

管内の気柱の熱音響振動におけるエネルギーの流れ

阪大院 基礎工 杉本 信正 (Nobumasa SUGIMOTO)
清水 大 (Dai SHIMIZU)
木村祐一郎 (Yuichiro KIMURA)

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1. はじめに

一端が開き、他端が平らな底をもつ管の側壁に適切な温度勾配を設けると、管の内部の気体がいわゆる熱音響効果によって不安定化し、振動し始めることが知られている。特にヘリウムを用い、開放端を極低温にした場合に生じる振動はタコニス振動と呼ばれている [1]。この安定性の解析は古くはロットにより行われ、問題を簡単化するためにステップ型の温度分布 (図 1) に対して、振動が発生する臨界条件が求められている [2-5]。この条件は後に実験で検証され、よい一致が報告されている [6]。

しかし、現実には熱伝導性があるので、ステップ型の分布を仮定すること自体、その解釈は難しい。また、ステップの両側の高温側と低温側の領域では、温度は一樣で気体は温度勾配の影響を受けないことになる。したがって、熱音響効果は全てこの特異面の作用による。ロットのモデルでは、臨界条件は一応求めることができるものの、温度勾配によって生じるエネルギー流束を計算することができないという欠点がある。

そこで昨年度の発表では、滑らかな温度分布を仮定し、一種の「くりこみ」の方法を用いた新しい理論を展開し、放物型の温度分布の場合には臨界条件が解析的に求まることを報告した [7]。ロットの理論は、境界層厚さの管径に対する比の無限項まで考慮した理論であるのに対し、報告 [7] で用いた方法是一種の特異摂動法であり、臨界条件が境界層厚さの 1 次近似の範囲で求まる利点がある。このため解析は簡単化されるが、境界層が厚くなると当然ロットの理論より近似は悪くなることを注意したい。本報告はその続きとして、ロットの理論では得ることのできないエネルギー流束の時間平均量を求め、臨界振動がエネルギー的にいかに維持されるかを考える。導出に用いる計算の詳細は、文献 [8] をご覧頂きたい。

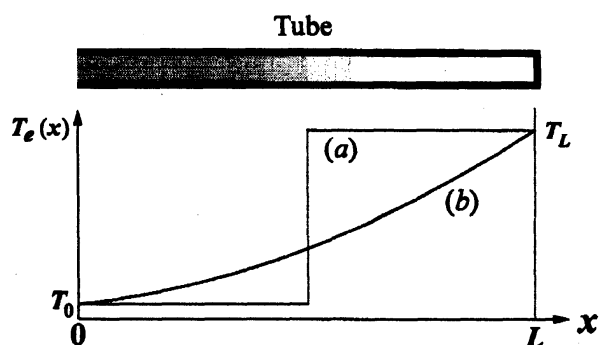


図 1: 一端が開き他端が閉じた 1/4 波長管と (a): ステップ型温度分布, (b): 放物型温度分布。

2. 臨界条件導出のまとめ

壁面温度を $T_e(x)$ とし、軸方向に非一樣とする。ここで、 x は軸方向の座標を表し、以下においては時刻を t とする。壁面に沿って速度及び温度境界層が出現するが、その厚さ

は管の半径 R に比べて十分小さいと仮定する。臨界振動の角周波数を ω とし、超過圧を $p'(x, t) [= P(x)e^{i\omega t}]$ とすると、複素振幅 P は以下の方程式によって支配される:

$$(1 - 2C\delta_e)a_e^2 \frac{d^2 P}{dx^2} + [1 - 2(C + C_T)\delta_e] \frac{a_e^2}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{dP}{dx} + \omega^2 P = 0. \quad (2.1)$$

ここで, C, C_T は定数で,

$$C = 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}} \quad \text{および} \quad C_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{Pr} + Pr} \quad (2.2)$$

で定義され, γ, Pr はそれぞれ, 比熱比およびプラントル数である。また, $a_e(x) (= \sqrt{\gamma p_0 / \rho_e})$, $\nu_e(x)$ はそれぞれ局所音速および動粘性率であり, $\rho_e(x), p_0$ は平衡状態での密度および圧力 (一定) を表す。さらに, $\delta_e(x)$ は

$$\delta_e(x) = \frac{(1 - i)}{R} \sqrt{\frac{\nu_e}{2\omega}} = \frac{1}{R} \left(\frac{\nu_e}{i\omega} \right)^{1/2} \quad (|\delta_e| \ll 1) \quad (2.3)$$

で定義される複素関数で, その絶対値は境界層の厚さの管の半径 R に対する比を表し, この値は 1 より十分小さい。

管の長さを L として座標 x の原点を開放端にとり, 以下の境界条件を課す:

$$P = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad \text{および} \quad \frac{dP}{dx} = -\frac{(\gamma - 1)}{\sqrt{Pr}} \frac{\sqrt{\nu_e}}{a_e^2} (i\omega)^{3/2} P \quad \text{at} \quad x = L. \quad (2.4)$$

