

ベナール対流の時空間構造遷移

広島大学 西川 悟 (Satoru NISHIKAWA)

広島大学 八幡英雄 (Hideo YAHATA)

1 introduction

二つの平行板間に静止した流体を入れ、下部から一様に熱するとき現れるベナール対流は、熱平衡系から離れた系に対する非線形現象の理論の面から、あるいは宇宙・地球物理学や工学への応用の面から興味を持たれている。ベナール対流に対する安定性解析は、Rayleigh(1916)に始まり、理論・実験の両面から多くの研究がなされてきている。なかでも、Busse(1985) [2] は水平方向に周期的境界条件を課した系に対する平行安定ロールの線形安定性解析を行ない、平行ロールの安定性の Rayleigh 数 Ra 、Prandtl 数 Pr 、およびロールの波数の違いに依存する種々の不安定性を見い出している。

アスペクト比（容器の高さに対する水平方向の長さの比）の低い直方体容器中のベナール対流については、側面の境界による制約が強いため、系に現れ得る空間パターンの自由度がそれほど大きくないものと考えられる。そのため、系の遷移の低次元力学系のカオス理論による説明が期待される。

常温の水に対するベナール対流の実験の一例として、Sano, Sawada(1984) [3] によるアスペクト比 $\Gamma_x = 3.0$ 、 $\Gamma_y = 1.5$ の系に対する実験があげられる。彼らの実験の結果、 Ra を上昇させるにつれ、定常ロール、単周期振動ロール、準周期振動ロール、更に Phase-Locking を経て 非周期振動へと遷移したこと、また、単周期振動において、一つのロールに対して一対の温度の高い塊、低い塊がロールの軸の回りを循環する BE1 ブロッブ不安定性が起きたこと、が報告されている。

低アスペクト比の直方体容器中のベナール対流の振動状態からカオス的な状態までの遷移の道筋については、解析的、数値的にも確立されているとはいえない。そこで、Sano,

Sawada の実験系にあわせた数値シミュレーションを行ない、容器の上下間の温度差を変化させることによる系の時空間構造の遷移について考察を行なった。また、水の動粘性率の温度依存性を考慮した系の数値計算についても最後に触れる。

2 支配方程式と数値計算法

流体系の速度場 $\mathbf{u} = (x, y, z)$ 、温度場 θ 、圧力場 π を支配する方程式として、次の Boussinesq 近似した流体の運動方程式と熱輸送方程式を用いた。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \pi + Pr \cdot \Delta \mathbf{u} + Pr \cdot \theta \mathbf{e}_z \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \Delta \theta + Ra \cdot w \quad (3)$$

ここで系の鉛直方向を z 軸にとっている。無次元量 Ra 、 Pr はそれぞれ Rayleigh 数、Prandtl 数である。境界条件は、速度に関しては、全ての境界に対しては固定境界、温度に関しては、上面、底面については等温条件、側面については断熱条件を課した。

Pr は、常温の水を想定して、6.0 とした。容器のアスペクト比は、Sano Sawada [3] の系に従い $\Gamma_x = 3.0$, $\Gamma_y = 1.5$ とした。ただし、容器の高さは 1.0 とした。これらの流体の基礎方程式を、MAC 法 (Marker and Cell method) と呼ばれる一種の差分法を用いて数値計算を行なった。

各変数の定義点は、

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_{i+\frac{1}{2},j,k} \rightarrow U = U(I, J, K); 0 < I < L, 1 < J < M, 1 < K < N \\ v = v_{i,j+\frac{1}{2},k} \rightarrow V = V(I, J, K); 1 < I < L, 0 < J < M, 1 < K < N \\ w = w_{i,j,k+\frac{1}{2}} \rightarrow W = W(I, J, K); 1 < I < L, 1 < J < M, 0 < K < N \\ p = p_{i,j,k} \rightarrow P = P(I, J, K); 1 < I < L, 1 < J < M, 1 < K < N \\ \theta = \theta_{i,j,k} \rightarrow H = H(I, J, K); 1 < I < L, 1 < J < M, 1 < K < N \end{array} \right. \quad (4)$$

