

On the Robustness of Some Multivariate Test Procedures

南山大 經濟 伊藤 孝 一

§ 1. 序

女個、上度量母算因、確齊へ、ト、

$$\underset{\sim}{x}'_t = [x_{1t} \ x_{2t} \ \dots \ x_{pt}] \quad t = 1, 2, \dots, k \quad (1.1)$$

の命題則は n の ε - δ 条件より、特異点 γ に対し、
1 次、2 次、3 次、4 次の ε - δ 条件は n と $n+1$ 次との間に
5 個の ε - δ 条件がある。

$$E(z_t) = \mu_t \quad (1.2)$$

$$E(\underline{z}_t - \underline{\mu}_t)(\underline{z}_t - \underline{\mu}_t)' = \underline{\Sigma}_t \quad (1.3)$$

$$E(x_{it} - \mu_{it})(x_{jt} - \mu_{jt})(x_{kt} - \mu_{kt}) = \kappa_{ijk}^{(t)} \quad (1.4)$$

$$E(x_{i,t} - \mu_{i,t})(x_{j,t} - \mu_{j,t})(x_{\ell,t} - \mu_{\ell,t})(x_{m,t} - \mu_{m,t}) \\ = \kappa_{ijklm}^{(t)} + \sigma_{ij}^{(t)} \sigma_{\ell m}^{(t)} + \sigma_{i\ell}^{(t)} \sigma_{jm}^{(t)} + \sigma_{im}^{(t)} \sigma_{j\ell}^{(t)} \quad (1.5)$$

$\Rightarrow$ 1, x_{it} , p_{it} は $n \times n \times T$ の x_t , p_t の要素として
 $\Sigma_t = (\sigma_{ij}^{(t)})$ は $p \times p$ の正定対称行列で、 n
 の要素は T へは有限, また $k_{ijl}^{(t)}$, $k_{ijl}^{(t)m}$, $i, j, l, m = 1, \dots$

2. ... k , は $x_{t\alpha}$ の n_t 個の観測値, t 次の実験の結果を表し, t は有限の範囲 $1, 2, \dots, k$ をとり, k 組の母集団から抽出した n_t 個の $x_{t\alpha}$, $t=1, 2, \dots, k$, の無作為標本の N 個の互に独立な確率ベクトル

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{t\alpha}' &= [x_{t\alpha} \ x_{t\alpha} \ \dots \ x_{pt\alpha}], \\ t &= 1, 2, \dots, k; \quad \alpha = 1, 2, \dots, N_t \end{aligned} \quad (1.6)$$

により表わす。こゝに, $N = \sum_{t=1}^k N_t$, N_t は (i) $x_{t\alpha}$ と $x_{s\beta}$ は $t \neq s$ 或は $\alpha \neq \beta$ のとき互に独立であり, (ii) t は一定に 1 であるとき, $x_{t\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, N_t$, は互に独立に同一の分布に従う, 2. 1 ~ 4 次の実験結果は (1.2) ~ (1.5) により表わす。

こゝに k 組の k 変量母集団の平均ベクトルに關する帰無假説

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (1.7)$$

を対立假説

$$H_1: (1.7) \text{ の等式の少なくとも一つが成立しない}$$

に對して検定する。こゝに, 母集団の分布が正規分布である, かつ分散共分散行列が等しいと仮定の下に導く Hotelling の T_0^2 検定, $x_{t\alpha}$ の変換は

$$\{ T_0^2: T_0^2 > T_{0\alpha}^2(p, k-1, N-k) \} \quad (1.8)$$

であり (Hotelling [3])。こゝに, $\bar{x}_t = \sum_{\alpha=1}^{N_t} x_{t\alpha} / N_t$, $\bar{x} = \sum_{t=1}^k r_t \bar{x}_t$, $r_t = N_t / N$, $S_t = \sum_{\alpha=1}^{N_t} (x_{t\alpha} - \bar{x}_t)(x_{t\alpha} - \bar{x}_t)'$

$$1/n_t, n_t = N_t^{-1}, Q_B = \sum_{t=1}^k N_t (\bar{x}_t - \bar{x})(\bar{x}_t - \bar{x})', \underline{S}_0 = \sum_{t=1}^k n_t \underline{S}_t / (N-k) \quad \text{と } 1) \text{ と } 2),$$

$$T_0^2 = t_k Q_B \underline{S}_0^{-1} \quad (1.9)$$

であり, $T_0^2(p, k-1, N-k)$ は統計量 T_0^2 の H_0 の下に k 個の標本分布, 上方 $100\alpha\%$ 点と表わす. 又, 母集団 k 個の $1)$ と $2)$ の仮定, 下に k 個の Wilks の大序比検定が $100\alpha\%$ の棄却域は