ここで, $x = 0$ での条件は開放端からの放射を無視し, $x = L$ での条件は閉端での温度境界層の効果を表している。

この境界条件を用いると, 方程式 (2.1) の ω^2 に対する固有値問題が設定されるが, 一般の温度分布に対して解析解を得ることは難しい。しかし, 温度分布が次の放物型分布

$$\frac{T_e}{T_0} = \left(1 + \lambda \frac{x}{L} \right)^2 \quad (2.5)$$

(ただし, $T_0 = T_e(0)$) の場合には, 次の周波数方程式が導かれる:

$$i\psi \left(\frac{e^{ik+\xi_L} + e^{ik-\xi_L}}{e^{ik+\xi_L} - e^{ik-\xi_L}} \right) = \frac{\lambda}{2} - \frac{2C_T}{C} \lambda b + \left(1 - \frac{1}{C} \right) \frac{R}{L} \sigma^2 b. \quad (2.6)$$

ここで, $\omega L / a_0$ を無次元周波数 σ とし, $\psi = (\sigma^2 - \lambda^2 / 4)^{1/2}$ とおくと, $k^\pm L = -i\lambda/2 \pm \psi$, $\xi_L = L\lambda^{-1} \log(1 + \lambda) + Lb$ であり, a_0, b はそれぞれ $a_e(0), C\delta_e(0)$ を表す。この周波数方程式を λ の値を与えて, 半径 R をパラメータとしながら σ の実解を求める。この条件が臨界条件で, 詳しくは文献 [7] を参照されたい。

臨界振動では, 圧力振幅は最低次で次のように与えられる:

$$P = \frac{\mathcal{P}}{\sqrt{\eta}} \sin \theta \quad \text{ただし} \quad \theta = \frac{\psi}{\lambda} \log \eta \quad \text{および} \quad \eta = 1 + \lambda \frac{x}{L}. \quad (2.7)$$

ここで, $\mathcal{P}$ は任意定数であり, ψ が実数であると $\mathcal{P}$ は一般に正にとることができ, ψ が虚数であるとき, すなわち $\psi = i\phi$ には, $\sin \theta$ は $i \sinh |\theta|$ となり, $i\mathcal{P}$ を正にとる。

3. 平均エネルギー流束の評価

臨界振動する気体の中を流れるエネルギーの一周期にわたる時間平均を、振幅の二次項の範囲で求める。まず、境界層の外部の主流部のエネルギーの流れを求め、次いで境界層内の流れを明らかにし、最終的には管の全断面にわたる量を求める。

3.1. 主流部のエネルギー方程式

主流部は断熱近似が成り立つものと仮定し、線形化された連続の式および運動方程式から、エネルギー式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_e u'^2 + \frac{p'^2}{2 \rho_e a_e^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (p' u') = \frac{2}{R} p' v_b \quad (3.1)$$

が得られる。ここで、 u' は主流部の x 方向速度を表し、 v_b は境界層外縁で管断面内内向き法線方向の速度であり、 $-1/2$ 階微分を使って以下のように与えられる [8] :

$$v_b = C \sqrt{\nu_e} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right) + C_T \frac{\sqrt{\nu_e} dT_e}{T_e dx} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} u'}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \quad (3.2)$$

式 (3.1) を一周期 $\tau (= 2\pi/\omega)$ にわたって平均し、平均量を横線を上に付けて表すと、

$$\frac{d\bar{I}}{dx} = \frac{2}{R} \overline{p' v_b} \quad \text{ただし} \quad \bar{I} \equiv \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} I dt \quad (3.3)$$

となる。ここで、 I は音響エネルギー流束 (密度) $p' u'$ を表す。

いま v_b の複素振幅を V_b とし、複素共役を $*$ で表すと、平均値は

$$\overline{p' v_b} = \frac{1}{2} \text{Re}\{P^* V_b\} = \mathcal{A}_e (-C + C_T \chi) P^2 \quad (3.4)$$

となる。ここで、 $T_e(0) = T_0$, $\nu_e(0) = \nu_0$ とおくと

$$\mathcal{A}_e(x) \equiv \frac{\sqrt{\nu_e \omega}}{\sqrt{8} \rho_e a_e^2} = \mathcal{A}_0 \sqrt{\frac{T_e}{T_0}}, \quad \mathcal{A}_0 = \frac{\sqrt{\nu_0 \omega}}{\sqrt{8} \rho_0 a_0^2} \quad (3.5)$$

