

特異点の標準型とそのニュートン多角形について

早大・理工・数学 高橋 正 (Tadashi Takahashi)

数式処理言語 Reduce を用いた数学研究の一つとして、超曲面上の特異点がどのような特異点であるかを調べることができる。

いま $\mathbb{P}^n$ を n 次元複素射影空間 (n -dim. complex projective space) とし、その同時座標を $(X_0, X_1, X_2, \dots, X_n)$ とする。

そして、 X を $\mathbb{P}^n$ における超曲面 (Hypersurface), x を X 上の点,

(X, x) を $n-1$ 次元正規孤立特異点 (normal isolated singularity),

X の定義方程式を f とすると、 f は次のように表される。

$$f(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sum C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$$

注) 特異点が正規(normal)である定義は Laufer [5] を参照

f のニュートン多角形 (Newton polyhedron) を次のように定義する。

定義 1.1 (ニュートン多角形)

$$\Gamma_+(f) := \text{convex hull of } \left(\bigcup (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\mathbb{R}_+^{n+1}) \right)$$

where $C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$ is not zero.

$$\Gamma(f) := \text{the union of compact faces } \Gamma_+(f)$$

この $\Gamma(f)$ を f の Newton polyhedron とする。

例 1. $n=2$ のとき

$$f = X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 + X_0 X_1 X_2$$

ならば $\Gamma(f)$ は、図1のようになる。

例 2.

同じく $n=2$ のとき

$$g = X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 + X_0 X_1 X_2 + X_1^3 X_2^2$$

ならば $\Gamma(f)$ は、図2のようになる。

すなわち $\Gamma(f) = \Gamma(g)$ となる。

よって、凸包より上の項は無視して考えることができる。

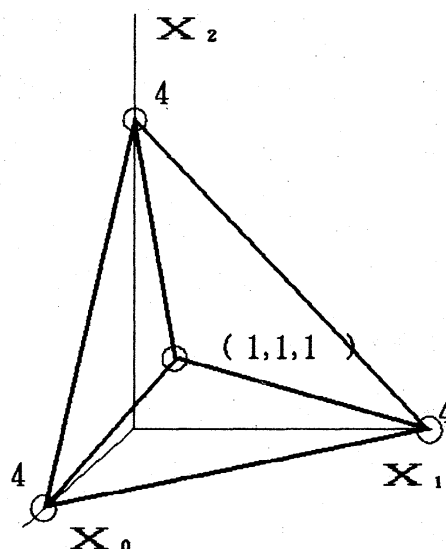


図 1

Lê and Ramanujam [6] 及び Kouchnirenko [3] の結果により 3 次元以上の超曲面上の孤立特異点に対しては、そのニュートン多角形によって、特異点の位相型が決定されることがすでに知られている。さらに、岡 [7] の結果により、2 次元の超曲面上の孤立特異点に対しても、そのニュートン多角形によって特異点の位相型が決定されることが知られている。

注) 位相型とは、先の

(X, x) : $n-1$ 次元正規孤立特異点に対して、

$(\widehat{X}, E)$ を次の条件を満たす (X, x) の Resolution

条件 $E = \pi^{-1}(x)$: normal crossing, $E = \cup E_i$: decomp. into irred. components,

すべての E_i が、 $n-1$ 次元非特異である。

としたときの、 E の configuration のことを示す。

(Arnold [1] [2] を参照)

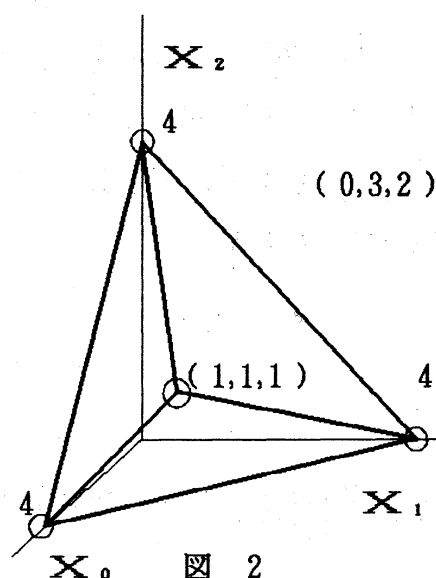


図 2

これらの結果により、 n 次元複素射影空間の超曲面上に現れる $n-1$ 次元正規孤立特異点の位相型を決定する方法の一つとして、その調べたい特異点を定義する定義方程式を、すでに研究されている特異点の標準型 (normal form) に解析変換 (正則変換) によって変形することが考えられる。

例えば $\mathbb{P}^3$ の $[0, 0, 0, 1]$ において、

$$f = (X_0^2 + X_1^2) X_3^2 + X_2^4 = 0$$

は、局所的には

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^4 = 0 \quad \text{と同型になる。}$$

このとき、 $g = (X_0^2 + X_1^2) X_3^2 + X_0 X_2^2 X_3 = 0$ は局所的には

$$g = X_0^2 + X_1^2 + X_0 X_2^2 \quad \text{となり、}$$

$$X_0 = X_0' - (1/2) X_2^2 \quad \text{とすると } g \text{ は}$$

$$g = X_0'^2 + X_1^2 - (1/4) X_2^4 \quad \text{となり} \quad \Gamma(f) = \Gamma(g) \quad \text{となる。}$$

したがって、 f も g も $[0, 0, 0, 1]$ において同じ特異点を持つ。(Arnold [1] [2] 及び Laufer [5] における A_3 特異点)

そして、現在の特異点研究において、2次元正規 (孤立) 特異点についてはすでに多くの結果が得られており、その標準型については、Arnold [1] [2] 及び Laufer [4] らによって結果が得られている。したがって、3次元複素射影空間の超曲面上に現れる、2次元正規 (孤立) 特異点の位相型を決定する方法を考える。

1. 超曲面上に現れる正規孤立特異点の位相型を決定するための、解析変換の原理について

解析変換を実行する際、ただ単に変換を思いつくとか、試行錯誤によって変換を試みるのでは、組織的ではなく数学的ではない。そこで、その変換のシステムを構成してみると、次のようなステップによって実行されることが分かる。

Step 1 (最低次の項を選ぶ)

特異点の定義方程式を f とすると, f の項たちの中で次数の最も低い項たちを選び出す。最低次の項たちに着目する理由は, 解析変換は f の項たちからその項たちよりも次数の高い項たちを生じさせる変換であり, 最低次の項たちはその影響を受けないからである。

そして, もしその項たちが, 先の Arnold [1] [2] 及び Laufer [4] において, その標準型の最低次の項たちのいずれか一つと一致するならば, Step 3 に進む。そうでないときには, Step 2 に進む。

Step 2 (頭をつくる)

ここでは, f の最低次の項たちを線型変換で, その次数の標準型の一つに変換する。

標準型は, “項数の少ない簡単なもの” となっているから, その方針に反しないように変換する。

例えば,

$$f = X_0^2 + 2X_0X_1 + X_1^2 + X_1^3 + X_2^4$$

ならば, $X_0 = X_0' - X_1$ とおき

$$f = X_0'^2 + X_1^3 + X_2^4 \quad \text{として最低次の項の型を整える。}$$

Step 3 (ニュートン多角形の設定)

