

NDK における自然な証明についての考察

京産大理学部 八杉 満利子 (Mariko Yasugi)
京産大理学研究科 中田 昌宏 (Masahiro Nakata)

本稿は、[1] および [3] で提案された一階の古典論理の体系 NDK における自然な証明についての報告である。体系 NDK のひとつの特徴は、証明の短さにある。その状況は [3] で述べている。

大芝は、[2] において自動証明により得られた証明から、人にとって自然な証明への変換を与えた。これは、cut-free proof から、自然な場合分けによる証明を（元の証明の構造を保存するように）生成するものである。

また NDK においては、critical な推論と呼ばれる不自然な推論が行なわれることがある。そこで、大芝の着想にもとずく変換により、このような推論を持つ deduction を自然な deduction へ変換することを目的とする。

1 The system of NDK

構成的論理 NJ の古典論理への 1 つの拡張として NDK を定義する。 $A, B, \dots$ で formula を、 $\Gamma, \Delta, \dots$ で formula 又は空なものを表す。また、deduction を表す記号として、 $P_1, P_2, \dots$ を用いる。

1.1 Disjunctive component

formula A の disjunctive component(d.c.) を次で定義する。

1. A が atomic のとき、 A の d.c. は A 自身
2. A が $B \wedge C, B \supset C, \neg B, \forall x B, \exists x B$ のとき、 A の d.c. は A 自身
3. A が $B \vee C$ のとき、 A の d.c. は B の d.c. 及び C の d.c. 及び A 自身

1.2 Inference rule

NDK の推論規則を、次で与える。（ I は introduction を、 E は elimination を表す。）NDK では前提となる formula の d.c. の 1 つに推論規則を適用することができる。

$$\frac{\frac{\Gamma \vee A \vee \Delta \quad \Gamma \vee B \vee \Delta}{\Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta} \wedge I \quad \frac{\Gamma \vee (A_1 \wedge A_2) \vee \Delta}{\Gamma \vee A_i \vee \Delta} \wedge E \quad (i = 1, 2)$$

$$\frac{\Gamma \vee A_i \vee \Delta}{\Gamma \vee (A_1 \vee A_2) \vee \Delta} \vee I \quad (i = 1, 2)$$

$$\frac{\Gamma \vee (A \vee B) \vee \Delta \quad \begin{array}{c} [A : a] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B : b] \\ \vdots \\ C \end{array}}{\Gamma \vee C \vee \Delta} (a, b) - \vee E$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A : a] \\ \vdots \\ \Gamma \vee B \vee \Delta \end{array}}{\Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta} (a) - \supset I \quad \frac{\Gamma \vee A \vee \Delta \quad \Pi \vee (A \supset B) \vee \Lambda}{\Gamma \vee \Pi \vee B \vee \Delta \vee \Lambda} \supset E$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A : a] \\ \vdots \\ \Gamma \vee \Delta \end{array}}{\Gamma \vee \neg A \vee \Delta} (a) - \neg I \quad \frac{\Gamma \vee A \vee \Delta \quad \Pi \vee \neg A \vee \Lambda}{\Gamma \vee \Pi \vee \Delta \vee \Lambda} \neg E$$

$$\frac{\Gamma \vee A \vee \Delta}{\Gamma \vee \forall x A \vee \Delta} \forall I \quad \frac{\Gamma \vee \forall x A \vee \Delta}{\Gamma \vee A[t/x] \vee \Delta} \forall E$$

(*eigenvariable condition*)

$$\frac{\Gamma \vee A[t] \vee \Delta}{\Gamma \vee \exists x A \vee \Delta} \exists I \quad \frac{\Gamma \vee \exists x A \vee \Delta \quad \begin{array}{c} [A : a] \\ \vdots \\ B \end{array}}{\Gamma \vee B \vee \Delta} (a) - \exists E$$

(*eigenvariable condition*)

特に $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ の全てが空ではない推論を classical な推論と呼ぶ。更に空な前提から任意の formula を導く contradiction rule を加える。

$$\frac{\vdots}{A} \text{Con}$$

この空な前提は classical でない推論 $\neg E$ によってのみ得られる。

1.3 Eigenvariable

NJ, NK と同様に、推論 $\forall I, \exists E$ は次の eigenvariable condition を満たす。
 $\forall I$ において、 x は assumption 及び Γ, Δ に自由に現れない。 $\exists E$ において、 x は $[A : a]$ 以外 B への deduction の assumption 及び B に自由に現れない。