である。係数 $\mathcal{A}_e$ は音響アドミタンス $1/\rho_e a_e$ の次元をもっている。そして、 $\sqrt{\nu_e \omega}/a_e (\ll 1)$ は境界層厚さ $\sqrt{\nu_e/\omega}$ の代表波長 a_e/ω に対する比を表すので、 $\mathcal{A}_e$ は $1/\rho_e a_e$ よりは十分小さい。また、 χ は対数温度勾配と対数圧力振幅勾配の積からなる次の量で定義される :

$$\chi \equiv \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{1}{P} \frac{dP}{dx} \frac{a_e^2}{\omega^2} = \frac{d \log(T_e/T_0)}{dx} \cdot \frac{d \log(P/p_0)}{dx} \cdot \frac{a_e^2}{\omega^2} \quad (3.6)$$

3.2. 境界層内の音響流

境界層内のエネルギー流束を求める前に、質量流れである音響流についてまず議論する。そのために、変数の定義をはっきりさせる。これまで各点での平衡状態での値を添え字 e をつけて表してきたのに対し、時間平均値は添え字 m をつけて区別する。両者は同じではなく、振幅の2次量だけ一般に異なる。主流部の攪乱をプライムを付け、境界層内の攪乱はチルドを付けて表す。例えば、密度は主流部では $\rho_e(x) + \rho'(x, t)$, 一方境界層で

は $\rho_e + \tilde{\rho}(x, n, t)$ と記す. ここで, n は境界層座標で, 壁面に垂直内向きにとり, 壁面を $n = 0$ とする.

境界層内の密度を $\rho = \rho_m + \tilde{\rho} + \rho_e - \rho_m$ と書くと, $\rho_e - \rho_m$ は 2 次量となり, 1 次量の範囲では ρ_m と ρ_e の区別はしなくてもよく, ρ_m は ρ_e とおく. また, 境界層内の密度が主流部での密度からどれだけ異なるかを表す欠損量を導入し, $\rho = \rho_e + \rho' + \tilde{\rho}$ で定義すると, $\tilde{\rho} = \rho' + \tilde{\rho}$ とかける. なお, 軸方向の速度に対しては, 平衡状態ではゼロであるので, u' の平均は 2 次量, $\bar{u} (= u' + \tilde{u})$, $\tilde{u}$ の平均も 2 次量である.

主流部での連続の式を時間平均すると,

$$\frac{d}{dx} \overline{(\rho_e u' + \rho' u')} = \frac{2}{R} \overline{\rho_b v_b} \quad (3.7)$$

となる. 同様にして, 境界層にわたって $n = 0$ から $n = \infty$ まで積分し, さらに時間平均をとると

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \overline{(\rho_e \tilde{u} + \tilde{\rho} \tilde{u})} dn + \overline{\rho_b v_b} = 0 \quad (3.8)$$

となる. 式 (3.7), (3.8) にそれぞれ主流部の断面積 $A (\approx \pi R^2)$, その円周 $2\pi R$ を掛けて足し合わせると

$$\frac{d\bar{M}}{dx} = 0 \quad (3.9)$$

となり, 管の全断面にわたる質量流束は

$$M = \pi R^2 (\rho_e u' + \rho' u') + 2\pi R \bar{M} \quad (3.10)$$

で与えられる. ここで欠損量 $\bar{M}$ は

$$\bar{M} = \int_0^\infty (\rho_e \tilde{u} + \rho' \tilde{u} + \tilde{\rho} u' + \tilde{\rho} \tilde{u}) dn \quad (3.11)$$

で定義される. 式 (3.9) は全断面にわたる質量流束が変化しないことを示しており, 一端が閉じている場合にはそこではゼロであるから, 任意の断面でもゼロになる.

3.3. 境界層内の熱音響流

境界層内のエネルギー流束を正しく評価するには, 次の完全なエネルギー式が必要である:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + e \right) \right] + \nabla \cdot (\rho H \mathbf{v} - k \nabla T - \mathbf{v} \tau) = 0. \quad (3.12)$$

ここで, $\mathbf{v}$, $e (= c_v T)$, $h (= e + p/\rho = c_p T)$, $H (= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2 + h)$ はそれぞれ, 速度ベクトル, 単位質量あたりの内部エネルギー, エンタルピー, 全エンタルピーである. また, τ は粘性応力テンソルであり, $\rho H \mathbf{v} - k \nabla T - \mathbf{v} \tau$ が気体中のエネルギー流束である.

主流部では粘性や熱伝導性は無視しているので, (3.12) を主流部断面にわたって積分し, さらに時間平均をとると

$$\frac{d}{dx} \overline{(\rho H u)} = \frac{2}{R} \overline{\rho_b H_b v_b} \quad (3.13)$$

となる. 二次項の近似の範囲では, ρ , H は一次項だけ評価すればよく, (3.13) は

$$\frac{d}{dx} \overline{(\rho_e h_e u' + \rho_e h' u' + h_e \rho' u')} = \frac{2}{R} \overline{(\rho_e h_e + \rho_e h' + h_e \rho') v_b}. \quad (3.14)$$