このステップでは, 標準化された最低次の項たちを用いた解析変換により, その他の項たちの状態がどうなるかを考える。

例えば, $\mathbb{P}^2$ においてならば, 最低次の項が変数 X_0, X_1 の項であるならば, X_0, X_1 による最低次の項を変化させない変換

$$X_0 = X_0' + \alpha X_2^i$$

$$X_1 = X_1' + \beta X_2^j$$

(α, β は定数, i, j は 2 以上の整数)

を考える。

まず、その変換により予想されるニュートン多角形を設定してみる。次に f のすべての項たちが、そのニュートン多角形に対して、どのような位置にあるかを見る。もし f がそのニュートン多角形上に非退化な項たちをもち、かつそれ以外の項たちはすべてそのニュートン多角形より上にあるならば、特異点の位相型は最初に予想したタイプの特異点であることが決定できる。しかし、 f の項たちの中でその設定したニュートン多角形より下に位置するものがあるか、もしくはその多角形上にいくつかの項たちをもち、その他の項たちは、すべて多角形より上に位置するが、多角形上の項たちが退化するならば、Step 4 に進む。

ここでいう“退化である”とは、次のように定義される。

$$\text{たとえば } f = X_0^2 + 2X_0X_1 + X_1^2 + X^3 + X_2^4$$

のとき、 f のニュートン多角形は、図 3 のようになるが、

$$X_0 = X_0' - X_1 \quad \text{とおくと}$$

f のニュートン多角形は、図 4

のようになる。

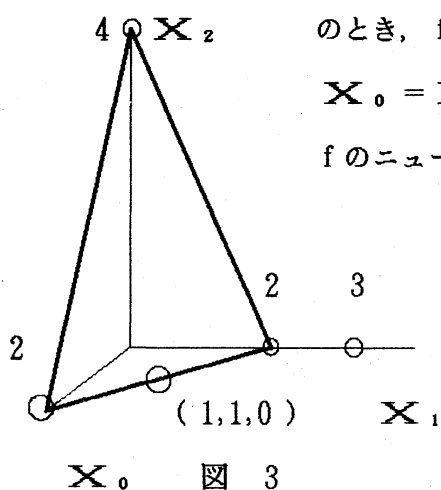


図 3

このような f を“退化である”という。

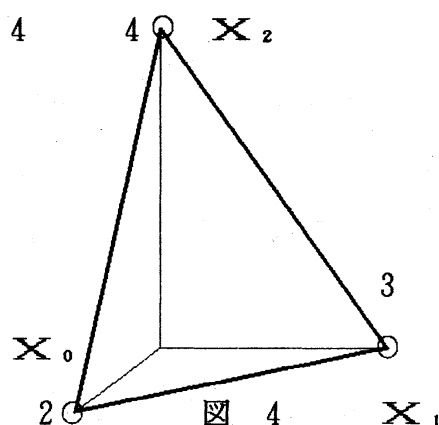


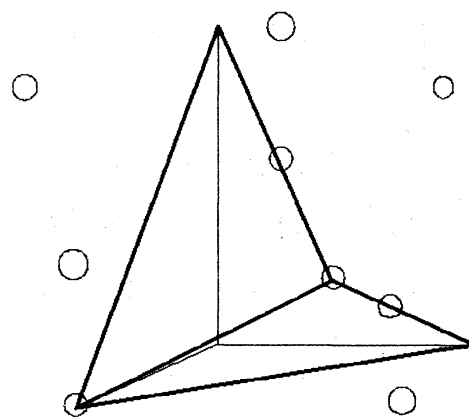
図 4

したがって、 f が“退化である”とは、上の例のように変数変換によってニュートン多角形が変化するものを示す。厳密には、 f が“非退化である”とは、次のように定義される。

定義 1. 2 (非退化)

f が“非退化である”とは、任意の $\Delta(\Gamma(f))$ の compact face) に対して、 $\partial f / \partial X_i = 0$ ($i=1 \dots n+1$) が $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ で解を持たないことである。

このステップにおいて f のニュートン多角形の設定ができる。(右図はその例、図の丸は f の項を示す。)



Step 4 (修正設定)

このステップでは、Step 3 において設定したニュートン多角形に対して、それよりも下に位置する項があるときは、先に設定したニュートン多角形に含まれる新たなニュートン多角形に対して、もう一度 Step 3 と同じことをチェックしてみる。また、先のニュートン多角形を張る f の項たちが退化であるときには、その項たちの中から、その項を消去したらその多角形上の項たちが非退化になるような項を選び、それをねらって先の解析変換をさらに行う。

たとえば、最低次の項が X_0, X_1, X_2 であり、消去したい項が $C_1 X_0^3 X_1$

(C_1 : 定数) であつたら、

$$X_2 = X_2' - C_1 X_0^2$$

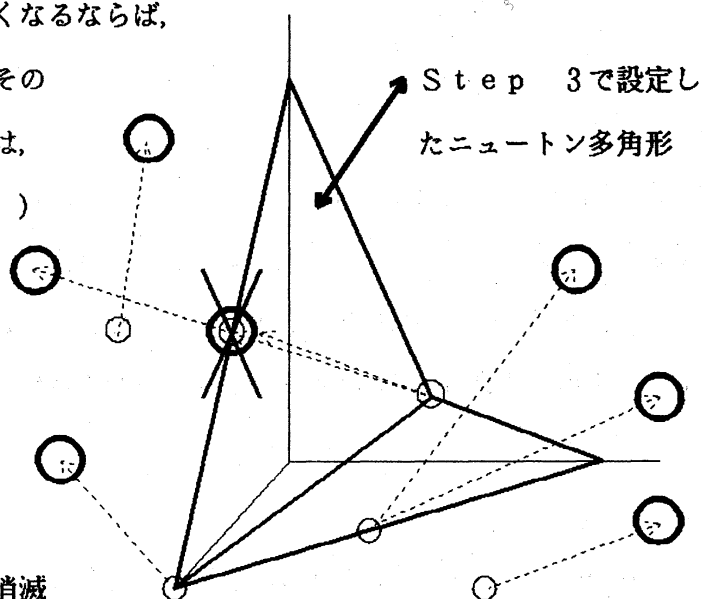
として解析変換を行う。この時、これ以外の解析変換では項 $C_1 X_0^3 X_1$ は消去できず、かえってタイプの判定に対してまずい項たちを生じてしまう。この判定のための変換は、特異点のタイプごとに Key になる項 (最低次の項) が異なるため、タイプごとに変換の方法は異なる。

以上により、Step 4 での設定が正しければ Step 3 における決定と同じく、その特異点の位相型が決定される。もし、この解析変換によって Step 3 において設定したニュートン多角形を張る非退化な項たちのうち、いずれかが消滅してしまい、その多角形上の項たちによって Step 3 における判定ができなくなるならば、

Step 3 における設定は誤りであり、その特異点の位相型を決定するニュートン多角形は、新たなものとなる。(右図はその例を示す)

右図において $\bigcirc$ は $\bigcirc$ の項より、先の解析変換により生じる項を示し、 $\cdots$ は、その対応を示す。

また $\bigotimes$ は、Step 3 におけるニュートン多角形を張る項の中で、消滅することにより、その項以外の多角形上の項たちが、その解析変換により、退化なものになってしまうことをしめす。