$$\{W : W < W(\alpha)\} \quad (1.10)$$

であり (Wilks [8]). 又, 又,

$$W = |(N-k) \underline{S}_0| / |Q_B + (N-k) \underline{S}_0| \quad (1.11)$$

であり, $W(\alpha)$ は統計量 W の H_0 の下に k 個の標本分布の下方 $100\alpha\%$ 点と表わす. 又, 母集団 k 個の $1)$ の仮定, 下に k 個の James の T_r^2 検定が $100\alpha\%$ の棄却域は

$$\{T_r^2(k) : T_r^2(k) > T_{r\alpha}^2(k)\} \quad (1.12)$$

であり (James [6]). 又, 又, $\underline{w}_t = (\underline{S}_t / N_t)^{-1}$, $\underline{w} = \sum_{t=1}^k \underline{w}_t$, $\hat{\bar{x}} = \underline{w}^{-1} \sum_{t=1}^k \underline{w}_t \bar{x}_t$ と $1)$ と $2)$,

$$T_r^2(k) = \sum_{t=1}^k (\bar{x}_t - \hat{\bar{x}})' \underline{w}_t (\bar{x}_t - \hat{\bar{x}}) \quad (1.13)$$

であり, 又, $T_{r\alpha}^2(k)$ は統計量 $T_r^2(k)$ の H_0 の下に k 個の標本分布の上方 $100\alpha\%$ 点と表わす.

次に, $k=1$ の場合, 母集団 k 個の $1)$ の仮定, 下に k 個の James の T_r^2 検定が $100\alpha\%$ の棄却域は

$$\{ \lambda_3 : \lambda_3 < \lambda_3(\alpha) \} \quad (1.19)$$

なるが、

$$\lambda_3 = |\tilde{V}|^{\frac{N}{2}} / (n \tilde{V}/p)^{\frac{1}{2}pN} \quad (1.20)$$

なるが、 $\lambda_3(\alpha)$ は統計量 λ_3 の H_0 の下に $1-\alpha$ の標準分布
 の下に $100\alpha\%$ 差を占める。つまり、(1.16) に於ける λ_3 の
 比較値 λ_3 の α の棄却域は

$$\{ \lambda_4 : \lambda_4 < \lambda_4(\alpha) \} \quad (1.21)$$

なるが、

$$\lambda_4 = |\tilde{V}|^{\frac{N}{2}} / \prod_{g=1}^2 |\tilde{V}_{g3}|^{\frac{N}{2}} \quad (1.22)$$

なるが、

$$\tilde{V}(p \times p) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{11} & \cdots & \tilde{V}_{12} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{V}_{21} & \cdots & \tilde{V}_{22} \\ k_1 & \cdots & k_2 \end{bmatrix}$$

なるが、 $\lambda_4(\alpha)$ は統計量 λ_4 の H_0 の下に $1-\alpha$ の標準分布の下
 に $100\alpha\%$ 差を占める。

各個の母集団の場合、帰無仮説

$$H_0: \tilde{\Sigma}_1 = \tilde{\Sigma}_2 = \cdots = \tilde{\Sigma}_K \quad (1.23)$$

を仮定する。このとき、正規分布の仮定の下に $1-\alpha$ の標準分布
 の下に $100\alpha\%$ の棄却域は

$$\{ \lambda_5 : \lambda_5 < \lambda_5(\alpha) \} \quad (1.24)$$

$$v_t = \frac{V_t}{N_t}, \quad V = \sum_{t=1}^T (v_t V_t) \quad \text{and} \quad \gamma_0 = 1,$$

$$\chi^2 = \sum_{t=1}^N \frac{1}{\pi} \left| \frac{V_t}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \right|^2 \quad (1.25)$$

22, $\lambda_5(x)$ は、誤差量 λ_5 , H_{05} の下 100% の標準偏差, 下 100% の差を意味する。

以上述べた可分ベクトル空間或は可分群の可分性に関する種々の仮説検証のための標準的仮定の下に与えられた検証法が、可分群や可分群列の仮定、成立しないこと、或は正規可分群の仮定、成立しないこと、如何なる影響を及ぼすかに依り、主としてその標準の立場から次の以下に検討を要するものがある。

3.

§ 2. $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{10}{2}$ n Behrens - Fisher 问题

$k = 2 \sim \infty$, $2 \rightarrow \infty$ 集団の分析に $N(\mu_1, \Sigma_1)$, $N(\mu_2, \Sigma_2)$ と仮定する $\Rightarrow$ $\Sigma_1 = 0 \Sigma_2$ (但し, 0 は既知の k の $k-1$) と仮定する $\Rightarrow$, (1.7) の H_0 と検定する問題は多量量の Behrens - Fisher 問題 (ある). $\Rightarrow$ k に対する Σ は k による正確な検定法を求めた $\Rightarrow$ k に対する Σ .