である。ここで、 L, M, N は、それぞれ x, y, z 方向のきざみ数である。

空間差分は中心差分、時間差分については前進差分、また、圧力の Poisson 方程式については、陰解法の一つである ICCG (Incomplete Cholesky decomposition and Conjugate Gradient) で計算した。各ステップの計算において定義されていない点については、その点の周りの点で相加平均の値を用いた。

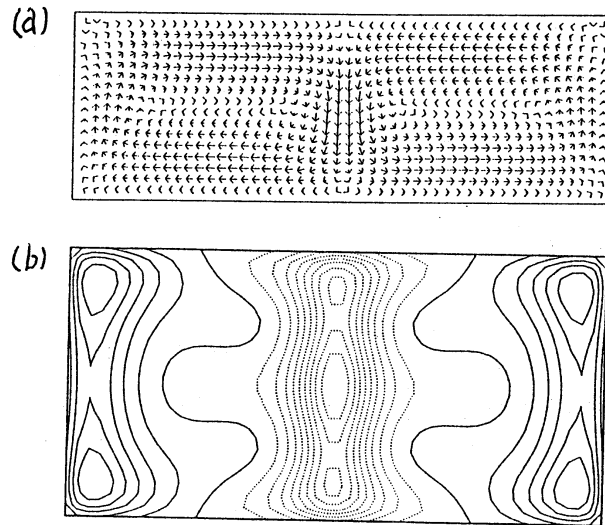


図 1: $Ra = 3.0 \times 10^4$ のときの (a) $y = 0.72$ 断面の速度ベクトル図、および (b) $z = 0.48$ 断面の鉛直方向の速度場 w 。ここで (b) の等高線の実線、点線はそれぞれ上昇流、下降流であることを示す。

格子点数は、 z 方向に 16、 x 、 y 方向には、一様等方メッシュになるように、それぞれ、48、24 とした。

3 Boussinesq 方程式で記述される系

3.1 初期条件

初期条件として、 $Ra = 3.0 \times 10^4$ で現れた y 軸方向に平行な軸を持つ二つの平行ロールを用いた。その系の、 $y = 0.72$ 断面の速度ベクトル場、及び $z = 0.47$ 断面の鉛直方向の速度場の等高線を図 1 に示す。以後、この状態を初期条件として、 Ra を 5000 ずつ上昇させて計算を行なった。

3.2 定常ロールパターン間の遷移

$Ra = 3.5 \times 10^4$ と $Ra = 4.0 \times 10^4$ の間でクロスロール不安定性によるものと思われる空間パターンの遷移が起こった。図 3 より $Ra = 3.5 \times 10^4$ 、 $Ra = 4.0 \times 10^4$ それぞれの $z = 0.47$ 断面の鉛直方向の速度場 (図 2) および渦度ベクトル場 (図 3) を図に示す。 $Ra = 3.5 \times 10^4$ では、渦度の向きが y 軸方向に平行であったのが、 $Ra = 4.0 \times 10^4$ では蛇行している渦度を持つ系に遷移した。 $Ra = 4.0 \times 10^4$ で y 軸方向に新しく横向きロー