この修正設定のステップを Step 5, Step 6 . . . と繰り返すことによって特異点の位相型を決定することができる。

* Reduce の使用について

定義方程式 f の項が少ないものについては、その変換を手計算によって行うことができるが項の数が多くなると手計算では難しく、かつ誤りやすい。そして、変換の回数が多くなる場合には、その全行程を自動的におこなうプログラムを作ることにより、正確かつ迅速に判定することができる。

たとえば、 A_k タイプの特異点（定義方程式は、 $X_0^2 + X_1^2 + X_2^{k+1} = 0$ ）で、その k を判定するときには、 A_k タイプのニュートン多角形より上にある項たちをすべて 0 にするコマンド（Reduce の LET）及び、先の解析変換を行うコマンド（Reduce の SUB）を用いて変換を行う。

すなわち、 $X_0 X_2^i, X_1 X_2^j$ ($0 < i, j \leq [(k+1)/2]$) を消去してゆく。そして、各回ごとに X_2^k の係数をチェックして、その係数が 0 ならばさらにこの変換を繰り返すプログラムを組む。（後ろのプログラム LIST の例参照）

例

次の方程式は、 P^3 の $[0,0,0,1]$ において P_8 （定義方程式 $X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + X_0 X_1 X_2 = 0$ の原点の特異点と位相型が等しい）特異点をもち、さらに、 P^3 の $[1,-1,0,0]$ において A_{11} （定義方程式 $X_0^2 + X_1^2 + X_2^{12} = 0$ の原点の特異点と位相型が等しい）特異点を持つ。

$$\begin{aligned} f = & (6 X_0^3 + 6 X_1^3 + 6 X_2^3 + 18 X_0 X_1 X_2) X_3 - 3 X_0^4 \\ & - 5 X_0^3 X_2 + 6 X_0^2 X_1^2 - 24 X_0^2 X_1 X_2 + 6 X_0^2 X_2^2 \\ & - 24 X_0 X_1^2 X_2 + 9 X_0 X_1 X_2^2 - 8 X_0 X_2^3 - 3 X_1^4 \\ & - 5 X_1^3 X_2 + 6 X_1^2 X_2^2 - 8 X_1 X_2^3 \end{aligned}$$

このような例は, Takahashi, T. , Watanabe, K. , Higuchi, T. [8] の中に数多く掲載されている。

この例を得るために下記のようなプログラムを用いた

★ プログラムLIST

```
F1:=C0*X**4+X**3*(C1*Y+C2*Z)+X**2*(C3*Y**2+C4*Y*Z+C5*Z**2);
```

```
F2:=X*(C6*Y**3+C7*Y**2*Z+C8*Y*Z**2+C9*Z**3);
```

```
F3:=C10*Y**4+C11*Y**3*Z+C12*Y**2*Z**2+C13*Y*Z**3+C14*Z**4;
```

```
F4:=F1+F2+F3;
```

```
CLEAR F1,F2,F3;
```

```
F:=(X**3+Y**3+Z**3+C15*X*Y*Z)*W+F4;
```

```
G1:=SUB(X=1,Y=Y-1,F);
```

```
D:=SUB(Y=0,Z=0,W=0,DF(G1,W,Z));
```

```
G2:=SUB(Y=Y-(1/3)*D*Z,G1);
```

```
CLEAR G1,D;
```

```
J:=SUB(Y=0,Z=0,W=0,DF(G2,Y,Z));
```

```
G3:=SUB(W=W-(1/3)*J*Z,G2);
```

```
CLEAR G2,J;
```

```
D:=SUB(Y=0,Z=0,W=0,DF(G3,W,Z,2));
```

```
G4:=SUB(Y=Y-(1/3)*(1/2)*D*Z**2,G3);
```

```
CLEAR G3,D;
```

```
J:=SUB(Y=0,Z=0,W=0,DF(G4,Y,Z,2));
```

```
G5:=SUB(W=W-(1/3)*(1/2)*J*Z**2,G4);
```

```
CLEAR G4,J;
```

方程式 f の定義

Step 3

Step 3

Step 4

Step 4

D:=SUB(Y=0,Z=0,W=0,DF(G5,W,Z,3));	Step 5
G6:=SUB(Y=Y-(1/3)*(1/6)*D*Z**3,G5);	
CLEAR G5,D;	
J:=SUB(Y=0,Z=0,W=0,DF(G6,Y,Z,3));	Step 5
G7:=SUB(W=W-(1/3)*(1/6)*J*Z**3,G6);	
CLEAR G6,J;	
D:=SUB(Y=0,Z=0,W=0,DF(G7,W,Z,4));	Step 6
G8:=SUB(Y=Y-(1/3)*(1/24)*D*Z**4,G7);	
CLEAR G7,D;	
J:=SUB(Y=0,Z=0,W=0,DF(G8,Y,Z,4));	Step 6
G9:=SUB(W=W-(1/3)*(1/24)*J*Z**4,G8);	
CLEAR G8,J;	
D:=SUB(Y=0,Z=0,W=0,DF(G9,W,Z,5));	Step 7
G10:=SUB(Y=Y-(1/3)*(1/120)*D*Z**5,G9);	
CLEAR G9,D;	
J:=SUB(Y=0,Z=0,W=0,DF(G10,Y,Z,5));	Step 7
G11:=SUB(W=W-(1/3)*(1/120)*J*Z**5,G10);	
CLEAR G10,J;	
D:=SUB(Y=0,Z=0,W=0,DF(G11,W,Z,6));	Step 8
G12:=SUB(Y=Y-(1/3)*(1/720)*D*Z**6,G11);	
CLEAR G11,D;	
J:=SUB(Y=0,Z=0,W=0,DF(G12,Y,Z,6));	Step 8
G13:=SUB(W=W-(1/3)*(1/720)*J*Z**6,G12);	
CLEAR G12,J;	
JY:=SUB(Y=0,Z=0,W=0,DF(G13,Y));	
G14:=SUB(Y=0,W=0,G13);	
ARRAY H(24);	
COEFF(G14,Z,H);	

```
FOR T:=0:12 DO WRITE (H(T));
```

```
C0:=C1-C10-C3+C6;
```

```
JY;
```

```
FOR T:=0:2 DO WRITE(H(T));
```

```
C2:=C11+C4-C7;
```

← A_1 特異点を持つ係数の条件

```
FOR T:=0:3 DO WRITE(H(T));
```

```
C8:=6*C10*C15**2+3*C11*C15+C12+C15**2*C3-3*C15**2*C6+C15*C4-2*C15*C7+C5; ←  $A_2$  "
```

```
FOR T:=0:4 DO WRITE(H(T));
```

```
C13:=2*C10*C15**3-C12*C15+C15**3*C3-2*C15**3*C6+C15**2*C4-C15**2*C7+C15*C5+C9; ←  $A_3$  "
```

```
FOR T:=0:5 DO WRITE(H(T));
```

