

ヒルベルト空間の中の 放物型方程式について

阪大 理 田 辺 広 城

Hilbert 空間の中で双一次型式により定義された作用素 $A(t)$ を係数に持つ発展方程式 $u'(t) + A(t)u(t) = f(t)$ に関する若干の注意を述べる.

1. 線型方程式

X を Hilbert 空間, z の内積, ノルムを $(\cdot, \cdot), \|\cdot\|$ で表わす. V は X の稠密な部分空間でそれ自身内積 $(\cdot, \cdot),$ ノルム $\|\cdot\|$ で Hilbert 空間になっているものとする. 各 $0 \leq t \leq T$ に対し $a(t; u, v)$ は $V \times V$ で定義された双一次型式で正の数 M, δ が存在して

$$|a(t; u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad (1)$$

$$\operatorname{Re} a(t; u, u) \geq \delta \|u\|^2 \quad (2)$$

が各 $u, v \in V$ に対して成立するとする. V^* を V の反共役空間, 即ち V で定義された反線型:

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \quad f(\lambda u) = \bar{\lambda} f(u)$$

な連続汎関数全体, V^* のノルムを $\|\cdot\|_*$ で表わす. X^* を X と同一視して $V \subset X \subset V^*$ と考えることができる.

(1) により各 $t \in [0, T]$ に対し

$$a(t; u, v) = (A(t)u, v) \quad (3)$$

によって V から V^* への連続線型写像 $A(t)$ が定義される. ただし右辺の括弧は V^* と V との間の積を表わす.

$$D(A(t)) = \{u \in V : A(t)u \in X\}$$

とおき $A(t)$ を $D(A(t))$ に制限すると $A(t)$ は X での閉作用素になる. かく制限したものを同じ記号 $A(t)$ で表わす. X での発展方程式

$$du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t) \quad (4)$$

の初期値問題を考える. (4) を解くためには更に $a(t; u, v)$ の t に関する滑らかさを仮定しなければならない. そこで先ず Hölder 連続性即ちある正の数 K, p に対し

$$|a(t; u, v) - a(s; u, v)| \leq K|t-s|^p \|u\| \|v\| \quad (5)$$

を仮定して (4) を V^* の中の方程式と見て基本解を構成し, $p > 1/2$ ならばこの基本解は X の中の方程式と見た (4) の基本解になっていることを示す.

予備定理 1.1. $A(t)$ は X 及び V^* の中で解析的半群を生成する. 即ちある角 $0 < \theta < \pi/2$ が存在し X 及び V^* での作用素と見た $A(t)$ の resolvent set $\rho(A(t))$ は開角領域

$$\Sigma = \{ \lambda : \theta \leq \arg \lambda \leq 2\pi - \theta \}$$

を含ま $\lambda \in \Sigma$ のとき

$$|(\lambda - A(t))^{-1} f| \leq \frac{C}{|\lambda|} |f| \quad (6)$$

$$\|(\lambda - A(t))^{-1} f\|_* \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_* \quad (7)$$

が各 $f \in X$ あるいは $f \in V^*$ に対して成立する. $\tau > 0$ のとき

$$\exp(-\tau A(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\lambda \tau} (\lambda - A(t))^{-1} d\lambda$$

によって定義される作用素の族は各固定された t に対し解析的半群をなす. ここに Γ は Σ の中で $\omega \in (2\pi - \theta)$ と $\omega \in \theta$ とを結び滑らかな曲線である.

