

## 楕円 Dedekind 和とある無限級数の変換公式 (II)

北海道大学大学院理学研究科数学専攻博士 3 年 町出 智也 (MACHIDE Tomoya)

Department of Mathematics,  
Hokkaido University

### 1 序章

この原稿は、講究録「解析的整数論とその周辺、京都大学数理解析研究所 (2007 年 10 月)」に収録予定の原稿「楕円 Dedekind 和とある無限級数の変換公式 (I)」[Ma3] の続編である。なので、Dedekind 和の研究の背景については (I) を参照して頂く事にし、また、(I) で紹介された記号は断りなく使う事にする。その原稿の中で私達は、generalized Dedekind-Rademacher 和の楕円類似 (楕円 Dedekind-Rademacher 和) を、Bernoulli 関数の楕円類似である Kronecker の二重級数を用いて定義し、そして、楕円 Dedekind-Rademacher 和の相互法則を構成した。また、楕円 Dedekind-Rademacher 和の正当性を強調するために、Kronecker 二重級数の生成関数と Levin [Lev] により研究された (Debye) 楕円 polylogarithms の生成関数のある関係についても触れた。

本原稿の目的は、楕円 Dedekind-Rademacher 和が現れる、ある無限級数  $H_l^T(\Xi; \alpha)$  の変換公式を与えることである。その変換公式は、Arakawa の変換公式のパラメーター  $s$  が整数かつ  $s \leq -2$  の場合の楕円類似と考えられる。なぜなら、パラメーター  $\tau$  を無限大に向かわせる事によりそれらが再提供されるから、そして、その変換公式で使われる無限級数が、パラメーター  $\tau$  上で、modular 群に関する保型的性質を持つからである。

この原稿は次のように構成される。Section 2 で、目的の変換公式に現れる楕円 Dedekind-Rademacher 和  $S_{m,n}^T(\Xi; r)$  を紹介する。(「楕円 Dedekind 和とある無限級数の変換公式 (I)」で定義されたすべての楕円 Dedekind-Rademacher 和は現れない。) Section 3 では、今度は目的の変換公式のために使われるある無限級数  $H_l^T(\Xi; \alpha)$  を紹介する。そして、Section 4 で、目的の変換公式を与える。

この原稿は、プレプリント [Ma2] を加筆、省略して、日本語に翻訳したものである。

## 2 楕円 Dedekind-Rademacher 和

目的の変換公式に現れる楕円 Dedekind-Rademacher 和  $S_{m,n}^\tau(\Xi; r)$  を紹介しよう。有理数  $r$  に対して、 $n(r), d(r)$  を

$$\gcd(n(r), d(r)) = 1, \quad d(r) \geq 1, \quad r = n(r)/d(r)$$

を満たす整数とする。 $M_2(\mathbb{R})$  を実数を成分とする 2 次正方行列とし、 $SM_2(r)$  を次で定義されるその部分集合とする。

$$SM_2(r) := \left\{ \begin{pmatrix} x' & x \\ y' & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \bar{y}, n(r)\bar{y} - d(r)\bar{x} \notin \mathbb{Z}^2 \right\}. \quad (2.1)$$

ここで、 $\bar{x}, \bar{y}$  をそれぞれベクトル  $(x', x), (y', y)$  とする。 $\Xi = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in SM_2(r)$  の時、

$$S_{m,n}^\tau(\Xi; r) := S_{m,n}^\tau \begin{pmatrix} (1, 1) & (n(r), n(r)) & (d(r), d(r)) \\ (0, 0) & \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

と定義する。 $S_{m,n}^\tau \begin{pmatrix} (1, 1) & (n(r), n(r)) & (d(r), d(r)) \\ (0, 0) & \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix}$  は楕円 Dedekind-Rademacher 和である ([Ma3] 参照)。 $b' \neq b$  または  $c' \neq c$  を満たす  $S_{m,n}^\tau \begin{pmatrix} (1, 1) & (b', b) & (c', c) \\ (0, 0) & \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix}$  は決して  $S_{m,n}^\tau(\Xi; r)$  で表せられないので、目的の変換公式の中には現れない。記号の簡略化のため、

$$S_{m,n}(\frac{x}{y}; r) = S_{m,n} \begin{pmatrix} 1 & n(r) & d(r) \\ 0 & x & y \end{pmatrix}, \quad c(\frac{x}{y}; r) = c(1, n(r), d(r); 0, x, y)$$