∴ 2, $N_1 \leq N_2$ 2 167 庄 2 ~, $p \times N = 2981$

$$\tilde{Y}(p \times N) = \tilde{X}_1(p \times N_1) \cdot \tilde{A}(N_1 \times N) - \tilde{X}_2(p \times N_2) \cdot \tilde{B}(N_2 \times N) \quad (2.1)$$

$$x_1 = [x_{11}, \dots, x_{1N_1}]^T, \quad x_2 = [x_{21}, \dots, x_{2N_2}]^T$$

$x \in N_2$ である, A, B は定数要素 γ の $N_1 \times N_1, N_2 \times N_2$ の行列である, c の要素 c は N の適当な母数である, したがって

$$E(\underline{y}_r) = \underline{\mu} = \mu_1 - \mu_2 \quad (2.2)$$

$$E(\underline{y}_r - \underline{\mu})(\underline{y}_s - \underline{\mu})' = \Delta_{rs} \Sigma \quad (2.3)$$

である, r は $1, 2, \dots, N$ の値をとり, Δ_{rs} は r と s の相関係数, Σ は $p \times p$ の正定対称行列である. H_0 は

$$H_0^*: \underline{\mu} = 0 \quad (2.4)$$

と同様である, $\bar{\underline{y}} = \sum_{r=1}^N \underline{y}_r / N$, $\underline{S} = \sum_{r=1}^N (\underline{y}_r - \bar{\underline{y}})(\underline{y}_r - \bar{\underline{y}})' / n$, $n = N-1$, である, H_0^* の検定 T の大抵の検定統計量は

$$\{T_s^2 : T_s^2 > T_{\alpha}^2(n)\} \quad (2.5)$$

である, T_s^2 は

$$T_s^2 = N \bar{\underline{y}}' \underline{S}^{-1} \bar{\underline{y}} \quad (2.6)$$

である, H_0^* の T の検定統計量 T_s^2 は自由度 n の一般化 Student T^2 分布に従う, $T_{\alpha}^2(n)$ は n の $100 - \alpha\%$ の百分点である. したがって, 式 (2.2), (2.3) の式は

$$A' \underline{e}(N_1) = \underline{e}(N), \quad B' \underline{e}(N_2) = \underline{e}(N) \quad (2.7)$$

$$A'A = c_1 I(N), \quad B'B = c_2 I(N) \quad (2.8)$$

$$\Sigma = c_1 \Sigma_1 + c_2 \Sigma_2 \quad (2.9)$$

と同等であることが証明される。すなわち、 $L(L)$ の必要
 条件は $L \times 1$ の形に与えられる、 $L(L)$ は $L \times L$ の
 単位行列である、 c_1, c_2 は定数。従って、(2.7), (2.8)
 を満足する $N_1 \times N_1, N_2 \times N_2$ の行列 A, B によって、

$$N \leq N_1 \leq N_2 \quad (2.10)$$

$$c_1 \geq N/N_1, \quad c_2 \geq N/N_2 \quad (2.11)$$

が成立する。したがって、(2.10), (2.11) を満
 足する N, c_1, c_2 の値を与えることは、(2.7), (2.8)
 の解である、 A, B が与えられる、これを用いて、検査
 法 (2.5) が導かれる。すなわち、検査法の条件は D
 と γ である、要即ち (2.5) の検査関数 N の単調増加関数
 、 c_1, c_2 の単調減少関数であることが証明される。すなわち、 D
 の中で最も強い検査法は

$$N = N_1 \leq N_2 \quad (2.12)$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = N_1/N_2 \quad (2.13)$$

を満足するものである。この場合、(2.7), (2.8) の解の一
 つは、 $A = (a_{\alpha\gamma}), B = (b_{\beta\gamma})$ と $\gamma = 1, 2, \dots, N_1$ とする、

$$a_{\alpha\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}, \quad \alpha, \gamma = 1, 2, \dots, N_1,$$

$$b_{\beta\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{N_1} (N_1/N_2)^{\frac{1}{2}} - (1/(N_1 N_2))^{\frac{1}{2}} + (1/N_2), & \beta \leq N_1, \\ \frac{1}{N_2}, & N_1 < \beta \leq N_2, \gamma = 1, 2, \dots, N_1 \end{cases} \quad (2.14)$$

に於て、 ν である。

以上の方法で、一変量の場合の Scheffé の方法 (Scheffé [7]) に拡張したものがあつて、特別解 (2.14) の Bennett [2] に於て、 ν である。この検定問題に於いて、 $\Sigma_1 = 0, \Sigma_2$ の検定に於いて、多変量 (1.8) に用いて、 ν が $\nu/2$ 、二変量検定量 T_0^2 の自由度 $(N_1 + N_2 - 2)$ の一般化として Student T^2 分布に近しい。上に於ける D の中で、最も多変量 (2.5) の二変量に用いて、この検出力は当然低くなるが、 $N_1 = N_2$ が成り立つ場合には、検出力は低下が割合少なくて、数値計算によつて確かめられる (Ito [4])。