$A(t)$ を X の中の作用素と見るとその定義域 $D(A(t))$ は一般には t と共に変わるが V^* の中の作用素としてはその定義域 V は t に無関係である. このことに着目して V^* の中の方程式と見た (4) の基本解 $U(t, s)$ を次の様に構成する.

$$U(t, s) = \exp(-(t-s)A(s)) + W(t, s), \quad (8)$$

$$W(t, s) = \int_s^t \exp(-(t-\tau)A(\tau)) R(\tau, s) d\tau, \quad (9)$$

$$R(t, s) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t, s), \quad (10)$$

$$R_1(t, s) = -(A(t) - A(s)) \exp(-(t-s)A(s)) \quad (11)$$

$$R_m(t, s) = \int_s^t R_1(t, \tau) R_{m-1}(\tau, s) d\tau. \quad (12)$$

(5) により

$$\|A(t)u - A(s)u\|_* \leq K|t-s|^p \|u\| \quad (13)$$

となるから

$$\|R_1(t, s)f\|_* \leq C(t-s)^{p-1} \|f\|_*,$$

$$\|R(t, s)f\|_* \leq C(t-s)^{p-1} \|f\|_*$$

が成立することは容易にわかり、従って (8) - (12) により V^* から V^* への有界作用素として $U(t, s)$ が定義され、更に

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} U(t, s)f \right\|_* \leq \frac{C}{t-s} \|f\|_*, \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, s) + A(t)U(t, s) = 0, \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad (15)$$

$$U(s, s) = I, \quad 0 \leq s \leq T, \quad (16)$$

が成立することが示される。詳しくは [3] あるいは [4] 参照。 f を X の任意の元とすると $\lambda \in \Sigma$ のとき

$$\|(\lambda - A(t))^{-1}f\| \leq C|\lambda|^{-1/2} \|f\|$$

となることから

$$\|R_1(t, s)f\|_* \leq C(t-s)^{p-1/2} \|f\|, \quad (17)$$

$$\|R(t, s)f\|_* \leq C(t-s)^{p-1/2} \|f\|, \quad (18)$$

$$\|\exp(-(t-\tau)A(\tau))f\| \leq C(t-\tau)^{-1/2} \|f\|_* \quad (19)$$

がわかる。従って

$$|W(t, s) f| \leq C(t-s)^p |f|, \quad (20)$$

$$|U(t, s) f| \leq C|f|$$

となり $U(t, s)$ は X から X への一様有界な写像であることがわかる。以上の仮定だけからは $\|\cdot\|_*$ を $\|\cdot\|$ で置き換えて (14) が成立するかどうかはわからず。併し $p > 1/2$ ならばそれは正しいことが次のようにして示される。

$$\begin{aligned} & |\{A(t) \exp(-(t-\tau)A(t)) - A(\tau) \exp(-(t-\tau)A(\tau))\} f| \\ & \leq C(t-\tau)^{p-3/2} \|f\|_*, \end{aligned}$$

$$|A(t) \exp(-(t-\tau)A(t)) f| \leq C(t-\tau)^{-3/2} \|f\|_*,$$

$$\|R(t, s) f - R(\tau, s) f\|_*$$

$$\leq C \left\{ (t-\tau)^p (t-s)^{-1/2} + (t-\tau)^p (t-s)^{p-1/2} \log \frac{t-s}{t-\tau} \right\} |f|,$$

$$|\exp(-(t-s)A(t)) f| \leq C(t-s)^{-1/2} \|f\|_*$$

と (18) により

$$(\partial/\partial t) W(t, s) f$$

$$= \int_s^t \{A(t) \exp(-(t-\tau)A(t)) - A(\tau) \exp(-(t-\tau)A(\tau))\}$$

$$\times R(\tau, s) f d\tau$$

$$- \int_s^t A(t) \exp(-(t-\tau)A(t)) (R(\tau, s) - R(t, s)) f d\tau$$

$$+ \exp(-(t-s)A(t)) R(t, s) f$$

の各項のノルムを評価して

$$|(\partial/\partial t)W(t,s)f| \leq C(t-s)^{p-1}|f|$$

を得る. これと (8) とから

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} U(t,s)f \right| \leq \frac{C}{t-s} |f| \quad (22)$$

を得る. 以上まとめて

定理 1.1. 仮定 (1), (2), (5) のもとで " V^* の中の方程式" と見た (4) の基本解 $U(t,s)$ が存在し (14) と (21) を満足する. 更に $p > 1/2$ ならば " Π の基本解は X の中の方程式" と見た (4) の基本解でもある (22) を満足する.

