t に対して, パラメータの値が $d=2ts+r$, $f=6(s+1)+\min(r, 6)$ ($s>0$, $r=0, 1, 2, \dots, 20$) となるような完全二部グラフ $K_{2ts+r,2ts+r}$ の (d,f) -cluttered ordering が存在する.

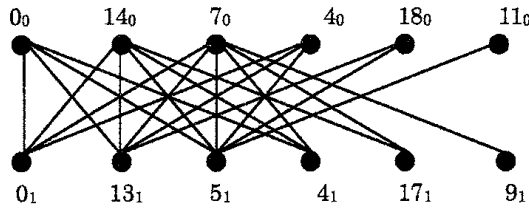


図 9. $H(3;1)$, $|E|=21$, $|V|=12$, $k=4$ の wrapped Δ -labelling

5.4. $H(h;t)$ の wrapped Δ -labelling の構成

本節では, 任意の自然数 h, t に対して, $H(h;t)$ の wrapped Δ -labelling の構成法を与える. 二部グラフ $H(h;t)=(U,E)$ は, $2h(t+1)$ 個の頂点と $th(2h+1)$ 本の辺を持つ. 自然数 h, t が与えられた時, labelling δ は, 頂点集合 $U = V \cup W$ 上の写像 $\delta: U \rightarrow \mathbb{Z}_{th(2h+1)} \times \mathbb{Z}_2$ である.

上部の頂点集合 $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{h(t+1)-1}\}$ を写像 δ によって写した像の第 1 成分は, 下記のような $h(t+1)$ 個の整数の数列になるとする.

$$\begin{aligned} & c_0, c_0 + a, c_0 + 2a, \dots, c_0 + (h-1)a, c_1, c_1 + a, c_1 + 2a, \dots, c_1 + (h-1)a, \dots, \\ & c_j, c_j + a, c_j + 2a, \dots, c_j + (h-1)a, \dots, c_{t-1}, c_{t-1} + a, c_{t-1} + 2a, \dots, c_{t-1} + (h-1)a, \\ & c_0 + \kappa, c_0 + a + \kappa, c_0 + 2a + \kappa, \dots, c_0 + (h-1)a + \kappa \end{aligned}$$

同様に, 下部の頂点集合 $W = \{w_0, w_1, \dots, w_{h(t+1)-1}\}$ を写像 δ によって写した像の第 1 成分は, 下記のような $h(t+1)$ 個の整数の数列になるとする.

$$\begin{aligned} & d_0, d_0 + b, d_0 + 2b, \dots, d_0 + (h-1)b, d_1, d_1 + b, d_1 + 2b, \dots, d_1 + (h-1)b, \dots, \\ & d_j, d_j + b, d_j + 2b, \dots, d_j + (h-1)b, \dots, d_{t-1}, d_{t-1} + b, d_{t-1} + 2b, \dots, d_{t-1} + (h-1)b, \\ & d_0 + \kappa, d_0 + b + \kappa, d_0 + 2b + \kappa, \dots, d_0 + (h-1)b + \kappa \end{aligned}$$

ここで, a, b, c_j, d_j, κ の値を,

$$\begin{aligned} a &:= h(2h-1)t-1, & a_j &:= hjt, & j &= 0, 1, 2, \dots, t-1, \\ b &:= h(2h-1)t-2, & d_j &:= hj(t-1), & j &= 0, 1, 2, \dots, t-1, \\ \kappa &:= ht^2+1 \end{aligned}$$

と定める.

この写像 δ が, 4.1 節で定めた wrapped Δ -labelling の条件を満たしていることはまだ証明できていないが, この写像 δ を $H(h;t)$ の wrapped Δ -labelling の候補とみなそう. 定理 3 を適用することにより, 次の結果が得られる.

予想 1. 任意の自然数 t に対して, パラメータの値が $d=th(2h+1)$, $f=2h(t+1)$ となるような完全二部グラフ $K_{th(2h+1),th(2h+1)}$ の (d,f) -cluttered ordering が存在する.

予想 2. 任意の自然数 h, t に対して, $l = th(2h+1)$ とおくと, 完全二部グラフ $K_{th(2h+1), th(2h+1)}$ の (d, f) -cluttered ordering が存在する. このとき, パラメータの値は $d = th(2h+1) + r = l + r, f = 2h(t+1) + \min(r, 2h)$ (r は $0 \leq r < h(2h+1)$ を満たす自然数) となる.

6. おわりに

いくつかの完全二部グラフの系列について, wrapped $\angle$ -labelling を構成し, 最適な cluttered ordering を探索してきた.

一般の完全二部グラフや 多次元 RAID の最適な cluttered ordering を探索するのが今後の課題である.

文献

- [1] J. Bosak, *Decompositions of Graphs*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- [2] Y. Chee, C. Colbourn, and A. Ling, Asymptotically optimal erasure-resilient codes for large disk arrays, *Discrete Applied Mathematics*, vol.102, Issues 1– 2, pp.3– 36, 2000.
- [3] P. Chen, E. Lee, G. Gibson, R. Katz and D. Patterson, RAID: High-performance, reliable secondary storage, *ACM Computing Surveys*, vol.26, pp.145– 185, 1994.
- [4] M. Cohen and C. Colbourn, Optimal and Pessimal Orderings of Steiner Triple Systems in Disk Arrays, *Theoretical Computer Science*, vol.297, Issues 1– 3, pp.103– 117, 2003.
- [5] M. Cohen and C. Colbourn, Ladder orderings of pairs and RAID performance, *Discrete Applied Mathematics*, vol.138, no.29, pp.35– 46, 2004.
- [6] M. Cohen, C. Colbourn, and D. Froncek, Cluttered orderings for the complete graph, *COCOON 2001: Lect. Notes Comp. Sci.* 2108, pp.420– 431, Springer Verlag, 2001.
- [7] L. Hellerstein, G. Gibson, R. Karp, R. Katz and D. Patterson, Coding techniques for handling failures in large disk arrays, *Algorithmica*, vol.12, pp.182– 208, 1994.
- [8] M. Mueller, T. Adachi, and M. Jimbo, Cluttered orderings for the Complete Bipartite Graph, *Discrete Applied Mathematics*, in press.