

裏返し変換の一般化について

名大 理学部 寺西 鎮男

記号

$$n, m, d_i \in \mathbb{N}, \quad m > d_1,$$

$$\underline{d} = (d_1, \dots, d_r) \quad \sum_{i=1}^r d_i = n.$$

$$\underline{d}^* = (m-n, d_r, d_{r-1}, \dots, d_2)$$

$$GL(\underline{d}, n) = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} d_1 \\ \hline d_1 \end{array} & * \\ \hline 0 & \begin{array}{c} d_r \\ \hline d_r \end{array} \end{array} \right\} \cap GL(n, \mathbb{C})$$

群 G の m -次元ベクトル空間への表現を $(G, \rho, V(m))$ とする。

Lemma

$(G \times GL(\underline{d}, n), \rho \otimes \square, V(m) \otimes V(n))$ が、概均質ベクトル空間 $\iff$

$(G \times GL(\underline{d}^*, m-d_1), \rho^* \otimes \square^*, V(m) \otimes V(m-d_1)^*)$ が、概均質ベクトル空間.

証明. $V(n)^*$ の base を 1 つ fix して. $u_1, \dots, u_n$ とする.

$$V(m) \otimes V(n)^* \ni x \quad \text{に} \quad x = \sum_{i=1}^n v_i \otimes u_i \quad \text{と表}$$

わす. 他の表わし方: $x = \sum v_i' \otimes u_i'$

但し. $GL(d, n) \ni A = (a_{ij})$ により.

$$u_i = \sum_j a_{ij} u_j'$$

$$x = \sum_i v_i \otimes u_i$$

$$= \sum_i \left(\sum_j a_{ij} v_j \right) \otimes u_i'$$

$$\therefore v_i' = \sum_j a_{ij} v_j$$

Def. $\left(\bigoplus_{i=1}^{d_1} v_i, \bigoplus_{i=1}^{d_1+d_2} v_i, \dots, \bigoplus_{i=1}^{d_1+\dots+d_r} v_i \right) \in M(x)$ で表わす.

Def. Vector space の 組 の 形 の 旗 多 様 体 $F(d_1, \dots, d_r)$ を

$$F(d_1, \dots, d_r) = \left\{ V_1 \subset \dots \subset V_r \subset V(m) \mid \dim V_i = d_1 + \dots + d_i \right\}$$

として 定め る. 上の 字 像 $M(x)$ により.

$$M: V(m) \otimes V(n)^* \longrightarrow F(\underline{d}) \quad \text{は Zariski open}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & M(x) \end{array}$$

が x に 対 し て well-defined である. $M(V(m) \otimes V(n)^*)$ の

Zariski closure は $F(\underline{d})$ に 一致 する.

(かも. $M(x)$ の 作り 方 によ り. $M^T M(x)$ の 上 に. $GL(d, n)$ は

transitive に 作用 する. 従 っ て.

$$V(m) \otimes V(n)^* \text{ が } P.V$$

$$\Leftrightarrow (G, F(\underline{d})) \text{ が open orbit を 持つ.}$$

$W_i \stackrel{\text{def}}{=} \{ v^* \in V^*(m) \mid v^*(V_{n-i+1}) = 0 \}$ と定義する。

$$\{w_1, \dots, w_n\} \in F(\underline{d}^*)$$

明かには、

$(G, F(\underline{d}))$ が open orbit を持つ。

$\Leftrightarrow (G, F^*(\underline{d}^*))$ が open orbit を持つ

$\Leftrightarrow (G \times GL(\underline{d}^*), p^* \otimes \square^*, V^*(m) \otimes V(m-d_1)^*)$ が p.v.

g.e. d //

* 上の lemma 2: $r=1$ の時が 裏返し変換に外ならない。

H. Weyl の Classical groups によれば、

$$S(V(m) \otimes V^*(n)) \xrightarrow{G \times GL(\underline{d}, n)} S(x^1 \wedge \dots \wedge x^{d_1}, x^1 \wedge \dots \wedge x^{d_1+d_2}, \dots, x^1 \wedge \dots \wedge x^{d_1+\dots+d_n})$$

$$x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i) \quad (1 \leq i \leq n)$$

変数。

(Weyl. classical groups. p. 47)

よって、 $S(x^1 \wedge \dots \wedge x^{d_1}, x^1 \wedge \dots \wedge x^{d_1+d_2}, \dots, x^1 \wedge \dots \wedge x^{d_1+\dots+d_n})$ は

小行列式座標

$$\left| \begin{array}{cc} x_{i_1}^1 & \dots & x_{i_1}^{d_1} \\ x_{i_2}^1 & \dots & x_{i_2}^{d_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{i_{d_1}}^1 & \dots & x_{i_{d_1}}^{d_1} \end{array} \right|, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{d_1} \leq n$$

$$\left| \begin{array}{cc} x_{j_1}^1 & \dots & x_{j_1}^{d_1+d_2} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{j_{d_1+d_2}}^1 & \dots & x_{j_{d_1+d_2}}^{d_1+d_2} \end{array} \right| \quad i_1 < i_2 < \dots$$

の 多項式全体を表現する事にする。

変換による 相対不変式 の対応

旗多様体 $F(d)$ の coordinate に, dual coordinate を対応させる写像 $*$ であれば, 写像

$$* : \mathbb{C}[F(d)] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[F^*(d^*)]$$

が定義されるが, $(G \times GL(d^*, m-d), \rho^* \otimes \rho^*, V^*(m) \otimes V^*(m-d))$

の 相対不変式 は $(G \times GL(d, n), \rho \otimes \rho^*, V(m) \otimes V(n)^*)$

の 相対不変式 を $*$ でうつす (たまたま) である.