2 Comparing NDK with NK

本節では、NDK と NK が論理的に同等となることを見る。NK は NDK の部分体系であることは明らかである。(排中律は $\neg I$ を用いて演繹できる。) 以下で、NDK が NK の部分体系となることを見る。

2.1 Lemma

NK において $A \vee B$ 及び $\neg A$ がそれぞれ assumption の有限集合 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ から演繹されるとき、 B を $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ より排中律を用いずに演繹することができる。

[証明]

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{A}_1 \\ \vdots \\ A \vee B \end{array} \quad \frac{[A : 1] \quad \begin{array}{c} \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \neg A \end{array}}{B} \quad [B : 2]}{B} (1, 2)$$

2.2 Theorem

NDK は NK の部分体系である。

[証明] NDK-deduction P の最後の推論 I に関する帰納法で示す。

I が $\wedge I$ のとき、 P は

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vee A \vee \Delta \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vee B \vee \Delta \end{array}}{\Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta}$$

と表すことができ、これは NK において次のようにできる。

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vee A \vee \Delta \end{array} \quad \begin{array}{c} [\Gamma \vee \Delta : 1] \\ \vdots \\ \Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta \end{array} \quad Q}{\Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta} (1, 3)$$

ただし Q は次の deduction である。

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vee B \vee \Delta \end{array} \quad \begin{array}{c} [\Gamma \vee \Delta : 2] \\ \vdots \\ \Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} [A : 3] \quad [B : 4] \\ A \wedge B \\ \vdots \\ \Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta \end{array}}{\Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta} \quad (2,4)$$

I が $\wedge E$ のとき、 P は

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vee (A_1 \wedge A_2) \vee \Delta \end{array}}{\Gamma \vee A_i \vee \Delta} \quad (i = 1, 2)$$

と表すことができ、これは NK において次のようにできる。

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vee (A_1 \wedge A_2) \vee \Delta \end{array} \quad \begin{array}{c} [\Gamma \vee \Delta : 1] \\ \vdots \\ \Gamma \vee \Delta \vee (A_1 \wedge A_2) \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} [A_1 \wedge A_2 : 2] \\ A_i \\ \vdots \\ \Gamma \vee A_i \vee \Delta \end{array}}{\Gamma \vee A_i \vee \Delta} \quad (1,2)$$

I が $\vee E$ のとき、 P は

$$\frac{\begin{array}{c} [A : 1] \quad [B : 2] \\ \vdots \\ \Gamma \vee (A \vee B) \vee \Delta \end{array} \quad \begin{array}{c} C \\ \vdots \\ \Gamma \vee C \vee \Delta \end{array}}{\Gamma \vee C \vee \Delta} \quad (1,2)$$

と表すことができ、これは NK において次のようにできる。

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vee (A_1 \vee A_2) \vee \Delta \end{array} \quad \begin{array}{c} [\Gamma \vee \Delta : 3] \\ \vdots \\ \Gamma \vee \Delta \vee (A_1 \vee A_2) \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} [A : 1] \quad [B : 2] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [A \vee B : 4] \\ \vdots \\ \Gamma \vee C \vee \Delta \end{array}}{\Gamma \vee C \vee \Delta} \quad (1,2)$$

$$\frac{\Gamma \vee \Delta \vee (A_1 \vee A_2) \quad \Gamma \vee C \vee \Delta}{\Gamma \vee C \vee \Delta} \quad (3,4)$$

I が以上の外で $\supset, \neg I, \forall I$ 以外のおきも同様に行なう。

I が $\neg I$ のとき、 P は

$$\frac{[A : 1] \quad \vdots \quad \Gamma \vee \Delta}{\Gamma \vee \neg A \vee \Delta} (1)$$