注意. この基本解を使って $f(t)$ が Hölder 連続ならば $u(0) = \phi$ を満足する (4) の解は

$$u(t) = U(t,0)\phi + \int_0^t U(t,s)f(s)ds$$

により表わされる. 解がこれに限ることも示される. [3] あるいは [4] 参照.

2. 半線型方程式

次に $A(t)$ は前節の作用素として半線型方程式

$$du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t, u(t)) \quad (23)$$

$$u(0) = \phi \quad (24)$$

の広義解の存在と一意性を考える。ここで言う広義解とは積分方程式

$$u(t) = U(t, 0)\phi + \int_0^t U(t, s) f(s, u(s)) ds \quad (25)$$

の解を指す。 $I = [0, T]$ と書く。この節では $p > 1/2$ は仮定しはう。

f に関する仮定: $f(t, u)$ は $I \times V$ から $V^* \wedge$ の有界, demicontinuous, 単調即ち各 $u, v \in V$ に対し

$$\operatorname{Re} (f(t, u) - f(t, v), u - v) \leq 0 \quad (26)$$

が成立する。

この仮定のもとで [1] の方法に従って解の存在を示す。

予備定理 2.1. $\phi \in X$, $f \in L^2(I, V^*)$ のとき

$$u(t) = U(t, 0)\phi + \int_0^t U(t, s) f(s) ds \quad (27)$$

とおくと $u \in C(I, X) \cap L^2(I, V)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u(t)|^2 &= \frac{1}{2} |\phi|^2 + \int_0^t \operatorname{Re} a(s, u(s), u(s)) ds \\ &= \int_0^t \operatorname{Re} (f(s), u(s)) ds. \end{aligned}$$

証明は (27) が Lions [2] 第4章の意味での (4) の解であることを示し, 同書同章にある定理を用いるか, あるいは f が $C^\infty(I, V^*)$ の元である場合に先ず証明し, 次に一般の

f に対してはそれを $C^0(I, V^*)$ の元の列で近づくことによりなされる。

$(\Lambda u, v) = ((u, v))$ により定義される作用素 Λ は X , V^* の各々で自己共役正定符号。 X では $D(\Lambda^{1/2}) = V$, V^* では $D(\Lambda^{1/2}) = X$, $I_n = (1 + n^{-1}\Lambda^{1/2})^{-1}$ とおくと I_n は X から $V \cap X$, V^* から $X \cap V^*$ の有界作用素, $n \rightarrow \infty$ のとき X , V^* の各々で恒等作用素に強収束する。 $f_n(t, u) = I_n f(t, I_n u)$ とおくと f_n は $I \times X$ から $X \cap V^*$ の有界, demic-continuous, 単調作用素である。 $a(t; u, v)$ に軟化作用素を作用させて t に関し微分可能な双一次型式列

$$a_n(t; u, v) = \int p_n(t-s) a(s; u, v) ds$$

で $a(t; u, v)$ を近似する。 $a_n(t; u, v)$ により定められる作用素を $A_n(t)$ とすると方程式

$$du(t)/dt + A_n(t)u(t) = f_n(t, u(t))$$

に 2.1 の結果が使えてな義解 $u_n \in C(I, X)$ が存在する:

$$u_n(t) = U_n(t, 0)\phi + \int_0^t U_n(t, s) f_n(s, u_n(s)) ds \quad (28)$$

予備定理 2.1 及び (2) により

$$\begin{aligned} |u_n(t)|^2 + \delta \int_0^t \|u_n(s)\|^2 ds \\ \leq |\phi|^2 + \frac{1}{\delta} \int_0^t \|f_n(s, 0)\|_*^2 ds \end{aligned}$$

$$\leq |\phi|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \|f(s, u)\|_*^2 ds.$$

従って $\{u_n\}$ は $C(I, X)$, $L^2(I, V)$ の各々で有界である。従って ϕ に関する仮定により $\{f_n(\cdot, u_n(\cdot))\}$ は $L^\infty(I, V^*)$ で有界である。従って部分列があって $L^2(I, V)$ で $u_n \rightharpoonup u$ (ここで部分列を再び $\{u_n\}$ と書き, $\rightharpoonup$ は弱収束を意味する), $L^2(I, V^*)$ で $f_n(\cdot, u_n(\cdot)) \rightharpoonup g$ となる。