となる。ただし、 $h_e = c_p T_e$ であり、境界層外縁での H_b は主流部の値に等しい。

一方、(3.12) に境界層近似を施すと

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho H - p) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho H u) + \frac{\partial}{\partial n}(\rho H v) = k \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} + \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(u \frac{\partial u}{\partial n} \right) \quad (3.15)$$

となる。ここで、 u は x 方向速度、 v は n 方向の速度成分で、壁面 $n = 0$ で共にゼロである。この式を境界層厚さにわたって積分すると

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \overline{(\rho H u)} dn + \overline{\rho_b H_b v_b} = \overline{Q} \quad (3.16)$$

となり、 Q は壁から気体に向かって入る熱流束（密度） $-k \partial T / \partial n$ を表し、 $\partial T / \partial n$ 、 $\partial u / \partial n$ は $n \rightarrow \infty$ でゼロになる。式(3.16)は、壁面から入った熱流束 $\overline{Q}$ がエンタルピー流束として境界層内だけでなく主流部にも流れることを示している。ここで、 $h = h_e + \tilde{h}$ とおいて、(3.16) を二次項まで評価すると

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \overline{(\rho_e h_e \tilde{u} + \rho_e \tilde{h} \tilde{u} + h_e \tilde{\rho} \tilde{u})} dn + \overline{(\rho_e h_e + \rho_e \tilde{h}' + h_e \tilde{\rho}') v_b} = \overline{Q} \quad (3.17)$$

となる。

さて、(3.14)、(3.16) にそれぞれ、 πR^2 、 $2\pi R$ を掛けて加えると

$$\frac{d}{dx} (\overline{W} + h_e \overline{M}) = 2\pi R \overline{Q} \quad (3.18)$$

となる。ただし、

$$W = \pi R^2 \rho_e h' u' + 2\pi R \tilde{W} \quad (3.19)$$

であり、欠損量 $\tilde{W}$ は

$$\tilde{W} = \rho_e \int_0^\infty (h' \tilde{u} + \tilde{h} u' + \tilde{h} \tilde{u}) dn \quad (3.20)$$

によって与えられる。ここで、 $\overline{W} + h_e \overline{M}$ が全断面を通して、軸方向に流れるエンタルピー流束の時間平均であり、 $h_e \overline{M}$ が音響流によるものであるが、この寄与はゼロである。

熱力学の関係 $h' = p' / \rho_e + T_e S'$ を用いて、(3.19) の $\rho_e h' u'$ を次のように書き直す

$$\rho_e h' u' = p' u' + \rho_e T_e S' u' \quad (3.21)$$

と、 $p' u'$ は軸方向の音響エネルギー流束 I に等しく、 $\rho_e T_e S' u'$ は移流による熱流束であり、 J と記す。 $d\bar{I}/dx$ は(3.3)によって与えられる一方、 $\bar{J}$ は主流部ではゼロになる。これは S' と u' の位相が $\pi/2$ 違うためである。

次に $\tilde{W}$ の変化を求める。式(3.7)に h_e を掛けると、

$$\frac{d}{dx} \overline{(\rho_e h_e u' + h_e \rho' u')} - \overline{(\rho_e u' + \rho' u')} \frac{dh_e}{dx} = \frac{2}{R} \overline{\rho_b h_e v_b} \quad (3.22)$$

となる。これを(3.14)から差し引くと

$$\frac{d}{dx} \overline{(\rho_e h' u')} + \overline{(\rho_e u' + \rho' u')} \frac{dh_e}{dx} = \frac{2}{R} \overline{\rho_e h' v_b} \quad (3.23)$$

となる。ここで、 dh_e/dx の係数は平均質量流束であり、いまの問題ではゼロである。式 (3.23) を (3.18) に用いると、

$$\frac{d\bar{W}}{dx} + \overline{\rho_e h' v_b} + \bar{M} \frac{dh_e}{dx} = \bar{Q} \quad (3.24)$$

となる。 $\bar{M}$ を無視すると、 $\bar{Q}$ は次のように与えられる:

$$\bar{Q} = \overline{p' v_b} + \rho_e T_e \overline{S' v_b} + \frac{d\bar{W}}{dx}. \quad (3.25)$$

右辺第1項は既に (3.4) で求まっている。第2項は注意を要する。 S' は温度勾配 dT_e/dx によって与えられ、一方 v_b も温度勾配を含んでいるため、無視してきた温度勾配の積が現れることになり取り扱いに困る。しかし計算は一応できて、

$$\overline{p' v_b} + \rho_e T_e \overline{S' v_b} = \mathcal{A}_e \left(1 - \frac{\chi}{\gamma - 1} \right) (-C + C_T \chi) P^2 \quad (3.26)$$

となる。

残っている $\bar{W}$ は、エンタルピーを温度で表すと計算でき

$$\bar{W} = \frac{c_p T_e \mathcal{A}_e}{2\omega^2} (K - K_T \chi) \frac{dP^2}{dx} \quad (3.27)$$