と表すことができ、これはNKにおいて排中律を用いることにより次のようにできる。

$$\frac{\begin{array}{c} [A : 1] \\ \vdots \\ \Gamma \vee \Delta \end{array} \quad \begin{array}{c} [\neg A : 2] \\ \vdots \\ \Gamma \vee \neg A \vee \Delta \end{array}}{\Gamma \vee \neg A \vee \Delta} \frac{A \vee \neg A \quad \Gamma \vee \neg A \vee \Delta \quad \Gamma \vee \neg A \vee \Delta}{\Gamma \vee \neg A \vee \Delta} (1, 2)$$

I が $\supset I$ のとき、 P は

$$\frac{[A : 1] \quad \vdots \quad \Gamma \vee B \vee \Delta}{\Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta} (1)$$

と表すことができ、これはNKにおいてLemma 2.1と排中律を用いることにより次のようにできる。

$$\frac{\begin{array}{c} [\Delta : 2] \\ \vdots \\ \Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} [\Gamma : 4] \\ \vdots \\ \Gamma \vee \neg \Gamma \quad \Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta \quad \Pi \end{array}}{\Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta} (4, 5)}{\Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta} (2, 3)$$

ここで Π は次の deduction である。

$$\begin{array}{c} [A : 1] \\ \vdots \\ \Gamma \vee B \vee \Delta \quad [\neg \Gamma : 5] \\ \vdots \\ B \vee \Delta \quad [\neg \Delta : 3] \\ \vdots \\ \frac{B}{A \supset B} (1) \\ \vdots \\ \Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta \end{array}$$

I が $\forall I$ のときも同様に行なう。

2.3 Remark

Theorem 2.2 の証明において、classical な $I, \neg I, \forall I$ の場合にたいする排中律の使用は本質的である。なぜなら、これらからは、排中律（又は排中律と同値な命題）を演繹することができる。それ以外の場合には、変形は NJ の推論で行われる。

3 Critical inference

本節では、5 節以降の為の準備として、NDK-deduction に関するいくつかの定義を与える。

3.1 Predecessor

$C(X)$ で X を含む component を表す。推論 I に関して d.c. A と d.c. B が次の関係のいずれかを満たすとき、 B は A の predecessor であるという。

1. I が前提が 1 つの推論のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee C(X) \vee \Delta}{\Gamma \vee C(Y) \vee \Delta} I$$

のとき、

- (a) I が $\forall I$ で、 B が I で新しく導入される component のとき、 B は predecessor を持たない
- (b) I が $\neg I$ で、 B が新しく導入される component のとき、 B は predecessor を持たない
- (c) (a), (b) のいずれでもないとき、
 - i. A が $C(X)$ で B が $C(Y)$
 - ii. A, B はそれぞれ前提、結論の Γ (又は Δ) の同じ位置にある component

2. I が $\wedge I$ のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee C(X) \vee \Delta \quad \Gamma \vee C(Y) \vee \Delta}{\Gamma \vee C(X \wedge Y) \vee \Delta} I$$

のとき、

- (a) A が $C(X)$ 又は $C(Y)$ で B が $C(X \wedge Y)$
 (b) A, B はそれぞれ前提、結論の Γ (又は Δ) の同じ位置にある component

3. I が $\supset E$ のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee X \vee \Delta \quad \Pi \vee X \supset Y \vee \Lambda}{\Gamma \vee \Pi \vee Y \vee \Delta \vee \Lambda} I$$

のとき、

- (a) A が $X \supset Y$ で B が Y
 (b) A, B はそれぞれ前提、結論の $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ の同じ位置にある component。 (但し、 B が Γ と Π に重なるとき、 A は B の Γ に対する component 又は Π に対する component となる。 B が Δ と Λ に重なるときも同様。)

4. I が $\neg E$ のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee X \vee \Delta \quad \Pi \vee \neg X \vee \Lambda}{\Gamma \vee \Pi \vee \Delta \vee \Lambda} I$$

のとき、3.(b) と同様に定義する。

5. I が $\vee E$ のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee (X \vee Y) \vee \Delta \quad \begin{array}{c} [X] \\ \vdots \\ D \end{array} \quad \begin{array}{c} [Y] \\ \vdots \\ D \end{array}}{\Gamma \vee D \vee \Delta} I$$

のとき、

- (a) A, B はそれぞれ前提、結論の Γ (又は Δ) の同じ位置にある component、もしくはそれぞれ前提、結論の D である。
 (b) A が主前提の $X \vee Y$ の X 、 B がこの推論 I で discharge される assumption の X 。 A が Y のときも同様。
 (c) B が Γ と D と Δ の2つ以上と重なるとき、 A は3.(b) と同様に定義する。