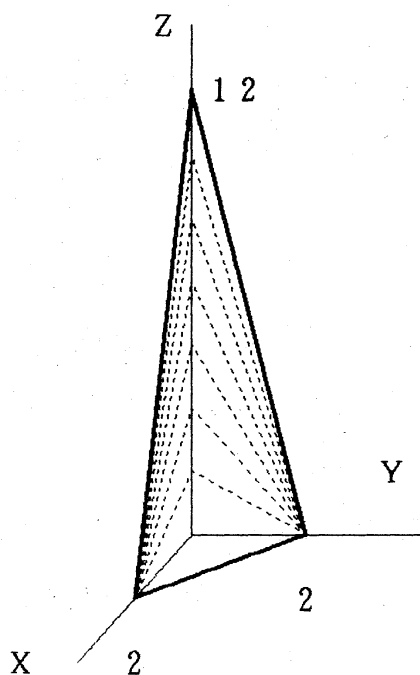
```
C11:=(1/3)*(-3*C10*C15**4-12*C10*C15+3*C14+C15**4*C3+2*C15**3*C4-C15**3*C7
```

```
+3*C15**2*C5-2*C15*C3+6*C15*C6+3*C15*C9-C4+2*C7); ←  $A_4$  "
```

```
FOR T:=0:6 DO WRITE(H(T));
```

```
C12:=(6*C10*C15**5+6*C10*C15**2+3*C15**5*C3-6*C15**5*C6+2*C15**4*C4-2*C15**4
```

```
*C7+C15**3*C5+3*C15**2*C3-6*C15**2*C6+2*C15*C4-2*C15*C7+C5)/(1+C15**3); ←  $A_5$  "
```



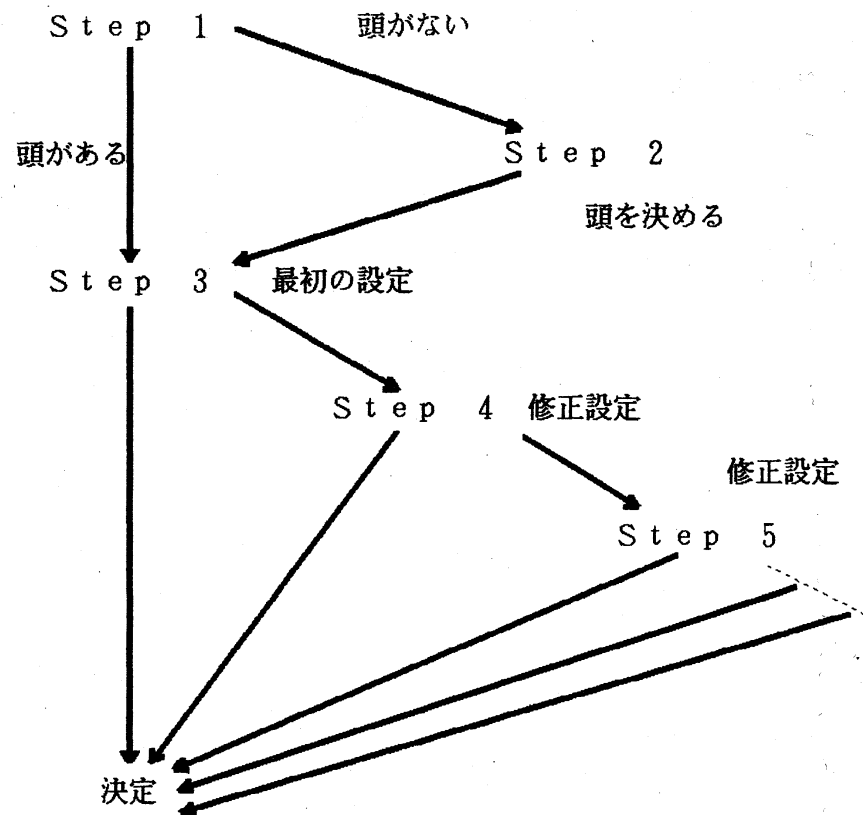
以下同様にして、 $A_6, A_7 \dots$ 特異点を持つための Z^i ($i \leq 11$) の係数の条件を定めてゆく。

そうすると、最終的には A_{11} 特異点をもつためには方程式 f は、一つ (同じ文字で表される) の係数のみになり、その値は零に等しくないという条件をもつ。

このプログラムは、左図のように与えられたニュートン多角形を変数変換によって持ち上げてゆく現象に対応している。

この解析変換による特異点の位相型判定原理を、その行程図にすると次のようになる。

特異点判定原理行程図



図における“頭がある”というのは、定義方程式 f の最低次の項（たち）が、標準型の最低次の項（たち）に一致することを示し、“頭がない”というのは、それが一致していないことを示す。

このような、特異点の位相型判定方法は、Blowing up 等の局所理論における標準型の結果によって行われる。しかし、これは次元や次数が高くなると、その研究結果は得られていない。

曲線及び曲面上の特異点は、その定義方程式の変数 $X_0, X_1, \dots, X_n$ の間の線型変換及び解析変換により、互いに異なる位相型の特異点に変化することはない。したがって、特異点を持つ曲線及び曲面の標準型を決定することは、曲線及び曲面上の特異点を決定することになる。

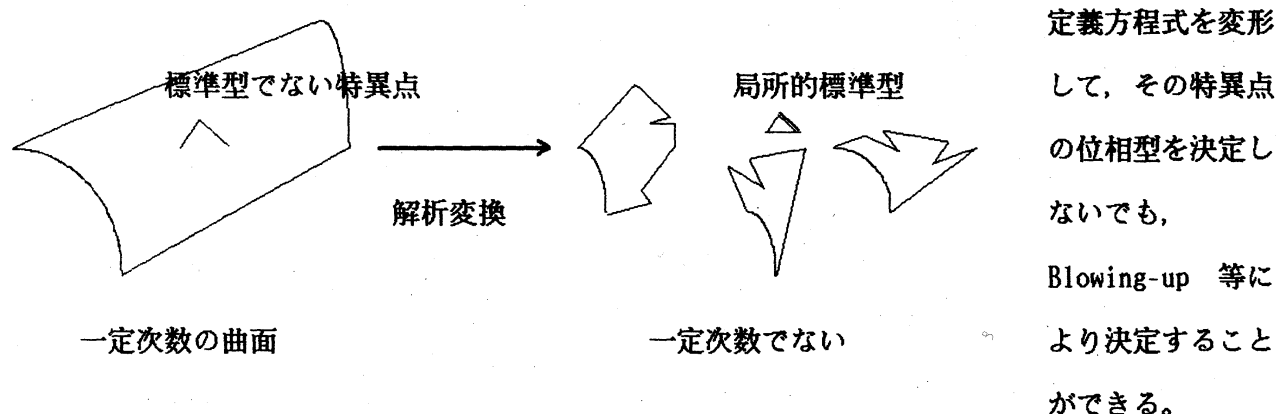
またさらに、現在知られている特異点の局所的な性質に対して、大域的な性質も明らかにできる。標準型というものの概念を明らかにし、その不変量を定めることにより特異点の標準型を考えよう。

2. 特異点の標準型について

$\mathbb{P}^2$ における2次曲線の線型同値なもの分類は, Hessian rank によって行われる。そして3次曲線の分類は, Arnold [1] 等によって知られている。しかし3次曲線の分類は, 次数の分割と, その各々の接触の状況により決定されており, これを次数4以上に用いることは難しい。