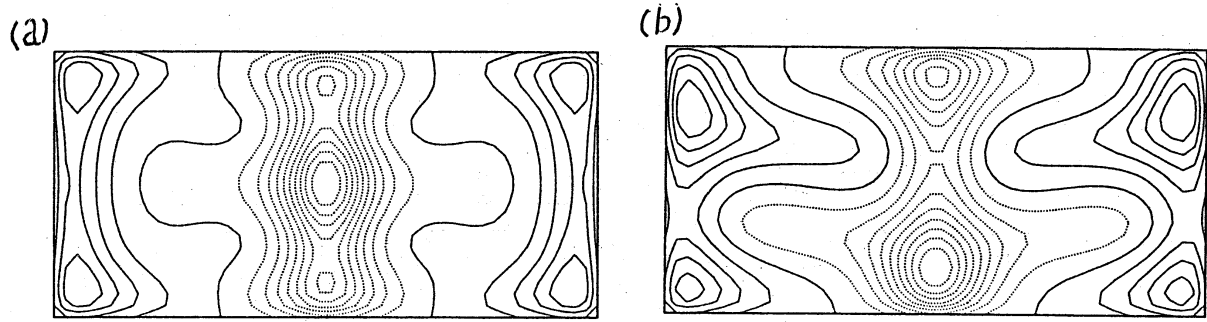


図 2: $z = 0.47$ 断面の鉛直方向の速度: $Ra =$ (a) 3.5×10^4 , (b) 4.0×10^4

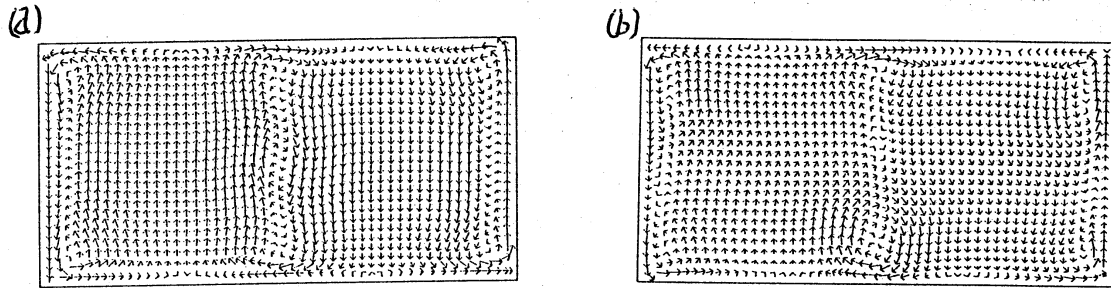


図 3: $z = 0.47$ 断面の渦度ベクトル図: $Ra =$ (a) 3.5×10^4 , (b) 4.0×10^4

ルのモードが現れたと見る事が出来る。対称性の観点から見ると、この遷移は鏡映面を 2 つ持つ $C_{2v} (mm2)$ 対称性から鏡映面を 1 つだけ持つ $C_{1h} (m)$ 対称性へ、対称性が低くなる遷移であるとみることが出来る。

3.3 定常ロールから単周期振動ロールへの遷移、及びブロッブ不安定性

$Ra = 5.5 \times 10^4$ と $Ra = 6.0 \times 10^4$ の間で定常ロールから一つの基本振動数を持つ単周期振動ロールへと遷移した。 $Ra = 6.0 \times 10^4$ のときの基本振動数 f_1 は 56 mHz であった。ここで、次元を持つ振動数の計算の際、系の厚さ $d = 1.0[\text{cm}]$ 、温度伝導率 $\kappa = 0.143 \times 10^{-2}[\text{cm}^2/\text{s}]$ を用いた。この振動の空間パターンの様子を調べる。 $Ra = 6.0 \times 10^4$ のときの温度 θ の、時間平均した温度場 $\langle \theta \rangle$ からのずれ $\delta\theta = \theta - \langle \theta \rangle$ の時間変化を図 4 に掲げる。図 4 (a)~(d) より、系の中央上部にみられる冷たい塊 (blob) が下降することにより、系の下部にあった熱い塊が押されて 2 つに分離する。また、系上部にみられた 2 つの熱い塊が中央に移動し 1 つに合流する。図 4 (e)~(h) より、(d) の段階で 1 つに合流した熱い塊が下降し、系下部に落ちていた冷たい塊が 2 つに分離する。これより、一つのロールについて 2 対の熱い塊 (blob) と冷たい塊がロールの軸の回りを循環していることが分かる。これは、Bolton, Busse, Clever [2] の平行ロールの安定性理論での