次に、多変量の Behrens-Fisher 問題に於いて、(1.8) の ν (1.12) より得られる自由度 ν の多変量

$$\{ T_0^2(z) : T_0^2(z) > \chi^2(p) \} \quad (2.15)$$

$$\{ T_r^2(z) : T_r^2(z) > \chi^2(p) \} \quad (2.16)$$

を用いて H_0 の検定を行うと、 ν は $\nu/2$ である。この検定量 $T_0^2(z)$, $T_r^2(z)$ の ν と $\nu/2$ の場合の T_0^2 , $T_r^2(z)$ に於いて、 $\chi^2(p)$ の自由度 p の χ^2 分布の上から $100 - \alpha\%$ 値である。この場合、 H_0 の下で ν の検定量 $T_r^2(z)$ の非心分布は ν である。このことは、数値計算によつて確かめられる (Ito [4])。

$$P_r \{ T_r^2(z) \leq 2\theta \mid H_1 \} = G_p(\theta \mid \lambda)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{t=1}^2 \frac{1}{n_t} \left[\frac{1}{4} \{ [t|t] + [t]^2 \} (E+1) \right. \\
& \quad + \frac{1}{4} [t|t] (E-1) + \frac{1}{2} \phi_{1t} (E-1) E + \phi_{2t} E^2 \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} \phi_{3t} (E-1) E^2 \right] (1-E) G_p(\theta|\lambda) \\
& + O(n_t^{-2}), \quad (2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \therefore \text{よって, } \chi^2(p) = 2\theta, \quad \rho = 1/2, \quad \underline{V} = \mu_1 - \mu_2, \quad \underline{V} = \frac{\underline{\Sigma}_1}{N_1} + \frac{\underline{\Sigma}_2}{N_2}, \\
& \lambda = \underline{V}' \underline{V}^{-1} \underline{V}, \quad G_p(\theta|\lambda) = e^{-\frac{1}{2}\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{2^i i!} G_{p+i}(\theta), \\
& G_\alpha(\theta) = [T(\alpha)]^{-1} \int_0^\theta t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad G_\alpha(\theta|0) = G_\alpha(\theta), \\
& E^a G_p(\theta|\lambda) = G_{p+a}(\theta|\lambda), \quad a=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[t] &= t \underline{V}^{-1} (\underline{\Sigma}_t / N_t), \\
[t|t] &= t \underline{V}^{-1} (\underline{\Sigma}_t / N_t) \underline{V}^{-1} (\underline{\Sigma}_t / N_t), \\
\phi_{1t} &= t \underline{V} \underline{V}' \underline{V}^{-1} (\underline{\Sigma}_t / N_t) \underline{V}^{-1} (\underline{\Sigma}_t / N_t) \underline{V}^{-1}, \\
\phi_{2t} &= \frac{1}{2} \{ \phi_{1t} + t \underline{V}^{-1} (\underline{\Sigma}_t / N_t) \cdot t \underline{V} \underline{V}' \underline{V}^{-1} (\underline{\Sigma}_t / N_t) \underline{V}^{-1} \}, \\
\phi_{3t} &= t \{ \underline{V} \underline{V}' \underline{V}^{-1} (\underline{\Sigma}_t / N_t) \underline{V}^{-1} \}^2
\end{aligned}$$

(2.17) は H_0 の下に成り立つ,

$$P_n \{ T_n^2(2) \leq 2\theta | H_0 \} = G_p(\theta)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} \sum_{t=1}^2 \frac{1}{n_t} \{ 2 [t|t] E + [t]^2 (E+1) \} (1-E) G_p(\theta) \\
& + O(n_t^{-2}), \quad (2.18)
\end{aligned}$$

となる。従って、統計量 $T_n^2(2)$ の確率分布は $n \rightarrow \infty$ として、 V が一定の T に $N_t \rightarrow \infty$ のとき、次の近似式が成立する。これを証明

§ 3. 本個の母集団の適合

母集団分布の正規性，等分散性，分散の等質性を仮定して， H_0 を仮定し， T の値は，右側の p と 2α の次の 3σ の範囲に属するとして， T を求め，

$$\hat{T}_n^2 \text{ 検定 } \{ \hat{T}_n^2(k) : \hat{T}_n^2(k) > \chi_{\alpha}^2(p(k-1)) \} \quad (3.1)$$

$$\hat{T}_n^2 \text{ 検定 } \{ \hat{T}_n^2(k) : \hat{T}_n^2(k) > \chi_{\alpha}^2(p(k-1)) \} \quad (3.2)$$

$$\hat{T}_n^2 \text{ 検定 } \{ \hat{T}_n^2(k) : \hat{T}_n^2(k) > \chi_{\alpha}^2(p(k-1)) \} \quad (3.3)$$

より，統計量 $\hat{T}_n^2(k)$ は (1.9) の T_0^2 に等しく， $\hat{T}_n^2(k)$ は (1.13) の $T_n^2(k)$ に等しく， $T_n^2(k)$ は (1.11) の T に等しく， $\hat{T}_n^2(k) = -(N-k) \log W$ と表わされ， $\chi_{\alpha}^2(p(k-1))$ は自由度 $p(k-1)$ の χ^2 分布の $100\alpha\%$ 点である。