また, 線型変換によって, 一定次数の曲線及び曲面の定義方程式を変形すると, その変形された方程式は, もとの次数と同じ次数の曲線及び曲面を定義する。これに対して, 1で述べた解析変換(ここでは, 線型変換を含まない)によって, 一定次数の曲線及び曲面を定義する方程式を変形すると, 変形された方程式はもとの次数と異なる次数の曲線及び曲面となる。

したがって, 一定次数の曲線及び曲面を研究することに対して, 線型変換は大域的な情報を失うことがないのに対し, 解析変換は大域的な情報を破壊してしまう。局所的な特異点の位相型の決定は



特異点を定義方程式によって研究するねらいは, 曲線及び曲面の大域的な性質を, 局所理論を拡張した状態で構成することである。そのためには, 解析変換のような局所的な変換を用いることはできない。

§ 1. 線型変換による標準型の求め方, その1

$\mathbb{P}^2$ における同時座標を (X_0, X_1, X_2) とするとき, $\mathbb{P}^2$ において定義される3次の同次式を $f_3(X_0, X_1, X_2) = a_0 X_0^3 + a_1 X_0^2 X_1 + a_2 X_0^2 X_2 + a_3 X_0 X_1^2 + a_4 X_0 X_1 X_2 + \dots + a_9 X_2^3$

とし、 $f_3(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = 0$ が原点で特異点を持つとすると、

$f_3(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = 0$ の原点でのニュートン多角形の最初の状態（解析変換をしない状態）は、図5のようになる。（もちろん非退化であるとはいえない）

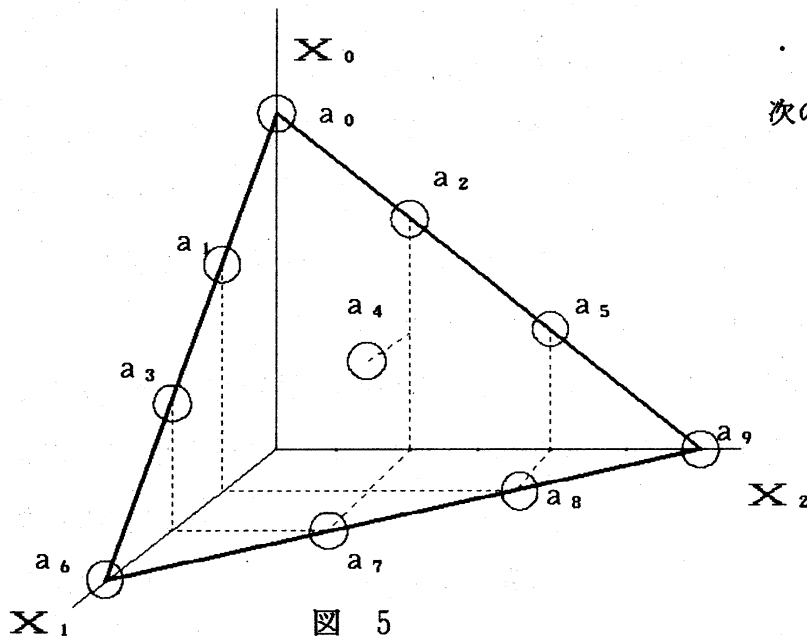
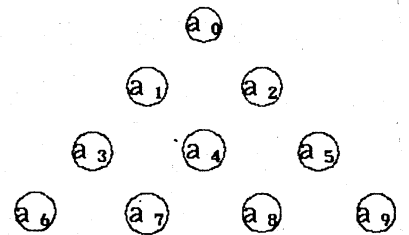


図 5

この面上の、項たちの係数 $a_0, a_1, \dots, a_9$ を平面上で考えると、次のような図式になる。



いま、 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0' + \alpha \mathbf{X}_1$ による係数の変化のうち、増加を $\bigcirc \leftarrow$ その原因となる項を $\bigcirc \longrightarrow$ によって表すことにする。

つまり、 $\bigcirc \longrightarrow$ は $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0' + \alpha \mathbf{X}_1$ による変換によって、 $\bigcirc$ の係数が矢印の行の先の項の係数として加えられることを示す。

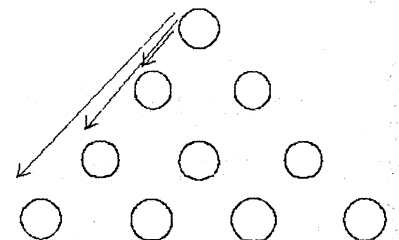
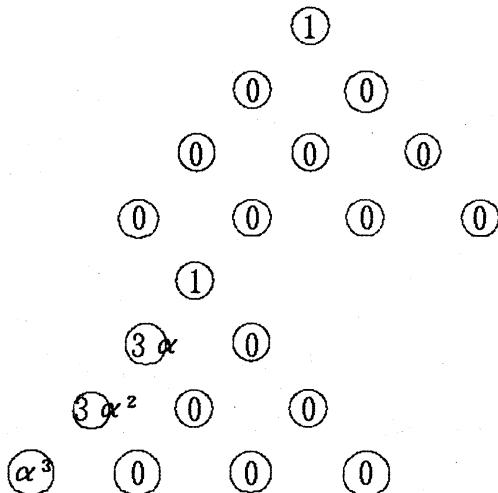
たとえば、

$$f_3(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_0^3$$

に対して、図式は左図のようになる。

このとき、 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0' + \alpha \mathbf{X}_1$ によって、図式は下図の左のようになる。この現象を矢印を用いて表すと右図の

ようになる。



これは $X_i = X_i' + \alpha X_j$ ($i \neq j, i = 1, 2, 3, \alpha \in \mathbb{C}$)

について、すべて同じ現象を示す。この変換によって矢印の終点の項の係数のうち、いずれか一つの数を任意にすることができる。

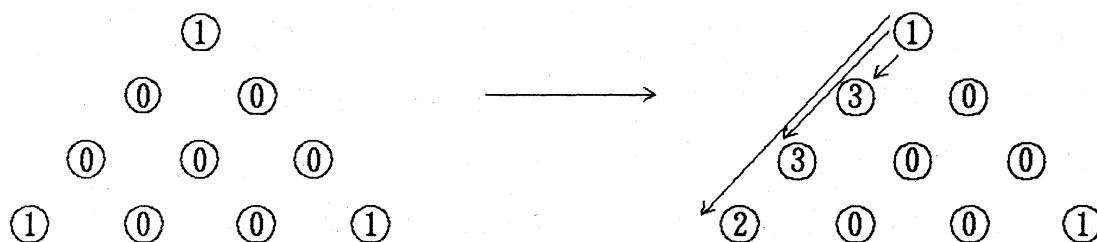
たとえば、 $f_3(X_0, X_1, X_2) = X_0^3 + X_1^3 + X_2^3$ のとき

