

アイゼンスタイン級数のフーリエ係数について

名大理 北岡良之 (Yoshiyuki Kitaoka)

$S_{p,n}$ のアイゼンスタイン級数 $\sum \det(CZ+D)^{-k}$, 及び $\sum |\det(CZ+D)|^{-\alpha} |\det(C\bar{Z}+D)|^{-\beta}$ (k, α, β は偶数) のフーリエ係数に次の様な Dirichlet 級数があらわれる:

$$b(s, T) = \sum_{R} D(R)^{-s} e(\sigma(TR))$$

ここで $T^{(n)}$ は half-integral な対称行列, $R^{(n)}$ は対称行列でその要素は $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を動き $D(R)$ は R の単因子の分母の積である, σ は行列の跡であり $e(x) = \exp(2\pi i x)$ とする. holomorphic の場合のフーリエ係数は簡単な項を除いて $b(k, -T)$, real analytic の時は $b(\alpha+\beta, T)$ と一般化された合流型超幾何関数があらわれる.

ここで上の $b(s, T)$ に於て $D(R)$ を素数 p のみに限って R を動かしたものを $b_p(s, T)$ とすると容易にわかる様に

$$b(s, T) = \prod_p b_p(s, T)$$

となる. ここでの目的は $b_p(s, T)$ をより見易い形にすることである. $n=1$ の時は古典的であり $n=2$ の時も Kaufhold より

十分に調べられている。まず結果を列挙しよう。

Th 1. $T^{(n)} = \begin{pmatrix} T^{(n-1)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ を half-integral な行列とすると

$$b_p(s, T) = (1 - p^{-s} \chi(1 + p^{1-s} \chi(1 - p^{n+1-2s}))^{-1} b_p(s-1, T_1).$$

これにより T は regular の場合 に帰着される。

Th 2. $T^{(n)}$ を half-integral で $|T| \neq 0$ とすると

$$b_p(s, T) = \sum_G (p \operatorname{ord}_p \det G)^{n+1-2s} a(-T[G^{-1}], s)$$

となる。ここで G は $GL_n(\mathbb{Z}_p) \setminus \{GL_n(\mathbb{Q}_p) \cap M_n(\mathbb{Z}_p)\}$ の代表を走る
 $\neq a(T, s)$ は T が half-integral でなければ 0 とし、従って上の和は有限和となる。 T が half-integral の時は次の様に定義する。

有限体 $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ 上 n 次元のベクトル空間 $N = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_n]$ に

$Q(\sum x_i v_i) = T \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ で 2 次形式を定義する。 N_2 を N の max.

totally singular subspace とし $N = N_1 \perp N_2$ と直交分解する。

$d = \dim N_1$ とし

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & d=0 \text{ or } N_1 \cong \operatorname{diag}((\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}), \dots, (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})), \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくとき

$$a(T, s) = (1 - p^{-s}) \begin{cases} (1 + \varepsilon p^{n-d/2-s}) \prod_{1 \leq i \leq n-d/2-1} (1 - p^{2i-2s}) & 2 \nmid d, \\ \prod_{1 \leq i \leq n-(d+1)/2} (1 - p^{2i-2s}) & 2 \mid d. \end{cases}$$

$$\text{Cor. } b_p(s, O^{(n)}) = (1 - p^{-s}) \prod_{1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor} (1 - p^{2k-2s}) \left\{ (1 - p^{n-s}) \prod_{\substack{n+1 \leq j \leq 2n \\ 2 \nmid j}} (1 - p^{j-2s}) \right\}^{-1}$$

以下 $T^{(n)} = \begin{pmatrix} T_1^{(n-r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $|T_1| \neq 0$, $0 \leq r < n$ とする.

$$\bullet \quad p \nmid |2T_1| \Rightarrow b_p(s, T) = (1-p^{-s}) \prod_{1 \leq j \leq [n/2]} (1-p^{2j-2s}) \prod_{\substack{n+1 \leq k \leq n+r \\ 2 \nmid k}} (1-p^{k-2s})^{-1}.$$

$$\begin{cases} (1-\varepsilon(T_1) p^{(n+r)/2-s})^{-1} & 2 \nmid n-r, \\ 1 & 2 \nmid n-r, \end{cases}$$

$$s = \frac{n}{2} \quad \varepsilon(T_1) = \left(\frac{(-1)^{(n-r)/2} |2T_1|}{p} \right) \text{ とする.}$$