とおく ( $c(1, n(r), d(r); 0, x, y)$  の定義も [Ma3] を参照の事)。2 次正方行列  $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して、 $j(V; \tau) = c\tau + d$  とおく。楕円 Dedekind-Rademacher 和  $S_{m,n}^\tau(\Xi; r)$  は保型的性質を持ち、 $\tau$  を  $i\infty$  に持っていく事により、古典的な Dedekind-Rademacher 和  $S_{m,n}(\frac{x}{y}; r)$  になる。

**PROPOSITION 2.1.**  $r$  を有理数、 $\Xi = \begin{pmatrix} x' & x \\ y' & y \end{pmatrix} \in SM_2(r)$  とする。

(i)  $V \in SL_2(\mathbb{Z})$  の時、

$$S_{m,n}^\tau(\Xi; r) = \frac{1}{j(V; \tau)^{m+n}} S_{m,n}^{V\tau}(\Xi {}^tV; r). \quad (2.3)$$

ただし、 ${}^tV$  は  $V$  の転置行列を意味する。特に、 $m, n \geq 3$  の時、 $S_{m,n}^\tau \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; r$  は重さ  $m+n$  の保型形式である。

(ii) 次が成り立つ。

$$\operatorname{Re} \lim_{\tau \rightarrow i\infty} S_{m,n}^{\tau}(\Xi; r) = \begin{cases} S_{m,n}(\frac{x}{y}; r) - \frac{1}{4}c(\frac{x'}{y'}; r) & (m = n = 1, x, y \in \mathbb{Z}), \\ S_{m,n}(\frac{x}{y}; r) & (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (2.4)$$

証明は [Ma3] に譲る。

### 3 無限級数 $H_l^{\tau}(\Xi; \alpha)$

$\alpha$  を代数的実無理数、 $l (\geq 3)$  を整数とする。 $\vec{y} \notin \mathbb{Z}^2$  を満たす  $\Xi = (\frac{\vec{x}}{\vec{y}}) = (\frac{x'}{y'} \frac{x}{y}) \in M_2(\mathbb{R})$  に対して、無限級数  $H_l^{\tau}(\Xi; \alpha)$  を

$$H_l^{\tau}(\Xi; \alpha) := (-1)^l \frac{l!}{(2\pi i)^{l+1}} \sum'_{m', m} \frac{e(\vec{m} \cdot \vec{x})}{(\tau m' + m)^l} \underline{F}(-\vec{y}; \alpha(\tau m' + m); \tau) \quad (3.1)$$

と定義する。ただし、和  $\sum'_{m', m}$  は  $(0, 0)$  以外のすべての  $\vec{m} = (m', m) \in \mathbb{Z}^2$  を走るとし、 $\vec{m} \cdot \vec{x} = m'x' + mx$  とする。次の Lemma より、 $H_l^{\tau}(\Xi; \alpha)$  は絶対収束し、 $\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \vec{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$  で連続となる。

**LEMMA 3.1.**  $s$  を複素数、 $\lambda', \lambda$  を非負の実数とする。 $\operatorname{Re} s > \lambda' + \lambda + 2$  の時、 $\sum'_{m', m} \frac{e(\vec{m} \cdot \vec{x}) m'^{\lambda'} m^{\lambda}}{(\tau m' + m)^s} \underline{F}(-\vec{y}; \alpha(\tau m' + m); \tau)$  は絶対収束する。