$X_0 = X_0' + X_1$ とすると、

$$f_3(X_0', X_1, X_2) = X_0'^3 + 3X_0'^2 X_1 + 3X_0' X_1^2 + 2X_1^3 + X_2^3$$

となり、 X_1^3 の係数は1から2となる。

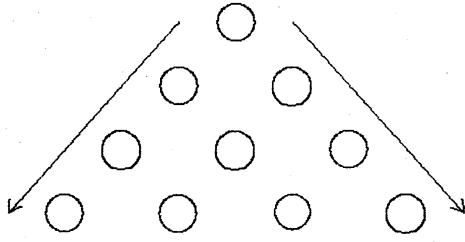
図式で表せば、下図のようになる。



$\mathbb{P}^2$ における3次の同次式の標準型を考えるとき、このことを用いて一般式の項の数を減らすことを考える。なぜならば、標準型としては、項数が少なくより簡単な式とするのが自然であろう。

この図式を用いると、矢印の方向は三角形の周に沿った6つの方向を持つ。そして、その矢印によって消去される項数は、変数の数の2倍、つまり $\mathbb{P}^2$ においては6つになる。しかし、どれでも6つが消去できるわけではない。なぜならば、どんな6つでも消去できるならば、2次の同次式のときは項が6つしかないのに6つ消去できるならば、項が無くなってしまふ。そのようなことはなく、これは明らかに矛盾である。項を消去するためには、異なった方向の矢印が1つ必要であり、なおかつ、その矢印の出る項の係数が0でないことが必要である。そのうえ、どの項を使ってどの項を消去するかという方法も大切である。 f を $\mathbb{P}^2$ における3次の同次式とすると、 $f \equiv 0$ でないかぎり $f = 0$ は線型変換及び変数変換により X_0^3 という項を持つ。このとき、0でないという条件の項は、 X_0^3 だけであり、まずこの項を用いた変換を行う。

そのとき、項を消去するために用いる、可能な方向は左図のような2方向に限られる。そして、その



2方向による変換を行った後に f を整理すると、次のようになる。

$$f = X_0^3 + f_1(X_1, X_2) X_0^2 + f_2(X_1, X_2) X_0 + f_3(X_1, X_2)$$

ただし、 $f_i(X_1, X_2)$ は、変数 X_1, X_2 の i 次の同次式を示す。

そして、次に $f_3(X_1, X_2)$ を X_1 と X_2 の線型変換によって $0, X_1^3 + X_2^3, X_1 X_2^2, X_2^3$ のいずれかに変換する。そうすると、残る変換の方向で係数の変えられる項は、 $X_0^3, X_0^2 X_1, X_0 X_1^2, X_0^2 X_2, X_0 X_2^2, X_0 X_1 X_2$ のうちのいずれかであり、その可能性は $6 \times 5 = 30$ 通りである。この最後の変換によって、どの項を消去するかによって1回目、2回目・・・の変換も異なるため、それらすべてのバランスのとれた変換をしなければならない。そのうえ $f_3(X_1, X_2) = 0$ の状態が P^1 においてどのような状態であるか、すなわち、点がないか3つの異なる点か2重点と1点かそれとも3重点かということを、判定するのにもたやすいことではない。これは、 P^2 における定義方程式の簡約化が P^1 における3点の状態の分析を含むことを意味する。以上のような方法によって P^2 の4次以上の曲線を線型同値なものに分類してゆくのは、まだ手間がかかる。そこで、2次曲線の際の Hessian の考え方を拡張して、3次以上の曲線及び曲面に対しても用いることができるようにすることを考えよう。

§ 2. Hessian rank の拡張

2次曲線の定義方程式における Hessian rank はひじょうに便利なものである。それは、いかなる定義方程式に対してもその式を行列に対応させ、さらにその行列の基本変形によって、その式の不変量に対応させるものであった。いま、Hessian を3次以上の曲線の定義方程式に対しても使用できるようにするためには、3回連続の偏微分を考えなければならない。なぜならば、定義方程式 f と Z の元

を対応させるためには、Hessian rank と同じ方針を取ると

$$f \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{という対応が必要である。}$$

そこで、いま M として立体化した行列を考える。

定義 2. 1 (3次元 Hessian (3-D. H.))

f を $\mathbb{P}^2$ における 3 次の同次式とすると、

M^3 を 3 重構造の行列 (行列を 3 枚重ねたもの) とし、それぞれ上の面から $\partial f / \partial X_0$,

$\partial f / \partial X_1$, $\partial f / \partial X_2$ の Hessian とする。すなわち $\mathbb{R}_+^3$ の点 (i, j, k) に

$$a_{ijk} = \partial^3 f / \partial X^i \partial X^j \partial X^k \quad (i + j + k = 3, i, j, k : \text{整数})$$

という数を対応させた空間を M^3 とする。(図 6 参照)

このように定義すると M^3 は、
6 面を持つ立体となる。この M^3
を 3-Dimensional Hessian
(3-D. H.) としよう。

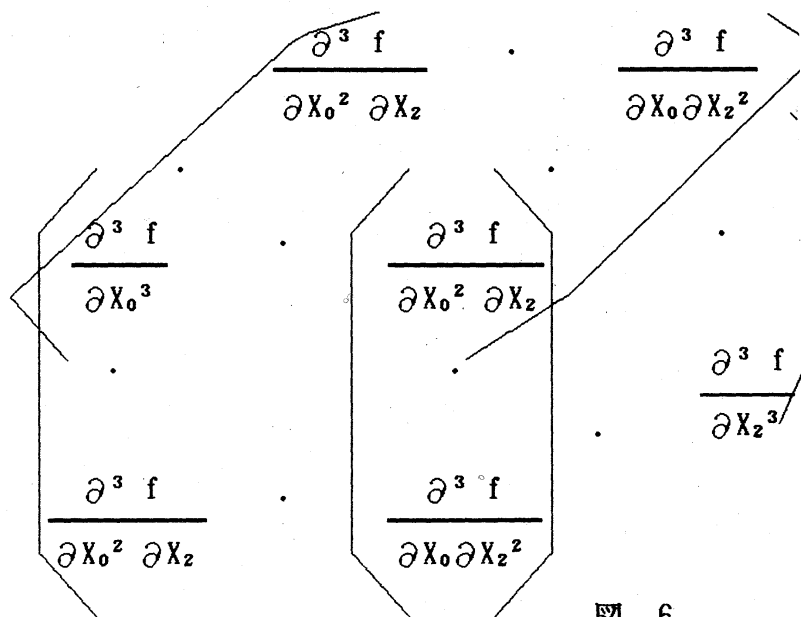


図 6

さらにこの 3次元 Hessian の基本変形を次のように定める。

定義 2. 2 (3-D. H. の基本変形)

上の 3-D. H. において、 $\partial f / \partial X_0$, $\partial f / \partial X_1$, $\partial f / \partial X_2$ の Hessian を表す面は、それぞれ 3 面ずつある。(図 7 参照)

このとき、面と面について、行列のときの行と行または列と列と同じ基本変形をする。（3面ずつ同じ面があるから、独立な3面について行えば他の6面は同じ変形になる。） $\partial f/\partial X_0$, $\partial f/\partial X_1$, $\partial f/\partial X_2$ の Hessian 面に対して、それぞれ独立に基本変形を行うことはできない。なぜならば、

a_{ijk} という成分は、 i, j, k の値によりいろいろな面に属する。

基本変形に際しては、立体としての貼り合わせの条件を満たすものとする。

つまり、 $\partial f/\partial X_0$ の Hessian 面に基本変形を行ったとき、 $\partial f/\partial X_1$ の Hessian 面及び $\partial f/\partial X_2$ の Hessian 面に属する $\partial f/\partial X_0$ の Hessian 面の成分は、その変形によって同時に変化させるものとする。