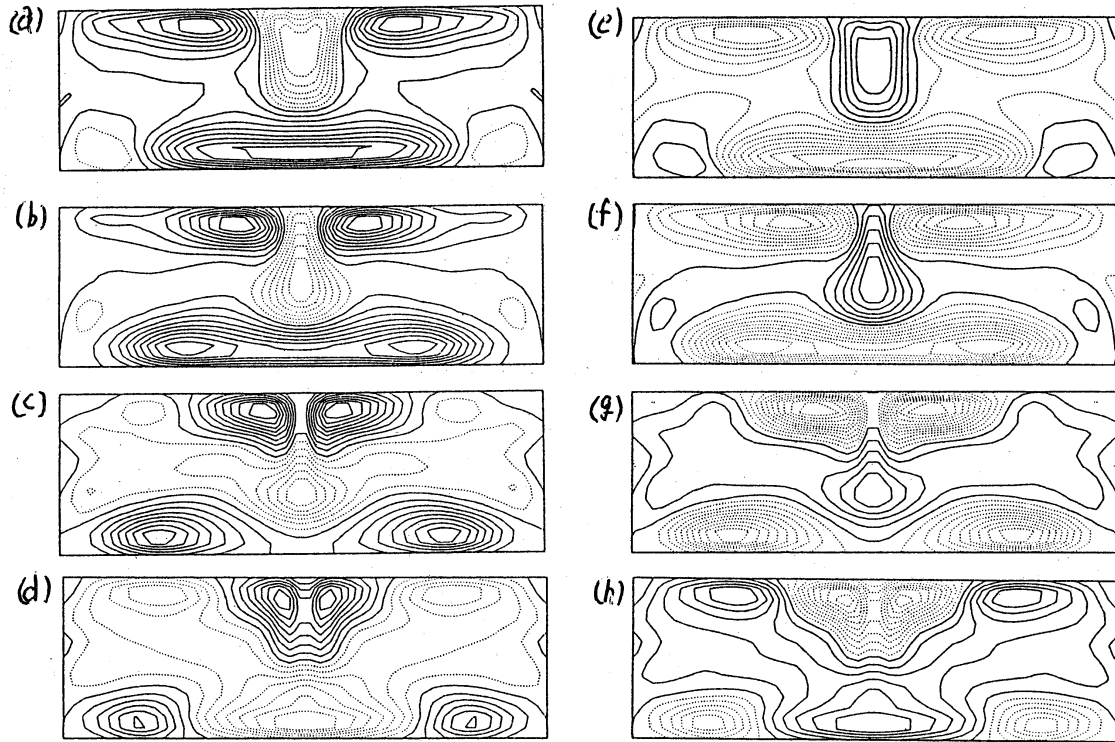


図 4: $Ra = 6.0 \times 10^4$ のときの $y = 0.80$ 断面の温度場 θ の時間平均 $\langle \theta \rangle$ からのずれ $\delta\theta = \theta - \langle \theta \rangle$ 。実線、点線はそれぞれ $\delta\theta$ が正の値、負の値を持つことを示す。

BO2 ブロッブ不安定性に相当する。一方、Sano Sawada の実験では、1 対の熱い塊と冷たい塊がロールの軸の回りを循環する BE1 ブロッブ不安定性がおきていることが報告されている。この結果の違いは、Bolton, Busse, Clever [2] より、 $Pr \sim 6.0$ 、波数 $a \sim 2$ では、BO2 と BE1 不安定性は同様に起こり得ることから説明できる。

3.4 単周期振動ロール間の空間構造の遷移

$Ra = 6.0 \times 10^4$ と $Ra = 6.5 \times 10^4$ の間で空間パターンの遷移が起こった。遷移前後の $z = 0.47$ 断面の鉛直方向の速度場を図 5 に示す。遷移前にはなかった、容器の端の流体の下降部分が新しく現れた。系の対称性は、 C_{1h} のままである。この空間パターンの遷移の前後のパターンを区別するためにそれぞれ $C_{1h}I$ 及び $C_{1h}II$ と呼ぶ。

$Ra = 9.5 \times 10^4$ と $Ra = 10.0 \times 10^4$ の間で Skewed-Varicous と思われる空間パターンの遷移が起こった。遷移前後の $z = 0.47$ 断面の鉛直方向の速度場を図 6 に示す。対称性の観点から見ると鏡映面を 1 つもつ $C_{1h}(m)$ から鏡映面を持たない $C_1(1)$ へと対称性の低くなるような遷移である。