となる。ただし、

$$K = \frac{(\gamma - 1)(1 - \sqrt{Pr} Pr)}{\sqrt{Pr}(1 + Pr)} \quad \text{および} \quad K_T = \frac{1 + \sqrt{Pr} + Pr}{(1 + Pr)(\sqrt{Pr} + Pr)} \quad (3.28)$$

であり、 $K/K_T = (\gamma - 1)(1 - Pr)$ である。詳しくは文献 [8] を参照されたい。

エンタルピー流束の欠損も、関係 $c_p T' = p'/\rho_e + T_e S'$, $c_p \tilde{T} = T_e \tilde{S}$ を用いると次のように求まる:

$$\bar{W} = \bar{I} + \bar{J}. \quad (3.29)$$

ここで、 $\bar{I}$, $\bar{J}$ は音響エネルギー流束および熱流束の欠損量を表し、

$$\bar{I} = -\frac{(\gamma - 1)c_p T_e \mathcal{A}_e}{2\omega^2} \frac{dP^2}{dx}, \quad \bar{J} = \frac{c_p T_e \mathcal{A}_e}{2\omega^2} (K_J - K_T \chi) \frac{dP^2}{dx} \quad (3.30)$$

である。ただし

$$K_J = \frac{(\gamma - 1)(1 + \sqrt{Pr})}{\sqrt{Pr}(1 + Pr)}, \quad (3.31)$$

$K_J/K_T = (\gamma - 1)(1 + \sqrt{Pr})^2/(1 + \sqrt{Pr} + Pr) > \gamma - 1$ である。

最後に、管の断面にわたるエネルギーバランスについて述べる。側壁から入る熱流束 $\mathcal{Q} (= 2\pi R \bar{Q})$ は、(3.18) を用いると

$$\mathcal{Q} = \frac{dI}{dx} + \frac{dJ}{dx} \quad (3.32)$$

で与えられる。ここで、 $\mathcal{I} = \pi R^2 \bar{I} + 2\pi R \bar{J}$ 、 $\mathcal{J} = 2\pi R \bar{J}$ 、であり、それぞれ次の関係を満たす：

$$\frac{d\mathcal{I}}{dx} = 2\pi R \mathcal{A}_e \left[-C + 1 + (C_T - \frac{1}{2})\chi - \kappa \right] P^2. \quad (3.33)$$

ただし

$$\kappa \equiv \left(\frac{1}{P} \frac{dP}{dx} \frac{a_e}{\omega} \right)^2, \quad (3.34)$$

$$\frac{d\mathcal{J}}{dx} = 2\pi R \frac{\mathcal{A}_e}{(\gamma - 1)} \left[K_J \left(\frac{1}{2}\chi - 1 + \kappa \right) + 2K_T \left(\chi - \kappa \frac{d^2 a_e}{dx^2} \frac{a_e}{\omega^2} \right) \right] P^2 \quad (3.35)$$

である。注意したいのは、 $d^2 a_e / dx^2$ は温度の2階微分を含み、その精度はいまの理論の範囲では保証されず、 Q の局所的な値は正確には求めることはできない。しかし、側壁全体にわたる総量は求まり、次の関係を満足しなければならない：

$$\int_0^L Q dx = (\mathcal{I} + \mathcal{J})_{x=L} - (\mathcal{I} + \mathcal{J})_{x=0}. \quad (3.36)$$

4. 音響エネルギー流束および熱流束の分布

これまで導いた式を用いて、放物型の温度分布の場合の臨界振動における各流束の大きさを求める。すべての流束は係数 $\sqrt{\nu_e}$ に比例し、言い換えれば δ_e の1次量である。したがって、 P は既に(2.7)で示した最低次項だけ考慮すればよい。

計算では管の縦横比 $R/L = 0.05$ とし、気体はヘリウムを想定し、 $C = 1.82$, $C_T = 1.17$, $\gamma = 1.67$, $Pr = 0.667$ ととる。このとき、 $K = 0.224$, $K_T = 1.00$, $K_J = 0.894$ である。流束を計算する代表的な状態として、温度比 $(1 + \lambda)^2 = 64$ と選ぶと、 $\sigma = 3.22$, $\zeta = |b|/\sqrt{2} = 0.0277$, $\mathcal{A}_0 = (\rho_0 a_0)^{-1} (R/L) \sigma \zeta / (2C) = 1.23 \times 10^{-3} / \rho_0 a_0$ となる。なお、極限 $b \rightarrow 0$ では、温度比 $(1 + \lambda)^2$ は、 $\sigma = 4.86$ で392に近づく。

さて χ と κ の値をまず計算すると、

$$\chi = \frac{\lambda}{\sigma^2} (-\lambda + 2\psi \cot \theta) \geq 0, \quad \kappa = \frac{1}{4\sigma^2} (-\lambda + 2\psi \cot \theta)^2 = \frac{\sigma^2}{4\lambda^2} \chi^2 \quad (3.37)$$