6. I が $\exists E$ のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee \exists x F \vee \Delta \quad \begin{array}{c} [F] \\ \vdots \\ D \end{array}}{\Gamma \vee D \vee \Delta} I$$

のとき、

- (a) A, B はそれぞれ前提、結論の Γ (又は Δ) の同じ位置にある component、もしくはそれぞれ前提、結論の D である。
- (b) A が主前提の $\exists x F$ 、 B がこの推論 I で discharge される assumption の F
- (c) B が Γ と D と Δ の 2 つ以上と重なるとき、 A は 3.(b) と同様に定義する。

predecessor を持たない formula を、initial という。

3.2 String and Path

formula A から始まる predecessor の列を、 A の string という。最後の formula が initial である string を、path という。また deduction の path を、その deduction の結論から始まる path と定める。

3.3 Ancestor and Desendant

C の string で D を含むものがあるとき、 C は D の desendant、 D は C の ancestor であるという。

3.4 Irrelevant and Essential component

d.c. C が irrelevant であるとは、この C の ancestor の中に $\forall I$ で導入される formula があるときをいう。irrelevant でない d.c. を essential と呼ぶ。

3.5 Critical inference

irrelevant component に作用する推論 $\supset, \forall I$ を critical という。

4 The system of NDKE

4.1 Negative dual pair

negative dual pair (n.d.p.) を帰納的に定義する。([2] を参照。)

1. formula A に対して、 $(A, \neg A)$ は n.d.p.
2. formula A に対して、 $(\neg A, A)$ は n.d.p.
3. $(E_i, F_i) (i = 1, 2)$ が n.d.p. のとき、 $(E_1 \wedge E_2, F_1 \vee F_2)$ は n.d.p.
4. $(E_i, F_i) (i = 1, 2)$ が n.d.p. のとき、 $(E_1 \vee E_2, F_1 \wedge F_2)$ は n.d.p.

5. (E, F) が n.d.p. のとき、 $(\forall xE, \exists xF)$ は n.d.p.

6. (E, F) が n.d.p. のとき、 $(\exists xE, \forall xF)$ は n.d.p.

(E, F) が n.d.p. のとき、 E, F はそれぞれ F, E の negative dual であるという。

4.2 Excluded middle type axiom

(E, F) が n.d.p. のとき、 $E \vee F$ を排中律型公理という ([2] を参照。)

4.3 NDKE and NKE

NDK, NK に排中律型公理を加えてできる体系をそれぞれ NDKE, NKE と呼ぶ。NDKE, NKE に対しても 3.1 から 3.6 と同様の定義を与えることができる。

4.4 Rank

NDKE-deduction P にたいして、 β を P の path とするとき、 γ_β で β に沿った critical な推論の数を表し、 P の rank を

$$\text{rank}(P) = \sum_{\beta: \text{path}} \gamma_\beta$$

で定める。

5 Natural reasoning

前節で定義した critical な推論が不自然な推論であり、そのような推論はどのように解釈すれば正当化できるかを、例をもって見ていく。

NDK-deduction

$$\frac{\frac{[A : 1]}{\exists xA} \vee I \quad \frac{[D]}{\exists xA \vee D}}{\frac{\exists xA \vee (C \wedge D)}{\exists xA \vee (A \supset C \wedge D)} (1) - \supset I}$$

について考える。この deduction において、 $[A : 1]$ は $\exists xA$ を導く為の assumption であるが、 $\exists xA$ とは無関係に $\vee I$ で導入された formula C から演繹される $C \wedge D$ にたいして作用している。

この deduction は次の様に考えることができる。

1. A が真ならば、 $\exists xA$ は真

2. A が偽ならば、 C, D の真偽に関係なく $A \supset C \wedge D$ は真

この推論 1、2 を deduction の形で表すと、

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A:3] \quad [\neg A:4]}{\frac{C \quad [D]}{C \wedge D} \quad (3)} \\
 \frac{[A:2] \quad \exists x A}{\exists x A \vee (A \supset C \wedge D)} \quad \frac{\exists x A \vee (A \supset C \wedge D) \quad \exists x A \vee (A \supset C \wedge D)}{\exists x A \vee (A \supset C \wedge D)} \quad (2,4)
 \end{array}$$