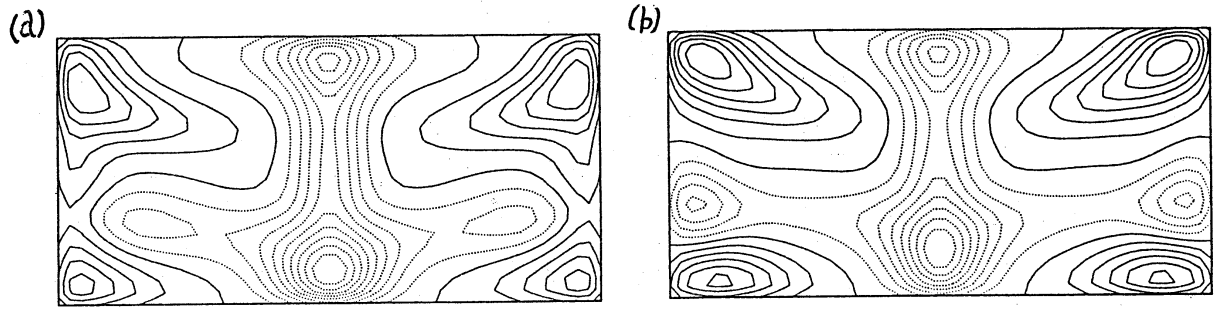


図 5: $z = 0.47$ 断面の鉛直方向の速度場: $Ra =$ (a) 6.0×10^4 , (b) 6.5×10^4 ,

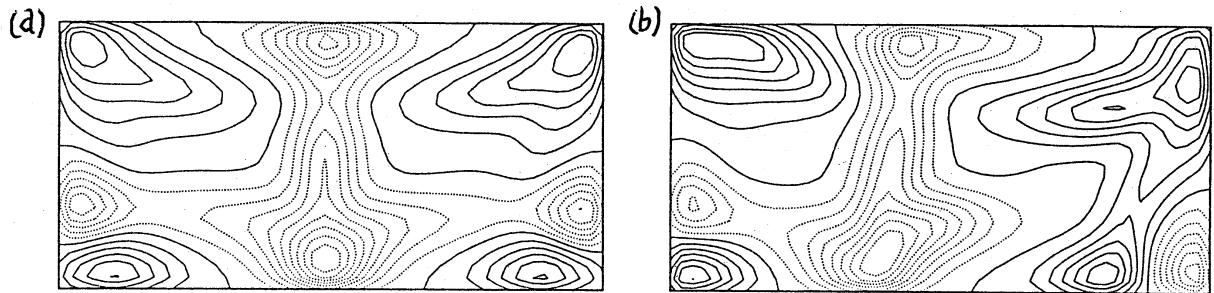


図 6: $z = 0.47$ 断面の鉛直方向の速度場: $Ra =$ (a) 9.5×10^4 , (b) 10.0×10^4 ,

系の基本振動数 f_1 の Ra 依存性を図 7 に示した。系の対称性が C_{1h} から C_1 に遷移するところで、数 mHz の振動数の飛びがみられる。この遷移はヒステリシスであることが期待されるので、そこで $Ra = 10.0 \times 10^4$ から Ra を下降させて計算を行なった。

$Ra = 9.5 \times 10^4$ と $Ra = 9.0 \times 10^4$ の間で、空間パターンの遷移が起こった。遷移前後の $z = 0.47$ 断面の鉛直方向の速度場を図 8 に示す。系の対称性は、 C_1 のままであった。遷移前後の空間パターンを区別するためそれぞれ C_{1I} , C_{1II} と呼ぶ。図 8 より、系の右側の構造の定性的な変化はみられないが、系の左側にあった流体の下降部分がなくなっていることが分かる。図 7 より、この遷移によって、基本振動数の飛びが起こり、もとの C_{1hII} のときの振動数に戻った。

3.5 準周期からカオスへの遷移

$Ra = 11.0 \times 10^4$ と $Ra = 11.5 \times 10^4$ の間で一つの基本振動数を持つ振動ロールから準周期振動ロールへと遷移した。二つの基本振動数は、 $f_1 = 85$ mHz $f_2 = 26$ mHz であった。一方、Sano Sawada の実験では、これは $Ra = 11.8 \times 10^4$ のときの値ではあるが、 $f_1 = 108$ mHz, $f_2 = 10$ mHz であることが報告されている。我々の計算により、Sano Sawada の実験による結果と、同じオーダーの値が得られたことが分かる。

