

ある高次元アトラクターの研究 —アトラクターの内と外—

京大・基研 池田 研 介

北大・薬 松本 健 司

我々の周囲で見出される一見でたらめな現象の多くは chaos 現象に帰することができるかもしれない。しかしそれが chaos 現象であるとしても非常にたくさんの自由度—多分無限個の自由度—が関係した chaos 現象であろうと思われる。これまで chaos の研究は、主としてこれら多自由度の中から少数自由度をぬきだしそのふるまいを研究してきた。しかし chaos の本質が初期条件の情報欠如の増幅にあることを考えると、元来は 1 つに絡った世界を relevant 部分と irrelevant 部分に分割するという操作に疑問を感じざるをえない。何故なら irrelevant として無視された自由度は chaotic な時間発展に対して決して “黙って” いないからである。chaos が発生している世界を 2 つに分割することが可能だろうか？ 可能であるとしても分割によって失われる情報は一体何だろうか？ この様な問題意識が根底にあって、我々はそれ自身が 1 つのマイクロコスモスを成すと考えられるできるだけ物理的に “自然” な無限自由度系を例にとり、それらが示す chaos 運動を “全体から” 捉えようと試みてきた。上の問いに対する解答をひきだす迄にはまだとても至っていないが、ここでは所謂 D-D (delay-differential) モデルに対して判明した高次元アトラクターに関する一連の性質を提出する。これらの性質によって、アトラクターの構造と物理空間で発生している現象の間に一定の対応関係が存在することを主張することができる。我々はこれらの性質が決して普遍的なものであるとは考えていない。しかしそれらが、今後他の高次元アトラクターを研究してゆくとき、一定段階での作業仮説の役割を果たすことを期待している。

§ 1. 物理空間での現象

ここで我々が特に注目したい物理現象を説明しておく。例えば、流体の乱流状態ではコルモゴロフのスペクトルの波長域より短波長側では粘性散逸が卓越し、active な空間領域が波数の増大と共に減少していくことが推論されている。これは所謂 dissipative range の intermittency に他ならない。この様な現象の存在は、一般に無限自由度の chaos 現象でもきわめてありふれて見出される。たとえば以下で論じる D-D (delay-differential) モデル

$$dx(t)/dt = -x(t) + \pi\mu f(X(t-t_R)) \quad (1)$$

ここに $f(x)$ は非線形の feed back 関数, や K-S (Kuramoto-Sivashinsky) モデル

$$u_t + u_{xx} + u_{xxx} + u_x u = 0 \quad (2)$$

などでも高波長域で intermittency が見出されることを確かめることができる。更に興味深いことは、高波長域では intermittent burst の空間配置が波長の増加に対して非常に強い相関をもつことである。1 例を図-1 に示した。この図は D-D モデルに対して、 $0 \leq t \leq t_R$ の "空間パターン" $x(t)$ のフーリエ係数 $F(k)$ を ∞ から切断波長 k 迄フーリエ逆変換してえられた空間パターン $x(t, k) = \int_k^\infty F(k) \exp(-ikt) dk$ の活性領域 (バーストの存在領域) を一で示し、タテ軸に k , ヨコ軸に t をとって様々な k に対する一のパターンを示したものである。特徴的なことは、ある波数 k_c を越すと活性パターンが殆んど k に依存しなくなって、相関しうる 2 つのパターン $u(t, k_1)$ と $u(t, k_2)$ の距離 $|k_2 - k_1|$ が発散する (図-2) ことである。D-D モデルと質を異にする K-S モデルでも、詳細は多少かわるが似た現象が見出されている。この k_c を境にして $x(t, k)$ の活性領域の全体に対する割合が k 逆比例して減少し始める。これが intermittency に他ならない。この様な挙動は、K-S モデルや流体の実験でも見出されている。フーリエスペクトルでみると $k > k_c$ では $\exp[-\text{const} \times k]$ 型の所謂散逸型スペクトルが観測される。ここで我々が問いたいことは、この様に顕著な変化が見出される波数 k_c がアトラクタの構造とどの様に関係しているのか? という問題である。残念ながら、力学系として様々な角度からの解析が可能な無限自由度系のモデルを我々はあまりもっていない。しかし幸いなことに以下で示す通り D-D モデルではかなりつつこんだ解析が可能である。