*Proof.*  $I = \sum'_{m', m} \left| \frac{e(\vec{m} \cdot \vec{x}) m'^{\lambda'} m^{\lambda}}{(\tau m' + m)^s} \underline{F}(-\vec{y}; \alpha(\tau m' + m); \tau) \right|$  とおく。 $\vec{x}, \vec{y}, \tau$  を以下固定する。 $X$  の関数として  $\underline{F}(\vec{x}; X; \tau)$  は  $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  に一位の極を持つ有理型関数なので、ある定数  $C = C(\vec{y}, \tau)$  が存在して次が成り立つ。 $-1/2 \leq \xi', \xi \leq 1/2$  を満たす複素数  $X = \tau\xi' + \xi$  に対して、

$$|X \underline{F}(\vec{y}; X; \tau)| \leq C.$$

実数  $x$  に対して、整数  $[[x]]$  と実数  $\langle\langle x \rangle\rangle$  を  $-1/2 < \langle\langle x \rangle\rangle \leq 1/2$  かつ  $x = [[x]] + \langle\langle x \rangle\rangle$  をみたすように定める。([Ma3, (2.4)]) より

$$\underline{F}(-\vec{y}; \alpha(\tau m' + m); \tau) = e(-y'[[\alpha m']] - y[[\alpha m]]) \underline{F}(-\vec{y}; \tau\langle\langle \alpha m' \rangle\rangle + \langle\langle \alpha m \rangle\rangle; \tau)$$

なので、

$$I \leq C \sum'_{m', m} \frac{|m'|^{\lambda'} |m|^{\lambda}}{|\tau m' + m|^s} \frac{1}{|\tau\langle\langle \alpha m' \rangle\rangle + \langle\langle \alpha m \rangle\rangle|}.$$

さて、 $X', X$  が実数の時、

$$\begin{aligned} |\tau X' + X| &\geq \frac{\operatorname{Im} \tau}{|\tau|} |X|, \quad |\tau X' + X| \geq |\tau|^2 \operatorname{Im} \left(-\frac{1}{\tau}\right) |X'|, \\ |\tau X' + X|^2 &\geq 2(|\tau| - |\operatorname{Re} \tau|) |X' X| \end{aligned} \quad (3.2)$$

が成り立つことがある計算により導かれる。従って、ある正の実数  $D = D(\vec{y}, \tau)$  が存在して、

$$\begin{aligned} I \leq D &\left( \sum_{m'}' \sum_m' \frac{1}{|m'|^{(s-\lambda'-\lambda)/2} |m|^{(s-\lambda'-\lambda)/2} |\langle \alpha m' \rangle|^{1/2} |\langle \alpha m \rangle|^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|\tau|^{s-\lambda'-\lambda+1}} \sum_{m'}' \frac{1}{|m'|^{s-\lambda'-\lambda} |\langle \alpha m' \rangle|} + \sum_m' \frac{1}{|m|^{s-\lambda'-\lambda} |\langle \alpha m \rangle|} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、和  $\sum_m'$  は 0 以外の整数全体を走るとする。[Ar1, Lemma 1] の証明の中で級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1+\epsilon} |\langle \alpha m \rangle|}$$

が、任意の  $\epsilon > 0$  に対して収束する事が得られていた。よって、Lemma は成り立つ。□

無限級数  $H_l^r(\Xi; \alpha)$  のいくつかの性質を紹介しよう。実数  $x$  に対して、 $x$  が整数でない時は  $\langle x \rangle$  をその小数部分  $\{x\}$  とし、整数のときは 1 とする。Arakawa [Ar1, Ar2] は次の無限級数についての変換公式を与えた。

$$H(\alpha, s, y, x) := \eta(\alpha, s, \langle y \rangle, x) + e(s/2) \eta(\alpha, s, \langle -y \rangle, -x). \quad (3.3)$$

特に、 $l (\geq 2)$  が整数の時、

$$H(\alpha, -l+1, y, x) = \begin{cases} \frac{i}{2} \left( \xi_l(x; \alpha) + i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e(mx) + (-1)^{l-1} e(-mx)}{m^l} \right) & (y \in \mathbb{Z}), \\ \frac{i}{2} \left( \xi_l(x + \{y\} \alpha; \alpha) - i \sum_m' \frac{e(m(x + \{y\} \alpha))}{m^l} \right) & (y \notin \mathbb{Z}) \end{cases} \quad (3.4)$$