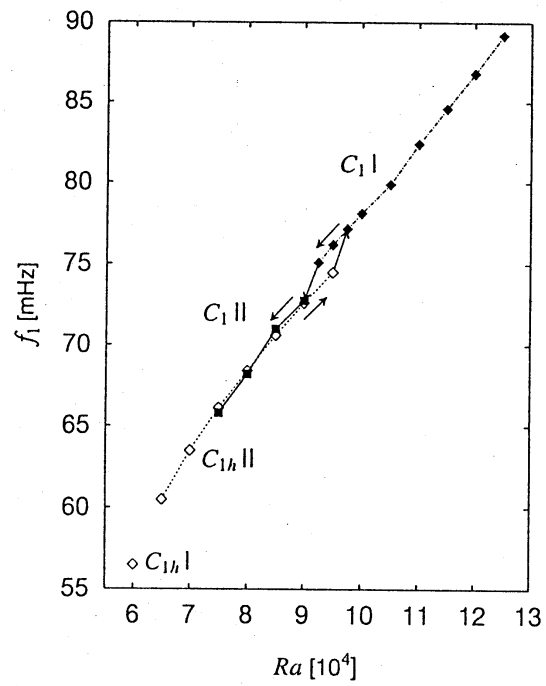


図 7: 基本振動数 f_1 の Ra 依存性

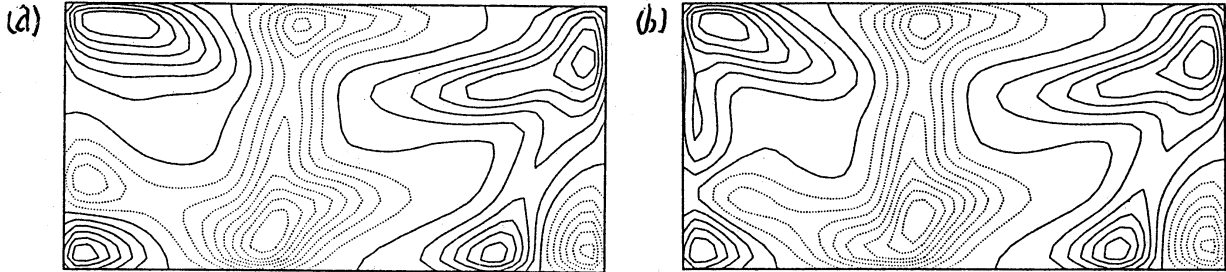


図 8: $z = 0.47$ 断面の鉛直方向の速度場: $Ra =$ (a) 9.5×10^4 , (b) 9.0×10^4 ,

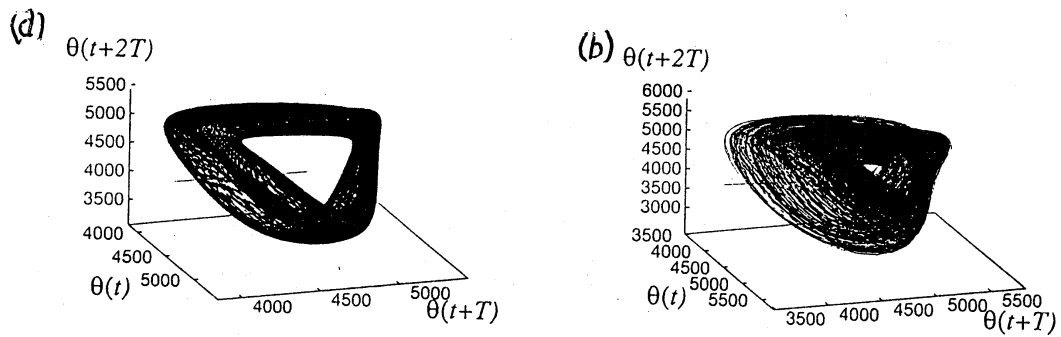


図 9: 点 (1.47, 0.72, 0.88) の温度 θ のトラジェクトリ: (a) $Ra = 12.0 \times 10^4$, (b) 12.5×10^4