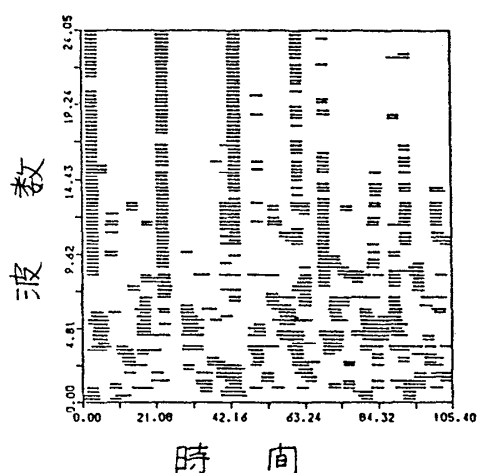


図 1

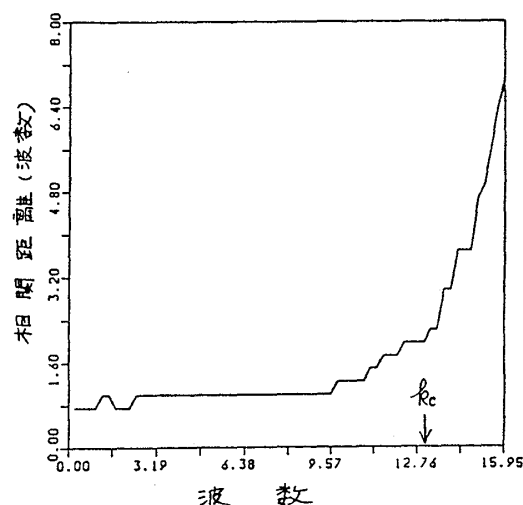


図 2

§ 2. 見出された性質

D-D モデルは τ ($0 < \tau \leq t_R$) に於る成分が $x(t)$ であるような無限次元ベクトル $R = (x(\tau))$ から $R' = (x'(\tau))$ への写像 $R \xrightarrow{F} R'$ であると解釈できる。写像規則は(1)を変形して

$$x'(\tau) = x(t_R) e^{-\tau} + \pi \mu \int_0^\tau e^{-\tau+s} f(X(s)) ds \quad (3)$$

のように与えられる。我々は写像 $R' = F(R)$ 及びその変分写像 $\delta R' = (dF(R)/dR) \delta R$ からアトラクター $\hat{A}$ 上の諸点 R で定着されたリアプノフベクトル $\{e_i(R)\}$ をもとめ、それを基底としてアトラクター $\hat{A}$ 内でおきている chaotic な運動を観察した。そこでえられた性質を以下に列挙する。

(1) リアプノフスペクトルに関する性質

リアプノフ指数 λ_i は i の大きい極限で、(不安定)固定点まわりのゆらぎモードがもつ減衰率 α_n に一致する。一致する特性順序 $i = I_{LE}$ はアトラクタの次元 D に密接に関係する。

D-D モデルでは、 $I_{LE} = 0.65 D$ である。

(2) リアプノフ成分に関する性質

状態ベクトル R と e_i の内積絶対値の平均は e_i に沿って測ったアトラクタの厚みを表し、リアプノフ成分 C_i と呼ばれる。リアプノフ成分 C_i は $\log$ スケールで λ_i と極めて類似した挙動を示す。従ってある $I_{LC} (\approx I_{LE})$ が存在し $i \gg I_{LC}$ なる i に対して $\log |C_i| \propto \alpha_{n(i)}$

(3) External subspace とそこへの射影のもつ性質

e_i は、それが定義されている状態 vector $R' (\in \hat{A})$ に依存する。即ち $e_i(R')$ と書くべき。 R' が変動すると、 $e_i(R')$ も変動する。しかしその順番は概ね保存される。

今 $(e_l(R'), e_{l+1}(R'), \dots)$ で張られる空間を第 l external subspace $EX_l^l(R')$ と呼ぶ。すると上の事実はこの部分空間が概ね不動と見做せることを物語っている。外部分空間と名づけた理由は l が増大する程 R の EX_l^l への射影ベクトル R_l はアトラクター外部の情報をふくむようになると考えられるためである。我々の興味は R_l 間の関係が l の変化とともにどの様に変化してゆくのか? という所にある。

l がある特性順序 $\approx I_{LC}$ を越すと外部分空間への射影ベクトル R_l の間の関係に特徴的な変化が見出される。

D-D モデルでは、 R_l に similar な $R_{l'} (l' \neq l)$ の数が $l = I_{LC}$ を境に $l > I_{LC}$ で急激に増大する。この理由は、(1)(2)を用いて説明できる。

(4) リアプノフ-フーリエ対応

D-D モデルではリアプノフベクトル e_i とフーリエ基底 f_k の間に対応関係が見出されてい

る。

第 i リアプノフベクトルにノルム的に最も近い、フーリエベクトルの波数を k とする。すると i と k の間には 1 対 1 対応 $i = i^*(k)$ が存在する。

従ってリアプノフ基展でみた外部分空間 EX_k^I に対応するフーリエ基底でみた外部分空間 $EX_k^F = (f_k, f_{k+1}, \dots)$ が存在し、(Ⅲ)の現象が EX_k^F への射影にも見出される筈である。 EX_k^F への R の射影は、前節のコトパで言えば、ハイパスフィルターした空間パターンに他ならない。

(5) ハイパスフィルターされた空間パタンのもつ性質

ハイパスフィルターされた空間パタン間の相関特性は、 $k_C = i^{*-1}(I_{LC})$ なる k_C を境にして特徴的な変化を示す。

これはリアプノフ基底で観察されていた現象(3)、更にさかのぼって(1) and/or (2)がフーリエ空間で顕在化した現象であると見做せる。従って前節でのべたハイパスフィルターパタンにみられる intermittency あるいは急激な相関の増大はアトラクターの外部で発生する特徴的な現象であると考えられる事ができる。

§ 3. 最近の発展

我々は K-S モデルに関しても同様な性質が成り立つかどうかを目下調べており、性質(1)及び(5)は極めてクリアな形で成立していることを認めることができた。K-S モデルではアトラクターの内と外が D-D モデルよりはるかに明確に分割しているように思える。アトラクターの情報はバンドパスフィルター（ある条件下でハイパスフィルターに一致）された空間パタンの活性領域として code され、高波数側つまり、アトラクターの外側に流れてゆくらしい。このことをふまえて情報理論的観点からアトラクターの内側と外側を特徴づけてゆく作業も目下進められている。

§ 1, 2 でのべた結果は reject されなければ Journal of Statistical Physics に掲載される予定である。