V_t は一定値に $N_t \rightarrow \infty$ と T に等しく， $\hat{T}_n^2(k)$ は $\hat{X}_n^2(k)$ に確率収束する。より， $\hat{X}_n^2(k) = \sum_{t=1}^k (V_t \hat{Z}_t)$ と T に等しく，

$$\hat{X}_n^2(k) = -(N-k) \log |(N-k) \hat{Z}| / |Q_0 + (N-k) \hat{Z}|$$

$$= (N-k) \log |I(p) + \frac{1}{N-k} Q_0 \hat{Z}^{-1}|$$

$$= \frac{1}{2} Q_0 \hat{Z}^{-1} - \frac{1}{2(N-k)} \frac{1}{2} (Q_0 \hat{Z}^{-1})^2 + O(N^{-2}) \quad (3.4)$$

より， $\hat{T}_n^2(k)$ は $\frac{1}{2} Q_0 \hat{Z}^{-1}$ に確率収束するから， N_t は N に近づく， $\hat{T}_n^2$ 検定と $\hat{T}_n^2$ 検定は同等である。

次に，統計量 $\hat{T}_n^2(k)$ の標準分布は， V_t が一定値と T に等しく N に近づく T の $1/\sqrt{N}$ の近似である。より，

$$P_n \{ \hat{T}_n^2(k) > x \mid H_1 \} \approx P_n \{ X^2(f) > \frac{x}{c} \} \quad (3.5)$$

すなわち、 c, f は次の連立方程式の解である。

$$\begin{aligned} cf &= t \sum_{t=1}^k \{ (1-r_t) \underline{\Sigma}_t \underline{\Sigma}_t^{-1} + N_t \mu_*^{(t)} \mu_*^{(t)'} \underline{\Sigma}_t^{-1} \} \\ 2c^2f &= 2t \left\{ \sum_{t=1}^k (1-2r_t) (\underline{\Sigma}_t \underline{\Sigma}_t^{-1})^2 + \underline{I}(p) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{t=1}^k N_t \mu_*^{(t)} \mu_*^{(t)'} \underline{\Sigma}_t^{-1} \underline{\Sigma}_t \underline{\Sigma}_t^{-1} \right\} \\ &\quad + 4 \sum_{t=1}^k (1-r_t) \sum_{j,l=1}^p \kappa_{j,l}^{(t)} (\mu_*^{(t)'} \underline{\Sigma}_t^{-1})_j (\underline{\Sigma}_t^{-1})_{l,j} \\ &\quad + \sum_{t=1}^k \frac{(1-r_t)^2}{N_t} \sum_{j,l,m=1}^p \kappa_{j,l,m}^{(t)} (\underline{\Sigma}_t^{-1})_j (\underline{\Sigma}_t^{-1})_{l,m} \quad (3.6) \end{aligned}$$

但し、 $\mu_t = \mu_* + \mu_*^{(t)}$, $\sum_{t=1}^k N_t \mu_*^{(t)} = 0$, 又、 $(\mu_*^{(t)'} \underline{\Sigma}_t^{-1})_j$ はベクトル $\mu_*^{(t)'} \underline{\Sigma}_t^{-1}$ の j 成分、 $(\underline{\Sigma}_t^{-1})_{j,l}$ は $p \times p$ 行列 $\underline{\Sigma}_t^{-1}$ の (j,l) 要素と表わす。(3.6) に $2, \dots, k=2, \kappa_{j,l}^{(k)} = 0, \kappa_{j,l,m}^{(k)} = 0$ とすれば、方程式 (2.20) が得られる。
 (2) $\hat{T}_n^2(k)$ の極限分布、 r_t は一定値 $r \sim N(0,1)$ とし、 r の k 次近似 $r \approx r + \frac{1}{2} r^2$ とおくと、

$$P_n \{ \hat{T}_n^2(k) > x \mid H_1 \} \approx P_n \{ X^2(f') > \frac{x}{c'} \} \quad (3.7)$$

すなわち、 c', f' は次の連立方程式の解である。

$$\begin{aligned} c'f' &= p(k-1) + t \sum_{t=1}^k N_t \mu_*^{(t)} \mu_*^{(t)'} \underline{\Sigma}_t^{-1} \\ 2c'^2f' &= 2p(k-1) + 4t \sum_{t=1}^k N_t \mu_*^{(t)} \mu_*^{(t)'} \underline{\Sigma}_t^{-1} \\ &\quad + 4 \sum_{t=1}^k \sum_{j,l=1}^p \kappa_{j,l}^{(t)} (\mu_*^{(t)'} \underline{\Sigma}_t^{-1})_j (\underline{\Sigma}_t^{-1} - N_t \underline{\Sigma}_t^{-1} \Lambda' \underline{\Sigma}_t^{-1})_{l,j} \\ &\quad + \sum_{t=1}^k \frac{1}{N_t} \sum_{j,l,m=1}^p \kappa_{j,l,m}^{(t)} (\underline{\Sigma}_t^{-1} - N_t \underline{\Sigma}_t^{-1} \Lambda' \underline{\Sigma}_t^{-1})_j (\underline{\Sigma}_t^{-1} - N_t \underline{\Sigma}_t^{-1} \Lambda' \underline{\Sigma}_t^{-1})_{l,m} \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\text{但し, } \mu_t = \mu + \mu^{(t)}, \sum_{t=1}^k \Delta_t \mu^{(t)} = 0, \Delta_t = (\Sigma_t / N_t)^{-1}, \\ \Delta = \sum_{t=1}^k \Delta_t.$$