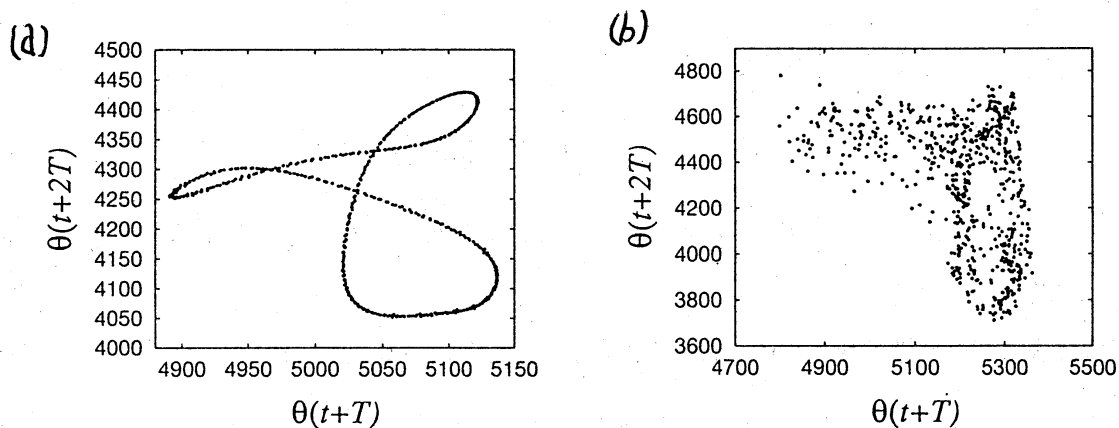


図 10: 点 $(1.47, 0.72, 0.88)$ の温度 θ のポアンカレ写像 (a) $Ra = 12.0 \times 10^4$, (b) 12.5×10^4

$Ra = 12.0 \times 10^4$ と $Ra = 12.5 \times 10^4$ の間で準周期振動ロールから非周期振動ロールへと遷移した。 $Ra = 12.0 \times 10^4$ と $Ra = 12.5 \times 10^4$ のときの、1 つの点での温度のパワースペクトル、 $H(t)$, $H(t+T)$, $H(t+2T)$ の相空間上にとったトラジェクトリ、及びポアンカレ写像をそれぞれ図 9、図 10 に示す。ポアンカレ写像より、 $Ra = 12.0 \times 10^4$ では閉曲面であったのが、 $Ra = 12.5 \times 10^4$ では閉曲面でなく点が分散している。これより、準周期振動より非周期振動へと遷移したことがわかる。

3.6 まとめ

Ra を上昇させた時におこる系の遷移は、時系列のみで見た場合は、定常状態、単周期振動状態、準周期振動状態、非周期振動の順で起こった。準周期振動から非周期振動へ遷移する際に、Sano Sawada(1984) [3] の実験で報告された結果とことなり、Phase Locking はみられなかった。空間構造の対称性からみると、 Ra を上昇させるにつれて、系の対称性が低くなるような遷移が起こった。

単周期振動間の空間パターンの遷移の際、振動数 Ra の関数とみたとき、周波数の飛びが起こった。振動数は、0.1 mHz のオーダーの誤差で元の値に戻った。

4 温度依存する動粘性率をもつ系

以上の Boussinesq 方程式の計算結果からは、水に対する実験で報告されている Phase Locking が見い出されていない。それは、実際の水の動粘性率は温度依存をもっており、それが Phase Locking の起因になるのではないかと考えた。そこで、水の動粘性の温度依存性を考慮した Non-Boussinesq 方程式の数値シミュレーションを行なった。次のよう

な動粘性率 ν の温度依存性を入れる

$$\nu = \nu_0[1 - b(T - T_0)] \quad (5)$$

ここで、 T_0 は 両平行板の平均の温度である。300 K の水の場合、 $\nu_0 = 8.75 \times 10^{-3} [\text{cm}^2/\text{s}]$ 、 $b = 0.0265 [\text{K}^{-1}]$ である。

流体の基本方程式 (Non-Boussinesq 方程式) は次のように書ける。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \pi + Pr(1 + az)\Delta \mathbf{u} + Pr \cdot a \cdot \partial_z \mathbf{u} + Pr \cdot \theta \mathbf{e}_z \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \Delta \theta + Ra \cdot w \quad (8)$$