となる。ただし、 $\xi_l(x; \alpha) := \sum_m' \frac{e(mx)}{m^l} \cot \pi m \alpha$  とする。Proposition 2.1 と同じように、無限級数  $H_l^r(\Xi; \alpha)$  は保型的性質を持ち、 $\tau$  を  $i\infty$  に持っていくと、 $H(\alpha, -l+1, -y, x)$  になる。

**PROPOSITION 3.2.**  $\alpha$  を代数的実無理数、 $l(\geq 3)$  を整数とする。  $\Xi = \begin{pmatrix} x' & x \\ y' & y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  は  $(y', y) \notin \mathbb{Z}^2$  を満たすとする。  
 (i)  $V \in SL_2(\mathbb{Z})$  の時、次が成り立つ。

$$H_l^\tau(\Xi; \alpha) = \frac{1}{j(V; \tau)^{l+1}} H_l^{V\tau}(\Xi {}^tV; \alpha). \quad (3.5)$$

(ii)  $CL_l(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e(mx) + (-1)^{l-1}e(-mx)}{m^l}$  とおく。このとき、

$$\operatorname{Re} \lim_{\tau \rightarrow i\infty} H_l^\tau(\Xi; \alpha) = \begin{cases} (-1)^{l+1} \frac{l!}{(2\pi i)^l} \left( H(\alpha, -l+1, 0, x) + CL_l(x) \right) & (y \in \mathbb{Z}), \\ (-1)^{l+1} \frac{l!}{(2\pi i)^l} H(\alpha, -l+1, -y, x) & (y \notin \mathbb{Z}). \end{cases} \quad (3.6)$$

が成り立つ。

証明は省略する ([Ma3] を参照せよ)。

## 4 Transformation Formula

この最後のセクションでは、楕円 Dedekind-Rademacher 和  $S_{m,n}^\tau(\Xi; \alpha)$  が現れる無限級数  $H_l^\tau(\Xi; \alpha)$  の変換公式を与える。任意の行列  $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  に対して、 $SM_2(V)$  を次のような  $M_2(\mathbb{R})$  の部分集合とする。

$$SM_2(V) := \left\{ \begin{pmatrix} x' & x \\ y' & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \bar{y}, d\bar{y} + c\bar{x} \notin \mathbb{Z}^2 \right\}. \quad (4.1)$$

有理数  $r$  と行列  $V \in SL_2(\mathbb{Z})$  に対して、同じ記号  $SM_2$  を使うことにする。 $SM_2(r)$  と  $SM_2(V)$  は、 $c \neq 0$  の時、 $SM_2(-d/c) = SM_2(V)$  という近い関係を持つからである。さて、目的の変換公式を記述するため、行列  $\Xi = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in SM_2(V)$  と複素数  $z$  に対して、関数  $R_l^\tau(\Xi; z; V)$  を次のように定義する。 $c \geq 0$  の時、

$$R_l^\tau(\Xi; z; V) := \begin{cases} \frac{(-1)^l}{l+1} \sum_{k=-1}^l \binom{l+1}{k+1} (-j(V, z))^k S_{k+1, l-k}^\tau \left( \begin{pmatrix} -\bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}; \frac{d}{c} \right) & (c > 0), \\ 0 & (c = 0). \end{cases} \quad (4.2)$$

$c < 0$  の時は、 $R_l^\tau(\Xi; z; V) := R_l^\tau(\Xi; z; -V)$  と定める。楕円 Dedekind-Rademacher 和の連続性により、 $R_l^\tau(\Xi; z; -V)$  は  $\Xi \in SM_2(V)$  上で、連続関数となる。

次が目的の変換公式である。

**THEOREM 4.1.**  $\alpha$  を代数的実無理数、 $l \geq 3$  を整数、 $V$  をモジュラー群  $SL_2(\mathbb{Z})$  の元とする。行列  $\Xi$  が  $SM_2(V)$  の元の時、次が成り立つ。

$$H_l^T(\Xi; \alpha) - j(V; \alpha)^{l-1} H_l^T(V\Xi; V\alpha) = R_l^T(\Xi; \alpha; V). \quad (4.3)$$