こゝらの結果を用ゐれば、大数の N に對して、第 1 分散及分散行列の假定が成立する。場合、 $\hat{\Sigma}_t$ 検査の力が $\hat{\Sigma}_t$ 検査より大なる影響をいふ、すなわち、母集団分布の正規性の假定が成立する。場合の影響の両方ともはばかる。こゝが合ふ。更に、3 次の η の μ の μ の存在の両検査の μ の μ の影響を受けるが、検査力 100% が μ の μ の μ の影響を受ける。 (Ito [4])。

§ 4. 分散及分散行列に關する假説検査

(1) $H_{02}: \Sigma = \Sigma_0$ の場合

通常 χ^2 分布を標準によつて χ^2 分布無假説の $H_{02}: \Sigma = \Sigma_0$ と同義である、母集団分布の正規性の假定し $\mu = \mu_0$ の χ^2 分布 (1.18) は

$$A_2^* = |V|^{-\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{N}{2} \text{tr} (\Sigma_0^{-1} V) \right\} \quad (4.1)$$

とす。 χ^2 分布,

$$f_2(V) \equiv A_2^* \frac{1}{N} \quad (4.2)$$

とす。 χ^2 分布、母集団分布の正規性の假定し $\mu = \mu_0$ の χ^2 分布、標準分布を形成する。 $N \rightarrow \infty$ とす、 H_{02} の下で χ^2 分布、統計量 $N(1 - f_2(V))$ は漸近的に正規分布に近づく。 χ^2 分布の χ^2 二次形式の分布に等しくなるが、 χ^2 の 3 次の η

2 次 の 2 次 元 確 率 変 数 系, 4 次 の 2 次 元 確 率 変 数 系
 ... (1) ... (2) ... (3) ... (4) ...
 ... (5) ... (6) ... (7) ... (8) ...
 ... (9) ... (10) ... (11) ... (12) ...
 ... (13) ... (14) ... (15) ... (16) ...
 ... (17) ... (18) ... (19) ... (20) ...
 ... (21) ... (22) ... (23) ... (24) ...
 ... (25) ... (26) ... (27) ... (28) ...
 ... (29) ... (30) ... (31) ... (32) ...
 ... (33) ... (34) ... (35) ... (36) ...
 ... (37) ... (38) ... (39) ... (40) ...
 ... (41) ... (42) ... (43) ... (44) ...
 ... (45) ... (46) ... (47) ... (48) ...
 ... (49) ... (50) ... (51) ... (52) ...
 ... (53) ... (54) ... (55) ... (56) ...
 ... (57) ... (58) ... (59) ... (60) ...
 ... (61) ... (62) ... (63) ... (64) ...
 ... (65) ... (66) ... (67) ... (68) ...
 ... (69) ... (70) ... (71) ... (72) ...
 ... (73) ... (74) ... (75) ... (76) ...
 ... (77) ... (78) ... (79) ... (80) ...
 ... (81) ... (82) ... (83) ... (84) ...
 ... (85) ... (86) ... (87) ... (88) ...
 ... (89) ... (90) ... (91) ... (92) ...
 ... (93) ... (94) ... (95) ... (96) ...
 ... (97) ... (98) ... (99) ... (100) ...

$$\sigma_2^2 = \{f_2(\underline{z})\}^2 \{2t(\underline{z}(p) - \underline{z})^2 + \sum_{j,l,m=1}^p k_{jlm} \times (\underline{z}^{-1} - \underline{z}(p))_j (\underline{z}^{-1} - \underline{z}(p))_{lm}\} \quad (4.3)$$

... (1) ... (2) ... (3) ... (4) ...
 ... (5) ... (6) ... (7) ... (8) ...
 ... (9) ... (10) ... (11) ... (12) ...
 ... (13) ... (14) ... (15) ... (16) ...
 ... (17) ... (18) ... (19) ... (20) ...
 ... (21) ... (22) ... (23) ... (24) ...
 ... (25) ... (26) ... (27) ... (28) ...
 ... (29) ... (30) ... (31) ... (32) ...
 ... (33) ... (34) ... (35) ... (36) ...
 ... (37) ... (38) ... (39) ... (40) ...
 ... (41) ... (42) ... (43) ... (44) ...
 ... (45) ... (46) ... (47) ... (48) ...
 ... (49) ... (50) ... (51) ... (52) ...
 ... (53) ... (54) ... (55) ... (56) ...
 ... (57) ... (58) ... (59) ... (60) ...
 ... (61) ... (62) ... (63) ... (64) ...
 ... (65) ... (66) ... (67) ... (68) ...
 ... (69) ... (70) ... (71) ... (72) ...
 ... (73) ... (74) ... (75) ... (76) ...
 ... (77) ... (78) ... (79) ... (80) ...
 ... (81) ... (82) ... (83) ... (84) ...
 ... (85) ... (86) ... (87) ... (88) ...
 ... (89) ... (90) ... (91) ... (92) ...
 ... (93) ... (94) ... (95) ... (96) ...
 ... (97) ... (98) ... (99) ... (100) ...