となる。

こうしてみると、classical な $\supset, \neg I, \forall I$ 以外の推論は自然であると考えることができる。

ここで、NDKE から classical な $\supset, \neg I, \forall I$ を除いて得られる体系を NDKE* とする。このとき、classical な推論をもつ (NDK-)deduction を NDKE*-deduction へ、なるべくもとの構造を変えない様に変換するアルゴリズムがあり、これを次節で与える。

6 Transformations towards natural reasoning

本節では、(5 節で考察した) NDK-deduction から不自然な推論 (classical な $\supset, \neg I, \forall I$) を除くアルゴリズムを与える。(詳細は [3] の 7 節と 8 節参照。)

critical でない $\supset, \forall I$ を除くには、Theorem 2.2 の証明で用いた変換を行なえば良い。

残されたのは、critical な $\supset, \forall I$ を除くことである。それには次の 6.1 から 6.3 で与えられる変換を行なえば良い。

6.1

P を $\Gamma \vee G \vee \Delta$ (G は irrelevant) への NDKE-deduction とするとき、

1. まず P から G の path を取り除く。
2. これにより、 G の ancestor に適用する critical な $\supset, \forall I$ により discharge される assumption の集合を $\mathcal{A}$ とすると、 $\mathcal{A}$ の元は open assumption である。
3. 1 で得られる図から無駄を除いて、deduction にする。

4. $\mathcal{A}$ の元の conjunction $E \equiv \bigwedge\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$ の universal closure E' を、3 で得られた deduction の open assumption $A \in \mathcal{A}$ の上に次の様に結合させ、得られた deduction を P' とする。

$$\frac{\frac{E'}{E} \quad \forall E}{\vdots} \wedge E$$

この P' に対して、 $\text{rank}(P') < \text{rank}(P)$ が成り立つ。

6.2

P を $\Gamma \vee G \vee \Delta$ (G は irrelevant) への NDKE-deduction とするとき、

1. 6.1.2 における $A \in \mathcal{A}$ に対して、 A が discharge される推論の前提の formula を G_A とする。
2. $A \in \mathcal{A}$ に対して、次の deduction を P_A とする。

$$\frac{[A : a] \quad [\neg A]}{G_A} \vdots G$$

3. 6.1.4 における E に対して、 E の negative dual F を $F \equiv \bigvee\{\neg A \mid A \in \mathcal{A}\}$ とする。よって F と P_A を用いて、 F から G への deduction P_G^F を作ることができる。
4. 次の deduction を P'' とする。(但し、 F' は F の existential closure)

$$\frac{\frac{F'}{\vdots} \quad P_G^F}{G}$$

こうして得られた P'' は、critical な推論をもたず、結論の G は irrelevant でない。

6.3

途中で $\Gamma \vee G \vee \Delta$ (G は irrelevant) の現れる、formula H への deduction P_H を考える。 $\Gamma \vee G \vee \Delta$ への subdeduction P で、 $\text{rank}(P) > 0$ となるような一番大きいものをとる。これを P_G としよう。

1. 6.1 より、次の様な deduction P'_G を得る

$$\begin{array}{c} [E'] \\ \vdots \\ \Gamma \vee \Delta \end{array}$$

P'_G から P_H の一部をコピーして次の deduction P_H^1 を得る。

$$\begin{array}{c} [E'] \\ \vdots \\ \frac{\Gamma \vee \Delta}{\Gamma \vee G \vee \Delta} \# \\ \vdots \\ H \end{array}$$

P_G の取り方から、上の P_H^1 の $\#$ より下における G の desendant には、 $\supset I$ の適用がない。ゆえに、 $\text{rank}(P_H^1) < \text{rank}(P_H)$ 、よって P_H^1 は NDKE*-deduction P_H^{1*} に変形できる。

2. 6.1 より、次の様な deduction P''_G を得る

$$\begin{array}{c} [F'] \\ \vdots \\ G \end{array}$$

P''_G より、 $\vee I$ を用いて次の deduction P_H^2 を得る。

$$\begin{array}{c} [F'] \\ \vdots \\ G \\ \vdots \\ \Gamma \vee G \vee \Delta \\ \vdots \\ H \end{array}$$