$\underline{i}_d = (i_1, \dots, i_d) \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq m)$ に対し,

$$x_{\underline{i}_d} = \begin{vmatrix} x_{i_1}^1 & \dots & x_{i_1}^d \\ \vdots & & \vdots \\ x_{i_d}^1 & \dots & x_{i_d}^d \end{vmatrix}$$

$$S^{l_1, \dots, l_m} = \left\{ \begin{array}{l} x_{\underline{i}_d} \text{ 座の 多項式 で 各 } d \text{ について, 次数 } l_d \\ \text{次全体} \end{array} \right\}$$

とすれば, $S^{l_1, \dots, l_m}$ は $GL(m)$ -module τ , highest weight

$\sum_{i=1}^m l_i \Lambda_i$ に対応する. 既約な $GL(m)$ -module τ がある.

$$\mathbb{C}[x^1, \dots, x^m] = \bigoplus_{\underline{l}} S^{\underline{l}} \quad \underline{l} = (l_1, \dots, l_m)$$

で $\mathbb{C}[x^1, \dots, x^m]$ の $S^{\underline{l}}$ への projection を $\pi_{\underline{l}}$ とすれば:

かつ $(G \times GL(d, n), \rho \otimes \rho^*, V(m) \otimes V(n)^*)$ の 相対不変式 の時, $\pi_{\underline{l}}(f)$ も 相対不変式 である.

例. $M(n, m; \mathbb{C})$ $n \times m$ 行列全体 特に $M(n, n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C})$

と置く. $\text{Tri}_F(n, \mathbb{C}) = \{ n \times n, \text{下三角行列全体} \}$

$\text{Tri}_U(n, \mathbb{C}) = \{ n \times n, \text{上三角行列全体} \}$

$\text{Tri}_F(n, \mathbb{C}) \times \text{Tri}_U(n, \mathbb{C}) \ni M_n(\mathbb{C})$ への作用を ~~定義~~

作用させる. $g = (a, b) \quad (a \in \text{Tri}_F(n, \mathbb{C}), b \in \text{Tri}_U(n, \mathbb{C}))$

$x \in M(n, \mathbb{C})$ とする時 $g \cdot x = a x b^{-1}$. 良く知られている

ように これは、根拠均質ベクトル空間 $(\mathbb{C})$ である.

Lemma により

$(\text{Tri}_U(n, \mathbb{C}) \times \text{Tri}_U(n-1, \mathbb{C}), M(n, n-1))$ は 根拠均

質ベクトル空間. (但し, 作用は, $a \in \text{Tri}_U(n, \mathbb{C}), b \in \text{Tri}_U(n-1, \mathbb{C})$)

$x \in M(n, n-1)$ の時 $(a, b) \cdot x = a x b^{-1}$)

$(\text{Tri}_F(n, \mathbb{C}) \times \text{Tri}_U(n, \mathbb{C}), M_n(\mathbb{C}))$ の 相対不変式 は

$$P_1(x) = x_1^1 \quad P_2(x) = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix} \quad \dots \quad P_n = \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

だから, 対応する $(\text{Tri}_U(n, \mathbb{C}) \times \text{Tri}_U(n-1, \mathbb{C}), M(n, n-1, \mathbb{C}))$

の 相対不変式 は

$$Q_1(y) = \begin{vmatrix} y_2^1 & \dots & y_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^1 & \dots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad Q_2(y) = \begin{vmatrix} y_3^1 & \dots & y_3^{n-2} \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^1 & \dots & y_n^{n-2} \end{vmatrix} \quad \dots \quad Q_{n-1}(y) = y_n^1$$

となる.

例. $V = M(n, m, \mathbb{C}), (n > m). \quad G = O(n, \mathbb{C}) \times \text{Tri}_L(m, \mathbb{C}).$

G の V への作用 $\varepsilon. \quad G \ni (a, b), \quad (a, b) \cdot x = a x b^{-1} \quad x \in M(n, m, \mathbb{C})$

により定義すれば, これは概均質ベクトル空間, 従って

Lemma により $\tilde{V} = M(n, n-1), \quad \tilde{G} = O(n, \mathbb{C}) \times GL(n-m, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m-1})$

(但し, $GL(n-m, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m-1}) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline \circ & \end{array} \right) \cap GL(n-1)$ で群の作用

$\varepsilon \quad (a, b) \in O(n, \mathbb{C}) \times GL(n-m, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m-1}), \quad x \in M(n, n-1)$ のとき,

$(a, b) \cdot x = a x b^{-1}$ により定義する.)

は概均質ベクトル空間である.

(V, G) の相対不変式も対応する.