

絶対単調数列に関する性質

京大数理研

一松 信

"

荒木 不二洋

問題. 数列 a_n , $n=0, 1, \dots$ が与えられたとき,

$$a_{0,n} = a_n, \quad a_{m,n} = a_{m-1,n} - a_{m-1,n+1} \quad (m > 0)$$

とおく. もしすべての $a_{m,n} \geq 0$ ならば (このとき a_n は 絶対単調数列 という) $a_2 a_0 \geq a_1^2$ である.

これは Voronovskaja 女史の函数近似理論¹⁾中の一定理である. この証明は案外難しい ($m, n \leq 2$ だけの条件では成立しない). 自由討論の折に一松が提出し, 荒木が下記のような証明を与えた.

定理 絶対単調数列 a_n の必要十分条件は, $[0, 1]$ 上のある(正の)測度 μ に対して, $a_n = \int x^n d\mu(x)$ となることである.

これがわかれば, $a_2 a_0 \geq a_1^2$ は Schwarz の不等式の一例にすぎない. この定理は実は Hausdorff の定理²⁾として既知のものであるが, 下記の証明は比較的平易なので, 紹介したい.

補助定理 1. 上記の数列に対して, $a_r = \sum_{h=0}^{N-r} \binom{N-r}{h} a_{h, N-h}$
($N \geq r$)

$N=r$ で成立. 而とは N に関する帰納法 (= 項係数の性質を利用) で示される.

補助定理 2. $x \in \mathbb{R}$ に対し, $F_N(x)$ を下記のように定義すると, 単調非減少である.

$$F_N(x) = 0 \quad x < 0 \text{ のとき}$$

$$F_N(x) = \sum_{k=0}^n \binom{N}{k} a_{N-k, k} \quad \frac{n}{N} \leq x < \frac{n+1}{N} \text{ のとき}$$

$$F_N(x) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} a_{N-k, k} = a_0 \quad x \geq 1 \text{ のとき.}$$

補助定理 3 $N \geq r \geq 1$ とし, $f_N^r(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) を下記のよう定義する.

$$f_N^0(x) = 1 ;$$

$$f_N^r(x) = \begin{cases} \frac{Nx(Nx-1)\cdots(Nx-r+1)}{N(N-1)\cdots(N-r+1)} & \frac{r-1}{N} \leq x \leq 1 \text{ のとき} \\ 0 & \frac{r-1}{N} > x \text{ のとき;} \\ 1 & x \geq 1 \text{ のとき.} \end{cases}$$

このとき, $N \geq r$ ならば

$$\int f_N^r(x) dF_N(x) = a_r$$

証明. $r=0$ のときは明らか. $r \geq 1$ ならば, この積分は $F_N(x)$ の不連続点での和だが, $x = \frac{k}{N}$, $k \leq r$ ならば $f_N^r(x) = 0$

$$f_N^r\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{\binom{N-r}{N-k}}{\binom{N}{N-k}}, \quad k \geq r \text{ だから}$$

$$\text{積分} = \sum_{k=r}^N \binom{N-r}{N-k} a_{N-k, k} = \sum_{k=0}^{N-r} \binom{N-r}{k} a_{k, N-k} = a_r.$$

補助定理4 上記の記号で $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_N^r(x) - x^r| = 0 \quad (r \geq 1)$

証明. $\frac{r-1}{N} \leq x \leq 1$ では $f_N^r(x) \leq x^r$ なので, $0 \leq x \leq \frac{r-1}{N}$ での差の sup は $2\varepsilon^r$ 以下です, $\varepsilon \leq x \leq 1$ での sup は

$$x^r \left| \frac{(1-1/N\varepsilon) - \dots - (1-(r-1)/N\varepsilon)}{(1-1/N) - \dots - (1-(r-1)/N)} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

と示す, これは $N \rightarrow \infty$

のとき 0 に収束する.

さらにすると, $N \rightarrow \infty$ のとき

$$\left| a_r - \int x^r dF_N^r(x) \right| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_N^r(x) - x^r| \int dF_N^r(x) \rightarrow 0$$

であって,

$$a_r = \lim_{N \rightarrow \infty} \int x^r dF_N(x)$$

である. ($r=0$ のときも正しい).

$[0, 1]$ 上の連続関数は多項式で一樣に近似されるから, これから, 測度 μ ($C([0, 1])$ 上の正の線型汎関数)

$$\mu(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int f(x) dF_N(x)$$

の存在がたしかめられる.

参考文献

- [1] E.V.Voronovskaja, The functional method and its applications, (英訳) Trans. of Math. Mono. 28, A.M.S., 1970
- [2] F.Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen, Math. Z. 9 (1921). 74-109; ibid. 280-289.