予備定理 2.2.

$$(U_n f)(t) = \int_0^t U_n(t, s) f(s) ds,$$

$$(U f)(t) = \int_0^t U(t, s) f(s) ds$$

により $L^2(I, V^*)$ から $L^2(I, V)$ への有界作用素 U_n, U を定義すると $n \rightarrow \infty$ のとき $\{U_n\}$ は U に強収束する。

証明は予備定理 2.1 を用いて容易にできる。

この予備定理は $A_n(t), A(t)$ をその共役で置き換えて、従って $U_n(t, s), U(t, s)$ をその共役で置き換えても成立する。そのことに注意して

$$\int_0^t U_n(t, s) f_n(s, u_n(s)) ds - \int_0^t U(t, s) g(s) ds$$

$$= \int_0^t (U_n(t, s) - U(t, s)) f_n(s, u_n(s)) ds$$

$$+ \int_0^t U(t,s) (f_n(s, u_n(s)) - g(s)) ds$$

は $L^2(I, V)$ で 0 に弱収束することがわかる。これと (28) から

$$u(t) = U(t,0) \phi + \int_0^t U(t,s) g(s) ds$$

が得られる。次に $f \in L^2(I, V^*)$,

$$w(t) = U(t,0) \phi + \int_0^t U(t,s) f(s) ds$$

とおくと予備定理 2.1 により

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_n(T) - w(T)\|^2 \\ & + \operatorname{Re} \int_0^T a_n(t; u_n(t) - w(t), u_n(t) - w(t)) dt \\ & = -\operatorname{Re} \int_0^T ((A_n(t) - A(t)) w(t), u_n(t) - w(t)) dt \\ & + \operatorname{Re} \int_0^T (f_n(t, u_n(t)) - f(t, u_n(t) - w(t)) dt \end{aligned}$$

であるが

$$\begin{aligned} & (f_n(t, u_n(t)) - f(t, u_n(t) - w(t))) \\ & = (f(t, I_n u_n(t)) - f(t, w(t)), I_n u_n(t) - w(t)) \\ & + (I_n f(t) - f(t), u_n(t) - w(t)) \\ & + (f(t, I_n u_n(t)) - f(t, w(t)), w(t) - I_n w(t)) \end{aligned}$$

$$+ (f(t, w(t)) - f(t), I_n u_n(t) - w(t))$$

と分解し, f が単調であることを用いて

$$0 \leq -\operatorname{Re} \int_0^T ((A_n(t) - A(t)) w(t), u_n(t) - w(t)) dt$$

$$+ \operatorname{Re} \int_0^T (I_n f(t) - f(t), u_n(t) - w(t)) dt$$

$$+ \operatorname{Re} \int_0^T (f(t, I_n u_n(t)) - f(t), w(t) - I_n w(t)) dt$$

$$+ \operatorname{Re} \int_0^T (f(t, w(t)) - f(t), I_n u_n(t) - w(t)) dt$$

となる. ここで $n \rightarrow \infty$ として

$$0 \leq \operatorname{Re} \int_0^T (f(t, w(t)) - f(t), u(t) - w(t)) dt.$$

ここで f は $L^2(I, V^*)$ の任意の元であったことに注意し, 通常の単調性論法を用いて, u が求める解であることが示される. 解の一貫性も容易に示される.

[1] T. Kato: Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proc. Symp. Appl. Math., XVII, 50—67.

[2] J. L. Lions: Équations différentielles opérationnelles, Springer-Verlag, 1961.

[3] P. E. Sobolevskii: Equations of parabolic

type in a Banach space, Trudy moscow math.
Olsch. 10 (1961), 297-350, AMS. Translations
49 (1966), 1-62.

[4] H. Tanabe: On the equations of evolution
in a Banach space, Osaka math. J., 12 (1960),
363-376.