となる。温度、圧力振幅が x と共に単調に増加するので、 χ は至る所で正、 κ は χ^2 に比例する。等号が成立するのは、 $x = L$ で極限 $b \rightarrow 0$ の場合である。図2に χ のグラフを示す。それは $x/L \rightarrow 0$ で発散し、 x/L が大きくなると減少する。 χ の値が、各流束の正負が替わる C/C_T , K_J/K_T , K/T_T の値に等しくなる位置を $x = x_C, x_J, x_K$ で示す。

4.1. 音響エネルギー流束の分布

音響エネルギー流束 $\bar{I}$ は、(3.4)を考慮して(3.3)を積分すれば求まる。境界層の欠損を考慮せずに、 $\bar{I}$ に πR^2 を掛けると

$$\pi R^2 \bar{I} = B P^2 \frac{\lambda}{\sigma^2} \left[C_T \eta \sin^2 \theta - \left(\sigma^2 C / \lambda^2 + 2C_T \right) f(\eta) \right] \quad (4.1)$$

となる。ただし、

$$B = 2\pi R L \mathcal{A}_0 = 2\pi R L \frac{\sqrt{\nu_0 \omega}}{\sqrt{8} \rho_0 a_0^2}, \quad (4.2)$$

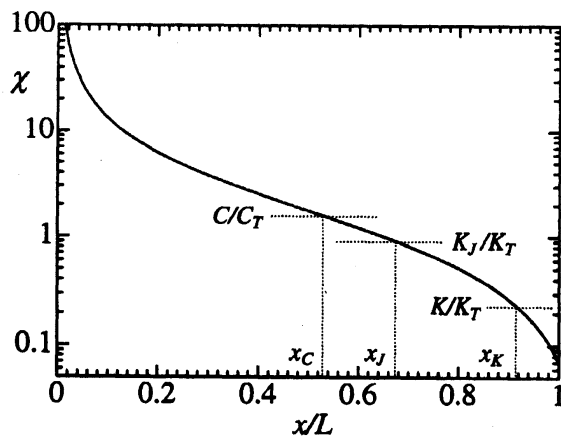


図2：管に沿った各位置での χ の値。ここで、 χ の値がそれぞれ、 C/C_T , K_J/K_T , K/K_T の値に等しくなる位置を、 x_C , x_J , x_K で示す。

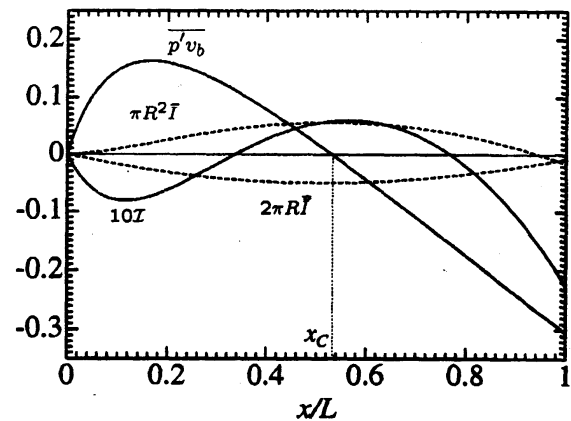


図3：境界層が主流部にするパワー $\overline{p'v_b}$ と音響エネルギー流束の分布。ここで、 $\pi R^2 \bar{I}$, $2\pi R \tilde{I}$ はそれぞれ、主流部を流れる流束と境界層内を流れる欠損流束であり、 $10I$ は全断面を流れる流束を10倍拡大して表示したものである。

$$f(\eta) \equiv \int_1^\eta \sin^2 \left(\frac{\psi}{\lambda} \log \eta' \right) d\eta' = \frac{\psi^2}{2\sigma^2} (\eta - 1) - \frac{\lambda}{4\sigma^2} \eta (-\lambda + 2\psi \cot \theta) \sin^2 \theta \quad (4.3)$$

である。ここで、(4.3) は ψ が純虚数の場合である。

一方、境界層内の欠損は (3.30) に $2\pi R$ を掛けると得られ、

$$2\pi R \tilde{I} = -\frac{B\mathcal{P}^2}{2\sigma^2} \eta (-\lambda + 2\psi \cot \theta) \sin^2 \theta \quad (4.4)$$

となる。これは $\kappa = 1 - \chi/2$ なる点で最小の値をとる。全断面にわたる音響エネルギー流束が、(4.1) と (4.4) の和である。図3に、 $\pi R^2 \bar{I}$ と $2\pi R \tilde{I}$ を破線で示し、その和 $I (= \pi R^2 \bar{I} + 2\pi R \tilde{I})$ を10倍拡大した量を実線で示す。ここで、係数 $B(i\mathcal{P})^2$ は省き、今後も省略する。