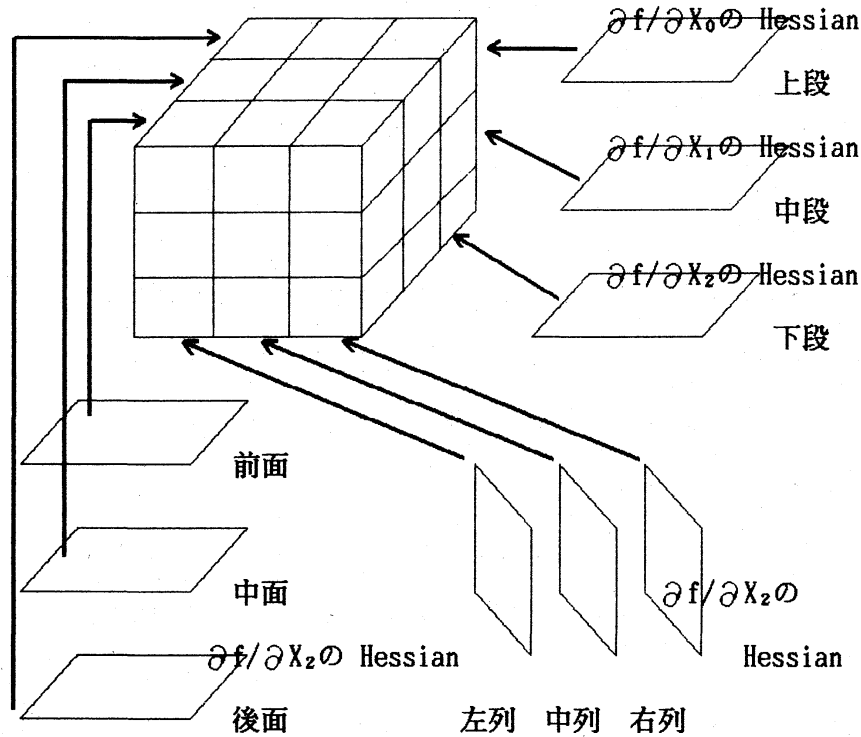


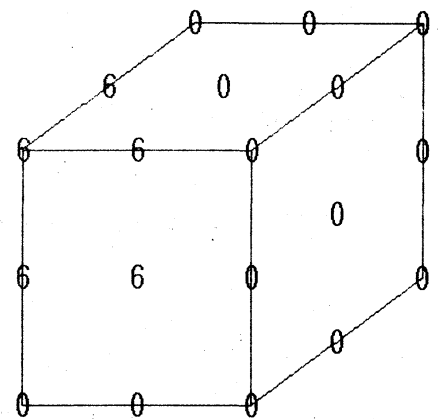
図 7

基本変形の例

右図のような立体を構成する $f = X_0^3$

$$+ 3 X_0^2 X_1 + 3 X_0 X_1^2 + X_1^3$$

に対して、定義 2.2 による基本変形を行うと次のようになる。



中段の面の行列 - 上段の面の行列

$$= \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{変形後の中段の面}$$

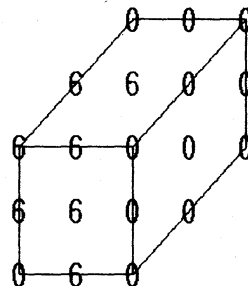
このとき、変形後の上段の面は、変形後の中段の面の成分の変化により $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

したがって、変形後の立体は $a_{111} = 6$ であり、それ以外の成分はすべて 0 となる。

3-D. H. の定義によって、2 次の Hessian と同様に、すべての 3 次の同次式が 3-D. F によって一意的に表される。

たとえば、 $f = X_0^3 + 3 X_0^2 X_1 + 3 X_0 X_1^2 + X_1^3$

の 3-D. H. は



となり、

f は次のような計算によって定められる。

$$f = \frac{1}{3!} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3!} \times \left(\begin{array}{c} 0 \\ 6x_0 + 6x_1 \\ 6x_0 + 6x_1 \\ 0 \\ 6x_0 + 6x_1 \\ 6x_0 + 6x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{array} \right) (x_0 \ x_1 \ x_2) \\
&= \frac{1}{3!} \times \left(\begin{array}{c} 6x_0^2 + 6x_0x_1 + 6x_0x_1 + 6x_1^2 \\ 6x_0^2 + 6x_0x_1 + 6x_0x_1 + 6x_1^2 \\ 0 \end{array} \right) (x_0 \ x_1 \ x_2)
\end{aligned}$$

$$= (1/3!) (6x_0^3 + 12x_0^2x_1 + 6x_0x_1^2 + 6x_0^2x_1 + 12x_0x_1^2 + 6x_1^3)$$

$$= (1/3!) (6x_0^3 + 18x_0^2x_1 + 18x_0x_1^2 + 6x_1^3)$$

$$= x_0^3 + 3x_0^2x_1 + 3x_0x_1^2 + x_1^3$$

となる。

この基本変形は、前の § において示した、線型変換による項の係数の変化に対応している。いま例を前の § の図式を用いて書くと、図 8 の右のようになる。そして、この矢印を立体の中に持ち込めば、矢印の方向は基本変形の方法と一致する。（いまの例では、 ∂X_0 面から、 ∂X_1 面へのこと）（図 8 の左図参照）

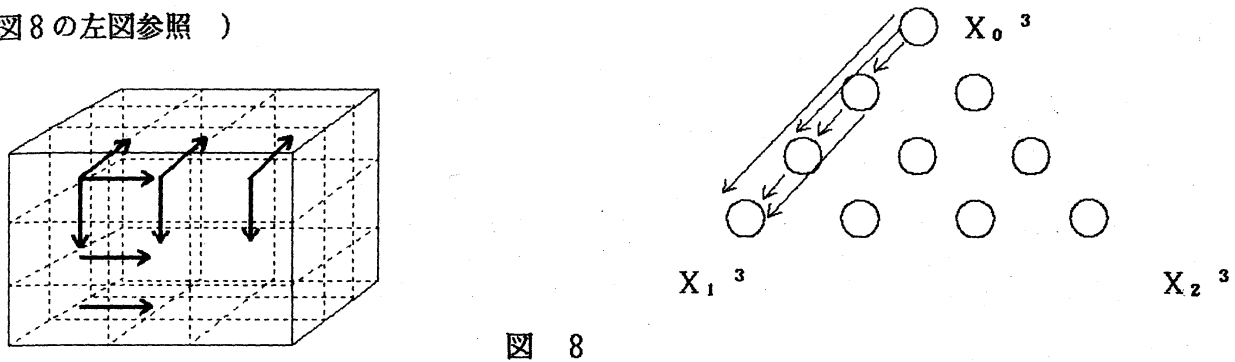


図 8

以上のような、行列の立体化は、3次元に限られたものではなく、4次元以上に対しても同様にして行える。4次以上の Hessian を定義 2. 1 の一般化として次のように定義できる。