$$\bullet \quad 2 \nmid n-r \Rightarrow b_p(s, T) = (p^{-s} \text{ の多項式}) \times (1-p^{-s}) \prod_{1 \leq j \leq [n/2]} (1-p^{2j-2s}) \times \prod_{\substack{n+1 \leq k \leq n+r \\ 2 \nmid k}} (1-p^{k-2s})^{-1}.$$

$$\bullet \quad 2 \nmid n-r \Rightarrow b_p(s, T) = (p^{-s} \text{ の多項式}) \times (1-\eta p^{(n+r)/2-s})^{-1} \cdot (1-p^{-s}) \prod_{1 \leq j \leq [n/2]} (1-p^{2j-2s}) \prod_{\substack{n+1 \leq k \leq n+r \\ 2 \nmid k}} (1-p^{k-2s})^{-1},$$

ここで η は $G^{(n-r)} \in M_{n+r}(\mathbb{Z}_p)$ で $T_1[G^{-1}]$ が half-integral かつ $p \nmid |2T_1[G^{-1}]|$ となるものがあれば $\eta = \varepsilon(T_1[G^{-1}])$ (上の記号) そうでなければ 0 とする.

これらによって $b_p(s, T)$ はある程度わかったといえる. 実際 Shimura, On Eisenstein series にある予想の3つの内の一つの場合 α_0 , Case SP については少々修正の上正しいことがわかる. 他の二つの場合も上の Th の証をまねてできるはずである. Th 1, 2 によって原理的には時間をかければ $b_p(s, T)$

は求める訳であるが実際に p の有理式として書き下すことは大変である. $n=1$ なら古典的であり $n=2$ のときは前出の Kaufhold によって具体的に与えられているのでここでは $n=3$ の時の式を与えておく.

m を 4 以上の偶数とし $S = \begin{pmatrix} 1_{m/2} \\ 1_{m/2} \end{pmatrix}$ とし $\alpha_p(T, S) = b_p(m/2, T)$ ($p \neq 2$) とおく. α はいわゆる local density である. $\alpha_p(T, S)$ を $\alpha(T)$ と略記すると

Th 3. $d = (1 - p^{-m/2})(1 - p^{2-m})$, $T = \text{diag}(\varepsilon_1 p^{a_1}, \varepsilon_2 p^{a_2}, \varepsilon_3 p^{a_3})$, $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}_p^\times$, $-1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ とし

$$\chi(T) = \begin{cases} 1 & a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \pmod{2}, \\ \chi(-\varepsilon_1 \varepsilon_2) & a_1 \equiv a_2 \not\equiv a_3 \pmod{2}, \\ \chi(-\varepsilon_2 \varepsilon_3) & a_1 \not\equiv a_2 \equiv a_3 \pmod{2}, \\ \chi(-\varepsilon_1 \varepsilon_3) & a_1 \not\equiv a_2 \not\equiv a_3 \pmod{2} \end{cases}$$

とおく. 右辺の χ は $\text{mod } p$ の平方剰余記号である.

$p \neq 2$ とすると $\gamma(T) = \alpha(p^2 T) - (p^{3-m/2} + p^{4-m})\alpha(pT) + p^{4-3m/2}\alpha(T)$

に対し $\gamma(T)/d = 1 + \chi(T)p^{(2-m/2)(a_1+a_2+a_3+6)}$ となる. 更に

に $\bullet$ $a_1 \equiv a_2 \pmod{2}$ のとき

$$\begin{aligned} & \alpha(T)/d \\ &= \sum_{0 \leq k \leq a_1} \left(\sum_{0 \leq i \leq (a_1+a_2)/2 - k - 1} p^{(4-m)i} \right) p^{(3-m/2)k} \\ &+ p^{a_1/2 + (4-m)a_2/2} \left(\sum_{0 \leq k \leq a_1} p^{(2-m/2)k} \right) \left(\sum_{0 \leq j \leq [(a_3-a_2-1)/2]} p^{(4-m)j} \right) \\ &+ \chi(-\varepsilon_1 \varepsilon_2) p^{a_1/2 + (4-m)a_2/2} \left(\sum_{1 \leq k \leq a_1+1} p^{(2-m/2)k} \right) \left(\sum_{0 \leq j \leq [(a_3-a_2)/2 - 1]} p^{(4-m)j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \chi(T) p^{(q_1+q_2)/2 + (2-m/2)q_3} \left(\sum_{0 \leq k \leq q_1} p^{(2-m/2)k} \right) \left(\sum_{0 \leq j \leq (q_2-q_1)/2} p^{(3-m)j} \right) \\
& + \chi(T) p^{(m/2-1)q_1 + (2-m/2)(q_2+q_3) + 3-m} \sum_{0 \leq k \leq q_1-1} \left(\sum_{0 \leq j \leq k} p^{(1-m/2)j} \right) p^{(2-m/2)k}
\end{aligned}$$