この定理の証明には次の二つの補題があれば良い。

**LEMMA 4.2.** 行列  $T$  と  $S$  をそれぞれ  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  and  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  と定義する。もし  $V \in \{T^{\pm 1}, S\}$  かつ  $\Xi \in SM_2(V)$  ならば、(4.3) は成り立つ。

**LEMMA 4.3.**  $z$  を複素数、 $l$  を正整数、そして  $V, V_1, V_2$  を  $V = V_2 V_1$  を満たすモジュラー群  $SL_2(\mathbb{Z})$  の元とする。  $\Xi \in SM_2(V) \cap SM_2(V_1)$  の時、

$$R_l^T(\Xi; z; V_1) + j(V_1, z)^{l-1} R_l^T(V_1 \Xi; V_1 z; V_2) = R_l^T(\Xi; z; V) \quad (4.4)$$

が成り立つ。

これらの補題の証明は [Ma2] を参照のこと。それでは定理の証明をしよう。

*Proof of Theorem 4.1.*  $G = \{T^{\pm 1}, S\}$  とおく。任意の正整数  $n$  に対して、 $U_n$  を次のような  $SL_2(\mathbb{Z})$  の部分集合とする。

$$U_n := \{V = V_n V_{n-1} \cdots V_1 \mid V_1, \dots, V_k \in G \ (k = 1, \dots, n)\}.$$

モジュラー群は  $G$  の元で生成されるので、任意の  $V \in SL_2(\mathbb{Z})$  に対して、 $V \in U_n$  となる正整数  $n$  がある。さて、(4.3) を  $n$  に関する帰納法を使って証明しよう。 $n = 1$  の時は Lemma 4.2 により (4.3) は成り立つ。 $V \in U_{n-1}$  の時、(4.3) が成り立つと仮定する。 $V \in U_n$  とする。 $U_n$  の定義より、 $V = V_2 V_1$  となる二つの行列  $V_1 \in G$  と  $V_2 \in U_{n-1}$  がある。 $j(V; \alpha) = j(V_1; \alpha)j(V_2; V_1\alpha)$  より、(4.3) の左辺は

$$\begin{aligned} & \left( H_l^T(\Xi; \alpha) - j(V_1; \alpha)^{l-1} H_l^T(V_1 \Xi; V_1 \alpha) \right) + \\ & j(V_1; \alpha)^{l-1} \left( H_l^T(V_1 \Xi; V_1 \alpha) - j(V_2; V_1 \alpha)^{l-1} H_l^T(V_2(V_1 \Xi); V_2(V_1 \alpha)) \right) \end{aligned}$$

となる。 $\Xi \in SM_2(V) \cap SM_2(V_1)$  の時、4.3 と帰納法の仮定より、これは (4.3) の右辺に等しい。 $SM_2(V) \cap SM_2(V_1)$  は  $M_2(\mathbb{R})$  において稠密であり、 $H_l^T(\Xi; \alpha)$  と  $R_l^T(\Xi; \alpha; V)$  はその定義域で連続関数なので、(4.3) は  $\Xi \in SM_2(V)$  においても成り立つ。  $\square$

**REMARK 4.4.**  $\tau$  を  $i\infty$  に持っていくと、 $R_l^T(\Xi; z; V)$  は [Ca2, Eq. (1.2)] の中で扱われている  $f_{l+1}(-d, c; z)$  と同じになる。つまり、(4.4) は [Ca2, Eq. (1.11)] を再提供する。