(2) $H_{03}: \underline{z} = \sigma^2 \underline{z}(p)$ の場合

... (1) ... (2) ... (3) ... (4) ...
 ... (5) ... (6) ... (7) ... (8) ...
 ... (9) ... (10) ... (11) ... (12) ...
 ... (13) ... (14) ... (15) ... (16) ...
 ... (17) ... (18) ... (19) ... (20) ...
 ... (21) ... (22) ... (23) ... (24) ...
 ... (25) ... (26) ... (27) ... (28) ...
 ... (29) ... (30) ... (31) ... (32) ...
 ... (33) ... (34) ... (35) ... (36) ...
 ... (37) ... (38) ... (39) ... (40) ...
 ... (41) ... (42) ... (43) ... (44) ...
 ... (45) ... (46) ... (47) ... (48) ...
 ... (49) ... (50) ... (51) ... (52) ...
 ... (53) ... (54) ... (55) ... (56) ...
 ... (57) ... (58) ... (59) ... (60) ...
 ... (61) ... (62) ... (63) ... (64) ...
 ... (65) ... (66) ... (67) ... (68) ...
 ... (69) ... (70) ... (71) ... (72) ...
 ... (73) ... (74) ... (75) ... (76) ...
 ... (77) ... (78) ... (79) ... (80) ...
 ... (81) ... (82) ... (83) ... (84) ...
 ... (85) ... (86) ... (87) ... (88) ...
 ... (89) ... (90) ... (91) ... (92) ...
 ... (93) ... (94) ... (95) ... (96) ...
 ... (97) ... (98) ... (99) ... (100) ...

$$f_2(\underline{z}) = \lambda, \frac{2}{\lambda N} = 1 \underline{z}^{-1} / (t \underline{z} / p) \quad (4.4)$$

... (1) ... (2) ... (3) ... (4) ...
 ... (5) ... (6) ... (7) ... (8) ...
 ... (9) ... (10) ... (11) ... (12) ...
 ... (13) ... (14) ... (15) ... (16) ...
 ... (17) ... (18) ... (19) ... (20) ...
 ... (21) ... (22) ... (23) ... (24) ...
 ... (25) ... (26) ... (27) ... (28) ...
 ... (29) ... (30) ... (31) ... (32) ...
 ... (33) ... (34) ... (35) ... (36) ...
 ... (37) ... (38) ... (39) ... (40) ...
 ... (41) ... (42) ... (43) ... (44) ...
 ... (45) ... (46) ... (47) ... (48) ...
 ... (49) ... (50) ... (51) ... (52) ...
 ... (53) ... (54) ... (55) ... (56) ...
 ... (57) ... (58) ... (59) ... (60) ...
 ... (61) ... (62) ... (63) ... (64) ...
 ... (65) ... (66) ... (67) ... (68) ...
 ... (69) ... (70) ... (71) ... (72) ...
 ... (73) ... (74) ... (75) ... (76) ...
 ... (77) ... (78) ... (79) ... (80) ...
 ... (81) ... (82) ... (83) ... (84) ...
 ... (85) ... (86) ... (87) ... (88) ...
 ... (89) ... (90) ... (91) ... (92) ...
 ... (93) ... (94) ... (95) ... (96) ...
 ... (97) ... (98) ... (99) ... (100) ...

$$\sigma_3^2 = \{f_3(\underline{z})\}^2 \left[2 \{t \underline{z}^2 / (t \underline{z})^2 - \frac{1}{p}\} \right]$$

$$+ \sum_{j, l=1}^k \kappa_{j, l} (\bar{\Sigma}/k - E(k)/n \bar{\Sigma})_j (\bar{\Sigma}/k - E(k)/n \bar{\Sigma})_{l-1} \quad (4.5)$$

と、(1)の場合と同様、 λ_4 検定が真の λ_2 の値を抽出する $N \rightarrow \infty$ のとき、母集団分布に λ_2 の 3 次の λ_2 の値を抽出する影響は $i \rightarrow 1$ であるが、4 次の λ_2 の値を抽出する影響は $i \rightarrow 1$ (Ito [4])。

(3) $H_{04}: \sum g_k = 0 \quad (g, k = 1, 2, \dots, 2)$ の場合

正規母集団の仮定の下に得られた順序統計量 (1.22) の λ_4 を用いて、

$$f_4(\underline{v}) \equiv \lambda_4^{\frac{2}{N}} = |\underline{v}| / |\underline{v}_1| \quad (4.6)$$