これから、音響エネルギー流束は主流部では閉端部に向かって流れる一方、境界層内の欠損流束は開放端に向かって流れる。主流部全体の流束の大きさ $\pi R^2 \bar{I}$ が、薄い境界層内の欠損量 $2\pi R \tilde{I}$ と同程度であるので、境界層内では欠損量が支配的である。閉端部付近では、 $\pi R^2 \bar{I}$ と $2\pi R \tilde{I}$ は負の値をとる。1次の近似では、主流部の流束は境界条件より正でなくてはならない。主流部から閉端面の境界層に流れる流束は

$$\overline{p'u} = (C - 1) A_e |P|^2 > 0 \quad (4.5)$$

で与えられるので、この境界層はパッシブにしか作用しない。したがって符号の不一致は b の2次項に由来するものと予想される。

4.2. 熱流束の分布

次に熱流束の分布を求める。全流束は、(3.30) の $\tilde{J}$ に $2\pi R$ を掛ければよく、

$$2\pi R \tilde{J} = \frac{B\mathcal{P}^2}{2(\gamma - 1)\sigma^2} \eta (K_J - K_T \chi) (-\lambda + 2\psi \cot \theta) \sin^2 \theta \quad (4.6)$$

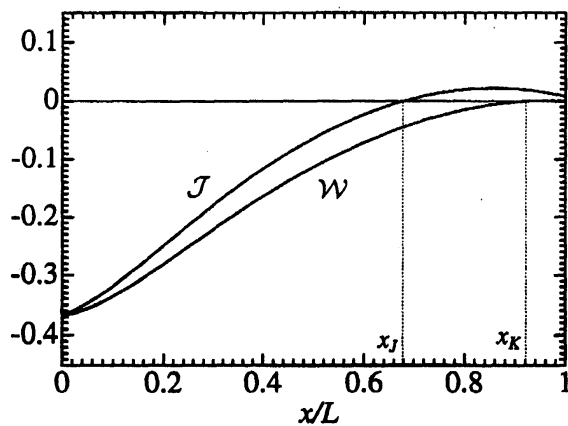


図4：管の全断面にわたる移流による熱流束 J とエンタルピー流束 W の分布。それぞれの正負が変わる位置を、 x_J, x_K で示す。

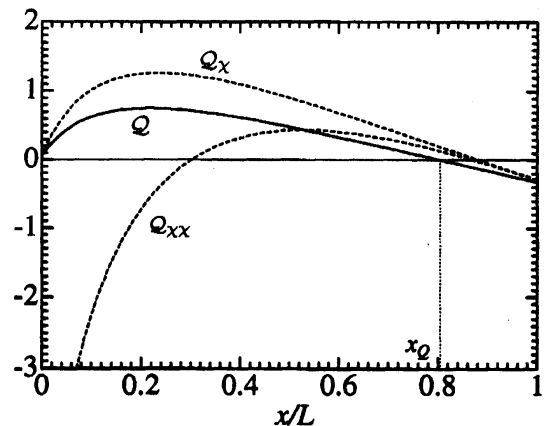


図5：管の側壁からの熱流束の分布。ここで、 Q と Q_{xx} はそれぞれ、(3.32), (3.25) で求めた量であり、 Q_x は (3.26) で χ^2 を無視して求めたものである。

となる。図4にこの軸方向の分布を示す。それは $x/L < x_J/L = 0.678$ では開放端に向かって流れ、そこから外部に流れ出す。その全流束は

$$2\pi R \bar{J} = -\frac{2BP^2}{(\gamma-1)\sigma^4} K_T \lambda \psi^2 \quad (4.7)$$

と求まる。一方、 $x > x_J$ では閉端に向かって流れ、端ではゼロになる。この領域では、熱流束は温度勾配に逆らって流れることになる。図4には、欠損エンタルピー流束 $W (= 2\pi R \bar{W})$ の分布も併せて示す。それは概ね負であるが、 $x/L = x_K/L = 0.920$ を境に反転する。

最後に、側壁からの熱流束 Q の分布を (3.32) から求める。正しい Q はいまの理論の範囲では求めることができないけれども、放物線型の温度分布に対しては、 $d^2 a_e / dx^2$ がゼロとなり、(3.35) ではその項は現れない。この点において、(3.32) のほうが (3.25) より好ましい。図5に、 Q の分布を実線で示す。ここでは、係数 $B_0(iP)^2/L$ を除いてある。熱流束は $x < x_Q = 0.804$ では管に入るがそれ以外では流れ出る。参考までに、(3.25) を用いた $2\pi R \bar{Q}$ を Q_{xx} を付けた破線で示す。これは $x/L \rightarrow 0$ で大きな値をとる。ついであるが、(3.26) で χ^2 の項無視すると、図中に Q_x と付けた曲線になる。いずれにしても、(3.25) と (3.32) による熱流束は χ が発散する開口端に近づくとき一致しなくなる。