このとき、 $\text{rank}(P_H^2) < \text{rank}(P_H)$ となり、 P_H^2 は NDKE*-deduction P_H^{2*} に変形できる。

3. 次の deduction を P_H^* とする。

$$\frac{\begin{array}{c} [E'] \\ \vdots \\ P_H^{1*} \\ \vdots \\ H \end{array} \quad \begin{array}{c} [F'] \\ \vdots \\ P_H^{2*} \\ \vdots \\ H \end{array}}{E' \vee F' \quad H} H$$

この P_H^* は我々の求めるものであり、critical な推論をもたない。

6.4 Remark

essential component に適用された classical な $\neg I, \forall - I$ については、Theorem 2.2 の変形を適用する。

6.5 例

ここで2つの例をあげる。

(1) P :

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A(b) : 1]}{A(b) \vee A(c)} \vee I \\
 \frac{A(b) \vee A(c)}{A(b) \vee (A(b) \supset A(c))} (1) \\
 \frac{A(b) \vee (A(b) \supset A(c))}{(A(a) \supset A(b)) \vee (A(b) \supset A(c))} \\
 \frac{(A(a) \supset A(b)) \vee (A(b) \supset A(c))}{(A(a) \supset A(b)) \vee \forall y (A(b) \supset A(y))} \\
 \frac{(A(a) \supset A(b)) \vee \forall y (A(b) \supset A(y))}{(A(a) \supset A(b)) \vee \exists x \forall y (A(x) \supset A(y))} \\
 \frac{\forall y (A(a) \supset A(y)) \vee \exists x \forall y (A(x) \supset A(y))}{\exists x \forall y (A(x) \supset A(y)) \vee \exists x \forall y (A(x) \supset A(y))} \\
 \frac{\exists x \forall y (A(x) \supset A(y)) \vee \exists x \forall y (A(x) \supset A(y))}{\exists x \forall y (A(x) \supset A(y))} \text{Contraction}
 \end{array}$$

$P^1 \equiv P^{1*}$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\forall z A(z) : 1]}{P(b)} \\
 \frac{P(b)}{A(a) \supset A(b)} \\
 \vdots \\
 \exists x \forall y (A(x) \supset A(y))
 \end{array}$$

$P^2 \equiv P^{2*}$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg A(b) : 2] \quad [A(b) : 3]}{A(c)} \\
 \frac{A(c)}{A(b) \supset A(c)} (3) \\
 \vdots \\
 \frac{[\exists z \neg A(z) : 4] \quad \exists x \forall y (A(x) \supset A(y))}{\exists x \forall y (A(x) \supset A(y))} (2)
 \end{array}$$

P^* :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[\forall z A(z) : 1]}{\vdots P^{1*}} \quad \frac{[\exists z \neg A(z) : 4]}{\vdots P^{2*}}}{\forall z A(z) \vee \exists z \neg A(z)} \quad \frac{\exists x \forall y (A(x) \supset A(y)) \quad \exists x \forall y (A(x) \supset A(y))}{\exists x \forall y (A(x) \supset A(y))} (1, 4)
 \end{array}$$

(2) P :

$$\frac{\frac{[\forall x(F(x) \vee C)]}{F(x) \vee C}}{\forall x F(x) \vee C}$$

P^* :

$$\frac{C \vee \neg C \quad \frac{[C : 2]}{\forall x F(x) \vee C} \quad \frac{\frac{[\forall x(F(x) \vee C)]}{F(x) \vee C} \quad \frac{F(x)}{\forall x F(x)} \quad \frac{[\neg C : 1]}{\forall x F(x) \vee C}}{\forall x F(x) \vee C} (2, 1)$$

参考文献

- [1] M. Yasugi and K. Ryu, *NDK, A New Classical System*, The Bull. of the Inst. of Computer Science of Kyoto Sangyo Univ., vol.11(1994), 1-25.
- [2] 大芝 猛, 自動証明における自然な証明生成への一つの近接, 情報処理学会論文誌, 第35 卷 (1994), 222-231.
- [3] M. Yasugi and M.Nakata, *NDK and Natural Reasoning*, MS(1996), submitted.