と置く。このとき、 $|\underline{v}_1| = \sum_{g=1}^2 \pi |\underline{v}_{g1}|$ 。このとき、統計量 $N(1 - f_4(\underline{v}))$ の $N \rightarrow \infty$ のとき、 H_{04} の下に $\sim$ の母集団の正規性が仮定される場合、漸近的に自由度 $\sum_{g=1}^2 k_g k_{2g}$ の χ^2 分布に従うことが証明される。したがって、 H_{04} が真であるとき、統計量 $\sqrt{N} \{f_4(\underline{v}) - f_4(\underline{\Sigma})\}$ は漸近的に $N(0, \sigma_4^2)$ に従う。このとき、

$$\sigma_4^2 = \{f_4(\underline{\Sigma})\}^2 \left\{ 2E(\bar{\Sigma}/k - E(k)/n \bar{\Sigma})^2 + \sum_{j, l=1}^k \kappa_{j, l} (\bar{\Sigma}^{-1} - \bar{\Sigma}_1^{-1})_j (\bar{\Sigma}^{-1} - \bar{\Sigma}_1^{-1})_{l-1} \right\} \quad (4.7)$$

$$\text{但し、} \quad \bar{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\Sigma}_{11} \end{bmatrix}$$

と、母集団の正規性の仮定を仮定する。このとき、 λ_4 検定を用

…であるが、 n の真の値が $N \rightarrow \infty$ のとき、 n が N に近づくにつれて、検出力の4次の近似値が、 N の影響を受ける (Ito [4])。

(4) $H_{05} : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$ の場合

本組の母集団が k 個の正規分布に従うと仮定し、 k 個の母集団の平均値が等しいことを検定する。このとき、検定統計量は (1.25) の λ_5 を用いる。

$$f_5(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k) \equiv \lambda_5^{\frac{N}{2}}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\prod_{t=1}^k |\Sigma_t|^{N/2}} / \prod_{t=1}^k |\Sigma_t|^{N/2} \quad (4.8)$$

とある。このとき、 H_{05} が真であるとき、 k 個の母集団の平均値が等しいと仮定し、 $N \rightarrow \infty$ のとき、検定統計量 $\sqrt{N} \{f_5(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k) - f_5(\underline{\Sigma}_1, \dots, \underline{\Sigma}_k)\}$ は $N \rightarrow \infty$ のとき漸近的に自由度 $\frac{1}{2}k(k+1)(k-1)$ の χ^2 分布に従う。また、 H_{05} が真であるとき、 $N \rightarrow \infty$ のとき、検定統計量 $\sqrt{N} \{f_5(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k) - f_5(\underline{\Sigma}_1, \dots, \underline{\Sigma}_k)\}$ は $N \rightarrow \infty$ のとき漸近的に $N(0, \sigma_5^2)$ に従う。ここで、

$$\sigma_5^2 = \{f_5(\underline{\Sigma}_1, \dots, \underline{\Sigma}_k)\}^2 \sum_{t=1}^k \left\{ 2 \text{tr}(\underline{\Sigma}_t^{-1} - \underline{\Sigma}_t^{-1} \underline{\Sigma}_t^{-1})^2 \right. \\ \left. + \sum_{i,j,l,m=1}^k \kappa_{ijlm}^{(4)} (\underline{\Sigma}_t^{-1} - \underline{\Sigma}_t^{-1})_{ij} (\underline{\Sigma}_t^{-1} - \underline{\Sigma}_t^{-1})_{lm} \right\} \quad (4.9)$$

である。 (1), (2) の場合と同様、母集団の正規性が仮定され、 $N \rightarrow \infty$ のとき、 λ_5 検定は、 N の影響を受ける。4次の近似値が、 N の影響を受ける (Ito [4])。

参考文献

1. Anderson, T. W. (1958). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. Wiley, New York.
2. Beunett, B. M. (1951). Note on a solution of the generalized Behrens-Fisher problem. *Ann. Inst. Statist. Math.* 2, 87-90.
3. Hotelling, H. (1950). A generalized T-test and measure of multivariate dispersion. *Proc. Second Berkeley Sym. Math. Statist. Prob.* 23-41.
4. Ito, K. (1968). On the effect of heteroscedasticity and non-normality upon some multivariate test procedures. To appear in *Proc. Second International Symposium on Multivariate Analysis*, Academic Press, New York.
5. Ito, K. and Schull, W. J. (1964). On the robustness of the T_0^2 test in multivariate analysis of variance when variance-covariance matrices are not equal. *Biometrika*. 51, 71-82.
6. James, G. S. (1954). Tests of linear hypotheses in univariate and multivariate analysis when the ratios of the population variances are

unknown. *Biometrika*. 41, 19-43.

7. Scheffé, H. (1943). On solutions of the Behrens - Fisher problem based on the t -distribution. *Ann. Math. Statist.* 14, 35-44.
8. Wilks, S. S. (1932). Certain generalizations in the analysis of variance. *Biometrika*. 24, 471-494.