④ $q_1 \not\equiv q_2 \pmod{2}$ のとき

$$\begin{aligned}
& \alpha(T)/d \\
& = \sum_{0 \leq k \leq q_1} \left(\sum_{0 \leq j \leq (q_1+q_2-1)/2 - k} p^{(5-m)j} \right) p^{(3-m/2)k} \\
& + \chi(T) p^{(m/2-1)q_1 + (2-m/2)(q_2+q_3) + 3-m} \sum_{0 \leq k \leq q_1-1} \left(\sum_{0 \leq j \leq k} p^{(1-m/2)j} \right) p^{(2-m/2)k} \\
& + \chi(T) p^{(q_1+q_2)/2 + (2-m/2)q_3 + (3-m)/2} \left(\sum_{0 \leq k \leq q_1} p^{(2-m/2)k} \right) \left(\sum_{0 \leq j \leq (q_2-q_1-1)/2} p^{(3-m)j} \right)
\end{aligned}$$

註 $b_p(n, T)$ は p^n の有理式だから上で $m=2$ とすれば $b_p(n, T)$ の具体的な式となる。

Cor. $q_n(T)$ を $Sp_n(\mathbb{Z})$ ($n \leq 3$) の weight $k (\equiv 0 \pmod{2})$ のアークエンスタイン級数のフーリエ係数とするととき次の ~~weight~~ ~~level~~ 級数を考える:

$$\sum_{t=0}^{\infty} a_n(p^t T) x^t$$

ここで T は half-integral positive definite 行列とする。
 $p \neq 2$ とするとこれは x の有理式であって分母は

$$\prod_{r=0}^n (1 - p^{rk - r(r+1)/2} x)$$

であり分子は n 次の多項式、更に $(p, |T|) = 1$ ならば $n-1$ 次である。

注. 一般論により分母は 2^n の多項式でその具体的な形は

わかっている(分母は既約分数に分解した時の分母を意味しない!)

これらの証明については Nagoya Math. J. 及び Proc. of Japan Acad. を御覧いただければ幸いです。(この稿が出版される頃には既に其に出版されているはずです)

最後に Maass relation について.

いわゆる degree 2 のマッセ・スタイン・級数の Maass rel. はそのフーリエ係数が local density の無限積になっていることから local density の言葉に訳すと次の様になる.

$S = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (前巻のその) としておくと ($p \neq 2$ に對しては)

$$\alpha_p(\text{diag}(\varepsilon_1 p^{q_1+1}, \varepsilon_2 p^{q_2+1}), S) = p^{2-m/2} \alpha_p(\overset{\text{diag}}{\text{diag}}(\varepsilon_1 p^{q_1}, \varepsilon_2 p^{q_2}), S)$$

が $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ と q_1, q_2 2 のみより (この部分を (i) とする) 更にその値は $\alpha_p(\text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2 p^{q_1+q_2+2}), S)$ に一致する (この部分を (ii) とする).

degree 3 の場合には上の (i) に對する拡張として Th_3 の差分 $\gamma(T)$ が $\chi(T)$ と $q_1 + q_2 + q_3$ 2 のみよるといふことも考えるのかより様に思われる. (ii) の方は $q_1, q_2 \pmod{2}$ の時は $\gamma(T)$ が又 local density 自身になるが、^{一般には} どうすればよいのかよくわからない. 少なくとも 2 次形式の立場からは有益な式は得られない. しかし Maass rel. の拡張を探るゝとするならば cusp.

form でそのフーリエ係数が T の "形" にのみよるものを考え、
 即ち T の局所化形のみが問題になる、(degree 2 の時也是这样な
 っている) 差分 $\chi(T)$ に対応するものが上の根 $\chi(T)$ と $e_1 + e_2$
 $+ a_3$ にのみよる subspace を考える。(注: loc. density はフー
 リエ係数に直すには $|T|$ の中を補正しなければならない。)
 この subspace が Hecke op. で内包しているかどうかを check
 (に対応する degree 2 の時也是这样なのかわからないか)
 Map space があれば Hecke op. で内包しているはずだからア
 イゼンスタイン級数のフーリエ係数を見らなから Map
 space に到るといふのが一つの道"の様に見える。