定義 2. 3 （一般型 Hessian ）

$\mathbb{P}^n$ を n 次元複素射影空間とし、 f を $\mathbb{P}^n$ における m 次の同次式、
 $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ を、その同時座標とすると、
 $n+1$ 次元の一辺が $n+1$ の原点を頂点に持つ立方体を考える。その格子点の座標を
 $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ とするとき、それぞれの格子点に次のように定める数
 $a_{i_0 i_1 \dots i_n} \in \mathbb{C}$ を対応させたものを一般型 Hessian とする。

$$a_{i_0 i_1 \dots i_n} = \frac{\partial^n f}{\partial X_0^{i_0} \partial X_1^{i_1} \dots \partial X_n^{i_n}}$$

ただし、 $i_0, i_1, \dots, i_n$ は、正の整数であり、

$$i_0 + i_1 + \dots + i_n = m \text{ を満たす。}$$

さらに、定義 2. 2 の一般化として次の定義を得る。

定義 2. 4 (一般型 Hessian に対する基本変形)

定義 2. 3 と同じ条件の f で、各々の変数 X_i ($0 \leq i \leq n$) に対して、 $a_{i0i1\dots in}$ のうち、 X_i で偏微分したとき 0 でない項たちすべての、偏微分後の係数たちのつくる n 次元の Hessian 面を ∂X_i 面とする。

このとき、 $n+1$ 次元の基本ベクトルのいずれかによって対応する成分どうしに、すべて同じ加減を行うことを一般型 Hessian の基本変形とする。

(もちろん、3-D. H. のときと同様に、2つの変数のつくるそれぞれの面は、多くの対応をするが、その中の一つの対応に対して、他の面は従属的に変化する。したがって、一組の面についてだけ考えればよい。)

以上のように定義すると、2次元の2次の同次式にたいする Hessian rank と同様にしてそれぞれの定義方程式は、基本変形によって 0 でない成分の個数を最小にすることができる。しかし、単に一つの整数によってその数を表すと、同じ数に対して2つ以上の線型同値でない定義方程式が対応してしまう。

たとえば、3-D. H. のとき、

$$f = X_0 X_1 X_2 \quad \text{と} \quad g = X_0 X_2^2 + X_1^2 X_2$$

は共に 0 でない成分は 6 個であり、線型変換によってこれよりも 0 でない成分の個数を減らすことはできない。

このような違いを何か一位的に区別する方法はないだろうか？

それを解決するために、次のような定義をする。

定義 2. 5 (判定要素, 判定数)

$$\varepsilon_{ik}^f := \{0 \text{ でない } \partial X_{ik} \text{ 面上の成分の個数を項ごとに } + \text{ でならべたもの (ただし, } 0 \text{ は省略)}\}$$

$$\theta_f := (\varepsilon_{i0}^f, \varepsilon_{i1}^f, \dots, \varepsilon_{in}^f)$$

この ε_{ik}^f を f の判定要素, θ_f を f の判定数とする。

例

$\mathbb{P}^2$ における 3 次曲線を定義する, 定義方程式

$$f = X_0^3 + X_1^3 + X_0 X_1 X_2 \quad \text{に対して,}$$

$$\varepsilon_{i0}^f = 1 + 2, \quad \varepsilon_{i1}^f = 1 + 2, \quad \varepsilon_{i2}^f = 2, \quad \theta_f = (1 + 2, 1 + 2, 2) \text{ である}$$

定義 2. 6 (判定総和数)

T_{ik}^f を ε_{ik}^f の代数和 (+記法を計算したもの) とするとき,

$$T_f := (T_{i0}^f \quad T_{i1}^f \quad \cdots \quad T_{in}^f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n \text{ 行}} + (T_{i0}^f \quad T_{i1}^f \quad \cdots \quad T_{in}^f) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (T_{i0}^f \quad T_{i1}^f \quad \cdots \quad T_{in}^f) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n \text{ 行}}$$

例

先の例と同じ f に対して,

$$T_f = (3 \quad 3 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (3 \quad 3 \quad 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (3 \quad 3 \quad 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 8 \quad \text{となる。}$$

定義 2. 7 (T_f の最小数)

f に線型同値なすべての f_i ($i = 1, 2, \dots$) に対して,

$$T_{\bar{f}} \leq T_{f_i} \text{ となる } T_{\bar{f}} \text{ を } T_f \text{ の最小数とする。}$$

例

P^2 において定義された $f = X_0^3$ は, 変数変換を含むいかなる線型変換に対しても, その T_f は1以上である。 よって, $T_{\bar{f}} = 1$ である。

定義 2. 8

f, g を P^2 における m 次の同次式とすると,

$\theta_f = \theta_g$ であるとは, $\varepsilon_{ik}^f = \varepsilon_{ij}^g$ となる i と j の対応が全単射影であることとする。

例

$$P^2 \text{ において, } f = X_0^3 + X_0 X_1^2$$

$$g = X_1^3 + X_1 X_2^2 \text{ とすると,}$$

$$\theta_f = (1+1, 2, 0) \quad \theta_g = (0, 1+1, 2) \text{ であり,}$$

$$\varepsilon_1^f = \varepsilon_2^g, \quad \varepsilon_2^f = \varepsilon_3^g, \quad \varepsilon_3^f = \varepsilon_1^g \text{ より}$$

$$\theta_f = \theta_g \text{ である。}$$

次のことは, 定義より明らかである。

$$f \text{ と } g \text{ が線型同値} \quad \Leftrightarrow \quad T_{\bar{f}} = T_{\bar{g}} \text{ かつ } \theta_{\bar{f}} = \theta_{\bar{g}}$$

以上のような定義によって、 n 次元複素射影空間における m 次の同次式を、線型同値類に分類することができる。

その計算の際に数式処理言語を用いている。定義を条件文にし、コンピューターによって多量のデータを整理することによって少しずつ新しい結果を得ているところである。

予想

$\bar{f}$ が f の Normal form であり、 $\{T_f, \theta_f\}$ が Normal forms の位相的不変量である。

参考文献

- [1] Arnold, V.I. : Normal forms of functions in the neighborhoods of degenerate critical point. Russian Math. Survey, 27(2), (1974) 11-49
- [2] Arnold, V.i. : Normal forms of functions near degenerate critical points the Weyl group A_k , D_k , E_k and Lagrange singularities, Func. Anal. App.6, (1972) 254-272
- [3] Kouchnirenko, A.G. : Polyèdres Le Newton et nombres de Milnor, Inventiones Math. 32, (1976) 1-31
- [4] Laufer, H.B. : On minimally elliptic singularities, Amer. J. Math. 99, (1977) 1257-1295
- [5] Laufer, H.B. : Normal two-dimensional singularities, Princeton univ. press (1971)
- [6] Lê Dung Trang, Ramanujam, C.P. : The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type, Amer. J. Math. 98, (1976) 67-78
- [7] Oka, M. : On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary, J. Math. Soc. Japan, Vol. 31, (1979) 435-450
- [8] Takahashi, T. , Watanabe, K. , Higuchi, T. : On the Classification of Quartic surfaces with a Triple point Part I & Part II : Science Reports of the Yokohama National University, Sec. I, No.29, November, (1982) 47-94