ここで、

$$a = h_1 \cdot \frac{Ra}{(Ra)_c}$$

$$h_1 = (T_d)_c \cdot b$$

$(T_d)_c$: 臨界 Rayleigh 数 $(Ra)_c$ のときの両平行板間の温度差

Boussinesq 方程式との違いは、運動方程式に新しく 鉛直方向に非対称な二つの項 $Pr \cdot a \cdot z \nabla \mathbf{u}$ 、 $Pr \cdot a \cdot \partial_z \mathbf{u}$ と一つの新しい無次元パラメータ h_1 が加わっていることである。無次元量 h_1 は、流体の動粘性率の温度依存性の強さを特徴づける量であると解釈できる。

数値計算は、Boussinesq 方程式で用いたものと同じ手法を用いた。 h_1 の値は水の物性値から算出した 2.5×10^{-3} を用いる。

Ra が、 12.600×10^4 、 12.620×10^4 、及び 12.625×10^4 の時の点 (1.47, 0.72, 0.88) の温度のポアンカレマップを図 11 に示す。 Ra を上昇により、トラジェクトリが 2-トーラスであったものが、トーラスがぼやけて、カオスへ遷移することが分かった。

しかしながら、常温の水の物性値にあわせた系では、Sano Sawada の実験で報告された Phase Locking は見い出されなかった。

微分方程式の鉛直方向の非対称性な項からの影響に興味があるので、その項から Phase Locking が起こるのかどうか調べるため、今後、この温度依存性を強くした系の計算を行なう予定である。

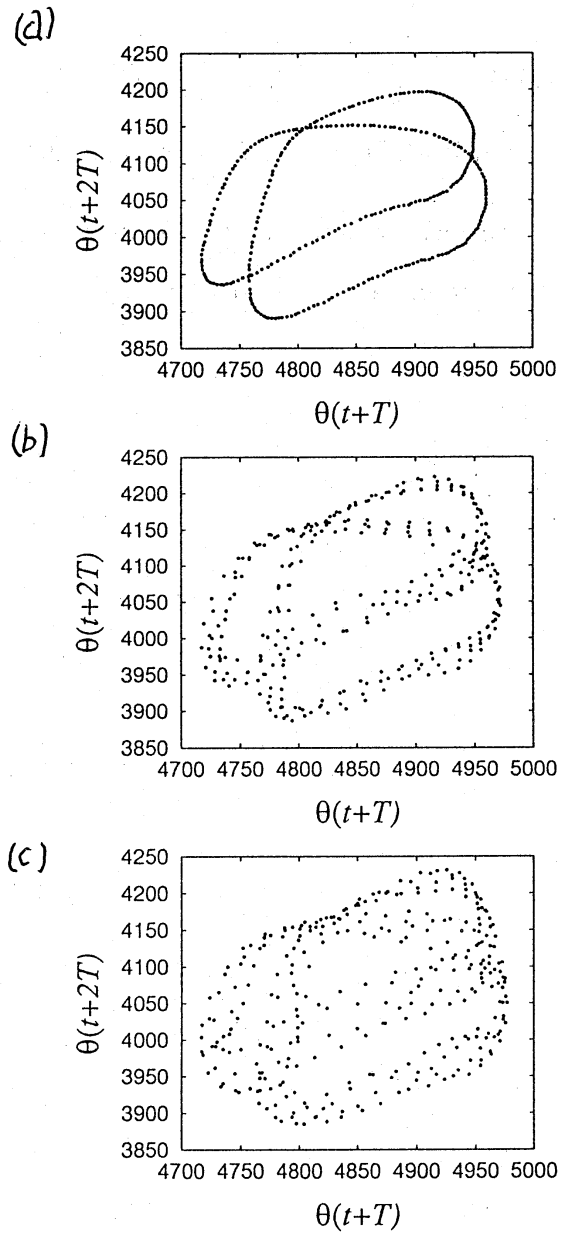


図 11: 点 (1.47, 0.72, 0.88) の温度 θ のポアンカレ写像: $Ra =$ (a) 12.600×10^4 (b) 12.620×10^4 (c) 12.625×10^4

参考文献

- [1] S.Nishikawa and H.Yahata: *J. Phys. Soc. Jpn.*, **65** (1996) 935
- [2] E.W.Bolton, F.H.Busse, and R.M.Clever: *J. Fluid Mech.*, **164** (1986) 469
- [3] M.Sano and Y.Sawada : *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids*, ed. T. Tatsumi (North-Holland, Amsterdam, 1984) p.167