

氏 名	石 原 徹 いし はら とおる
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	論 理 博 第 615 号
学位授与の日付	昭 和 53 年 5 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学位論文題目	A mapping of Riemannian manifolds which preserves harmonic functions (リーマン多様体の間の調和関数を保存する写像)

論文調査委員 (主 査) 教 授 戸 田 宏 教 授 永 田 雅 宜 教 授 楠 幸 男

論 文 内 容 の 要 旨

Constantinescu-Cornea は、リーマン面の間の解析写像の一般化として、調和空間の調和写像という概念を導入した。一方、微分幾何学では、Eells-Sampson にしたがって、リーマン多様体の間の調和写像はエネルギー積分の停留点となる写像として定義される。これらを区別するため、前者を調和関数を保存する写像、後者を単に調和写像とよぶことにする。リーマン多様体は、その上の通常の調和関数を考えることによって、調和空間となり、それらの間の調和関数を保存する写像が考えられる。

申請者石原徹が本論文でめざしたのは、リーマン多様体の間の調和関数を保存する写像を特徴づけることであり、次の主定理がえられた。

リーマン多様体 M, N の間の写像 $f: M \rightarrow N$ が調和関数を保つために必要十分な条件は、 M のリーマン計量を適当に共形変換するとき、 f が調和なリーマン submersion となることである。

ここで、調和なリーマン submersion はラプラシアンと可換な写像に外ならないことが、Watson や参考論文 4 によって示されている。申請者は、このことや、局所的には十分多くの調和関数が存在するという補題を用いて、主定理を証明した。

さらに、申請者は、写像が劣調和関数を保存することと調和関数を保存することは同値であること、測地的凸関数を保存する写像は全体的に測地的であること、等をも証明している。

M と N の次元が等しいとする。その次元が 2 でありかつ可符号の場合には M, N に自然な複素構造が入って、調和関数を保存する写像 f は正則写像となるのであるが、次元が 3 以上のときには、自明でない f は homothety を除いてリーマン被覆であることが証明される。これは、Constantinescu-Cornea の意味の調和写像は、解析写像の一般化とは考えられないことを示すものである。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

申請者石原徹は、Constantinescu-Cornea の導入した調和写像を、微分幾何学で通例用いられる、Eells-

Sampson の意味の調和写像と区別するため、調和関数を保存する写像とよび、それをリーマン多様体の上において特徴づけることを試みて次の結果をえた。即ち、リーマン多様体の間の調和関数を保存する写像は、リーマン計量の適当な共形変換によって調和なリーマン submersion となる写像として特徴づけられる。

特に、次元の等しい多様体の間の調和関数を保つ写像は、次元が3以上のときは、homothety を除いて、リーマン被覆となり、Constantinescu-Cornea の意味の調和写像は解析写像の一般化としての意義が失われることが示された。

申請者は、このほか、劣調和関数や測地的凸関数を保存する写像についても研究し、同様な結果をえている。また、参考論文は、いずれもリーマン多様体の間の写像に関するものであり、参考論文4においては、ラプラシアンと可換な写像は調和なリーマン submersion に外ならないことが証明され、本論文において有効に用いられている。

以上の様な、申請者の研究業績は、リーマン多様体の上で、調和関数を保存する写像の性質を十分明らかにしたものとして、その方面の研究能力の大きさを示すに十分なものである。

よって、本論文は理学博士の学位を授与する価値のあるものと認める。