## 参考文献

- [Ap1] T. M. Apostol, *Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series*, Duke Math. J. **17** (1950), 147–157.
- [Ap2] T. M. Apostol, *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, Graduate Texts in Mathematics, 41, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Ar1] T. Arakawa, *Generalized eta-functions and certain Ray class invariants of real quadratic fields*, Math. Ann. **260** (1982), 475–494.
- [Ar2] T. Arakawa, *Dirichlet series  $\sum_{n=1}^{\infty} \cot \pi n \alpha / n^s$ , Dedekind sums, and Hecke  $L$ -functions for real quadratic fields*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **37** (1988), 209–235.
- [As1] T. Asai, *Some arithmetic on Dedekind sums*, J. Math. Soc. Japan **38** (1986), no. 1, 163–172.
- [As2] T. Asai, 2006, private email.
- [Ba1] A. Bayad, *Sommes de Dedekind elliptiques et formes de Jacobi*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **51** (2001), 29–42.
- [Ba2] A. Bayad, *Sommes elliptiques multiples d’Apostol-Dedekind-Zagier*, C. R. Acad. Sci. Paris, **339** (2004), 457–462.
- [Ber1] B.C. Berndt, *Generalized Dedekind eta-functions and generalized Dedekind sums*, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 495–508.
- [Ber2] B.C. Berndt, *Generalized Eisenstein series and modified Dedekind sums*, J. Reine Angew. Math. **272** (1974), 182–193.
- [Ber3] B.C. Berndt, *Dedekind sums and a paper of G. H. Hardy*, J. London Math. Soc. (2) **13** (1976), 129–137.
- [Ca1] L. Carlitz, *Some theorems on generalized Dedekind sums*, Pacific J. Math. **3** (1953), 513–522.
- [Ca2] L. Carlitz, *A further note on Dedekind sums*, Duke Math. J. **23** (1956), 219–223.
- [Di] U. Dieter, *Cotangent sums, a further generalization of Dedekind sums*, J. Number Theory **18** (1984), 289–305.
- [De] R. Dedekind, *Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann*, Bernhard Riemann’s Gesammelte mathematische Werke, 2nd ed., Teubner, Leipzig,

1892, 466–472.

- [Eg] S. Egami, *An elliptic analogue of the multiple Dedekind sums*, *Compositio Math.* **99** (1995), 99–103.
- [FY] S. Fukuhara and N. Yui, *Elliptic Apostol sums and their reciprocity laws*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), no.10. 4237–4245.
- [Ha] U. Halbritter, *Some new reciprocity formulas for generalized Dedekind sums*, *Results Math.* **8** (1985), 21–46.
- [HH] R.R. Hall and M.N. Huxley, *Dedekind sums and continued fractions*, *Acta Arith.* **63** (1993), 79–90.
- [HWZ] R.R. Hall, J. C. Wilson and D. Zagier, *Reciprocity formulae for general Dedekind-Rademacher sums*, *Acta Arith.* **73** (1995), 389–396.
- [Is] S. Iseki, *The transformation formula for the Dedekind modular function and related functional equations*, *Duke Math. J.* **24** (1957), 653–662.
- [It1] H. Ito, *On a property of elliptic Dedekind sums*, *J. Number Theory* **27** (1987), 17–21.
- [It2] H. Ito, *A function on the upper half space which is analogous to the imaginary part of  $\log \eta(z)$* , *J. Reine Angew. Math.* **373** (1987), 148–165.
- [It3] H. Ito, *A density result for elliptic Dedekind sums*, *Acta Arith.* **112** (2004), 199–208.
- [Lev] A. Levin, *Elliptic polylogarithms : An analytic theory*, *Compositio Math.* **106** (1997), no.3, 267–282.
- [Le] J. Lewittes, *Analytic continuation of Eisenstein series*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **177** (1972), 469–490.
- [Ma1] T. Machide, *An elliptic analogue of generalized Dedekind-Rademacher sums*, to appear in *J. Number Theory* **128** (2008) 820–834.
- [Ma2] T. Machide, *Elliptic Dedekind-Rademacher sums and transformation formulae of certain infinite series*, preprint, EPrint Series of Department of Mathematics, Hokkaido University, # 863, 2007, 22 pages.
- [Ma3] T. Machide, 楢円 Dedekind 和とある無限級数の変換公式 (I), 解析的整数論とその周辺、京都大学数理解析研究所 (2007年10月), to appear in *Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku*.
- [RG] H. Rademacher and E. Grosswald, *Dedekind Sums*, *Carus Mathematical*

Monographs, No. 16, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1972.

- [Sc] R. Sczech, *Dedekindsummen mit elliptischen Funktionen*, Invent. Math. **76** (1984), 523–551.
- [We] A. Weil, *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.