5. おわりに

一端が開き、他端が閉じた管の中で放物型温度分布の場合に生じる熱音響振動に対し、音響エネルギー流束および移流による熱流束の分布を求めた。また、側壁からの熱流束は温度勾配の高次項を含むため、いまの理論の範囲では正確に求めることはできないが一応示した。これらの流れを図6に図式的に示す。これから、開放端近くの境界層は主流部に対してアクティブに作用しエネルギーを注入するが、閉端近くではパッシブに作用するだけであることが明らかになった。このため、音響エネルギー流束は主流部では閉端に向かって流れる一方、境界層内では音響エネルギー流束は開口端に向かって流れ、管の全断面では流束の値は小さいことが分かった。

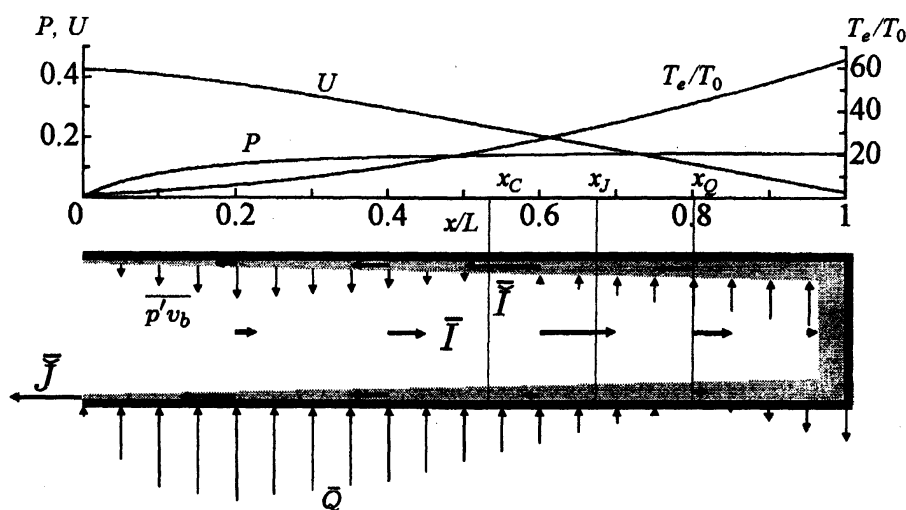


図6：主流部および境界層（グレー）を流れる音響エネルギー流束と熱流束の時間平均量の分布。矢印はその向きを、長さは概ね大きさを表す。両端の最大温度比を64とし、 P 、 U は圧力と流速の複素振幅を表すが、両者の位相は $\pi/2$ 異なる。

一方、熱流束は主流部では流れないが、境界層内では概ね開放端に向かって流れるものの、一部閉端近くでは温度勾配に逆らって流れることも明らかになった。側壁から入った熱流束は境界層内を流れるのと、移流により主流部にも流れ込む。管全体を熱機関として捉えれば、臨界振動はアイドリングに相当する。側壁から入る熱流束により開放端近くの境界層はプライムムーバー（原動機）として作用し、閉端近くの境界層はヒートポンプとして作用していることも分かった。側壁から入った熱流が開口端の境界層および閉端の壁面を通して流れ出て、臨界振動のエネルギーのバランスが保たれている。

参考文献

- [1] TACONIS, K. W., BEENAKKER, J. J. M., NIER, A. O. C. & ALDRICH, L. T. 1949 Measurements concerning the vapour-liquid equilibrium of solutions of He^3 in He^4 below 2.19°K . *Physica*. **15**, 733–739.
- [2] ROTT, N. 1969 Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes. *Z. Angew. Math. Phys.* **20**, 230–243.
- [3] ROTT, N. 1973 Thermally driven acoustic oscillations. Part II: stability limit for helium. *Z. Angew. Math. Phys.* **24**, 54–72.
- [4] ROTT, N. 1980 Thermoacoustics. *Adv. Appl. Mech.* **20**, 135–175.
- [5] ROTT, N. 2001 Linear thermoacoustics. *Proc. 1st. Intl. Workshop on Thermoacoustics*. Technische Universiteit Eindhoven and the Acoustical Society of America, 1–63.
- [6] YAZAKI, T., TOMINAGA, A. & NARAHARA, Y. 1980 Experiments on thermally driven acoustic oscillations of gaseous helium. *J. Low Temp. Phys.* **41**, 45–60.
- [7] 杉本信正, 吉田正福 2006 温度勾配のある管内気柱の熱音響振動とその安定性. 京都大学数理解析研究所講究録#1483「非線形波動の数理とその応用」112–121;
SUGIMOTO, N. & YOSHIDA, M. Marginal instability for thermoacoustic oscillations of gas in a tube. 投稿中.
- [8] 杉本信正 2005 境界層理論から見た熱音響振動とその安定性解析. 日本流体力学会誌「ながれ」 **24**, 381–393.