

Examples of compact Einstein Kähler
manifolds with positive Ricci tensor

阪大理 坂根由昌 (Yusuke Sakane)

0. Introduction

P を complex dimension N の compact complex manifold
とし, J により P の complex structure を表す。 g を P 上の
hermitian metric とするとき, $\omega(X, Y) = g(X, JY)$ (X, Y
は P の tangent vector) により P 上の Kähler form ω が
定義されるが, $d\omega = 0$ のとき, (P, J, g) は Kähler であ
るという。 κ により Kähler metric g の Ricci tensor
を表すと, κ は hermitian となり Ricci form ρ が
 $\rho(X, Y) = \kappa(X, JY)$ により定義される。よく知られてい
るように, 第2 Bianchi identity から $d\rho = 0$ となり ρ は
type $(1, 1)$ の cohomology class を定義し, P の first Chern
class $c_1(P)$ は

$$\frac{1}{2\pi} [\rho] = c_1(P)$$

で与えられる。 (P, J, g) が Einstein Kähler であると

すると, $\rho = k\omega$ ($k \in \mathbb{R}$) となり

$$(1) \quad k > 0 \rightarrow c_1(P) > 0$$

$$(2) \quad k = 0 \rightarrow c_1(P) = 0$$

$$(3) \quad k < 0 \rightarrow c_1(P) < 0$$

となる。逆に, (P, J, g) を compact Kähler manifold で first chern class $c_1(P)$ が正, 零, 負であるものとするとき, (P, J) 上に Einstein Kähler metric が存在するかという問題が考えられるが, これはよく知られているように, (3) に対応するとき, すなわち, 負のときは, Aubin [1] と Yau [10] により独立に, Einstein Kähler metric の存在と一意性が証明された。また (2) に対応するとき, すなわち, 零のときは, いわゆる Calabi 予想が成り立つこととして, 各 Kähler class に vanishing Ricci tensor をもつ Kähler metric が一意的に存在することが Yau [10] により証明された。一方 (1) に対応するとき, すなわち, first chern class $c_1(P)$ が正のときは, 一般には反例, Einstein Kähler metric の存在しないもの, があり逆は成り立たない。最近 Bando-Mabuchi [2] によって, (holomorphic automorphism を除いて) Einstein Kähler metric の一意性が first chern class が正のときにも証明された。また first chern class が正である compact Einstein Kähler

manifolds のよく知られた例としては, Kähler C-space, すなわち, simply connected compact Kähler homogeneous space がある. ここでは non-homogeneous Einstein Kähler manifolds の例を構成する.

1. Obstruction theorems と 反例.

(P, J, g) を compact Kähler manifold とするとき, $\mathcal{G}(P, J)$ により P 上の holomorphic vector fields 全体のなす Lie algebra, $\mathcal{K}(P, g)$ により P 上の Killing vector fields 全体のなす Lie algebra とすると, $\mathcal{K}(P, g) \subset \mathcal{G}(P, J)$ とみなせるが, g が Einstein Kähler metric のときは, 次の Matsushima の定理がなりたつ.

Theorem M [7] (P, J, g) を Einstein Kähler manifold とするとき, $\mathcal{G}(P, J) = \mathcal{K}(P, g) \oplus J\mathcal{K}(P, g)$. 特に, $\mathcal{G}(P, J)$ は compact Lie algebra $\mathcal{K}(P, g)$ の複素化となり $\mathcal{G}(P, J)$ は reductive Lie algebra となる.

松嶋の定理を用いて, Einstein Kähler metric の存在しない例は Yan [9] によって構成された.

例 1 (Yan) P を $P^2(\mathbb{C})$ の一点を blow up して得られるもの, すなわち, $P^1(\mathbb{C})$ 上の hyperplane line bundle H と trivial line bundle 1 の直和 $1 \oplus H$ より

得られる $P^1(\mathbb{C})$ 上の $P^1(\mathbb{C})$ -bundle とするとき, $\mathcal{G}(P, \mathcal{J})$ は reductive でないが, first chern class $C_1(P)$ は正である.

Proposition 1. X を Kähler c-space とし, ξ を X 上の non-trivial holomorphic line bundle とする. ξ と trivial line bundle 1 の直和 $1 \oplus \xi$ より得られる X 上の $P^1(\mathbb{C})$ -bundle $P(1 \oplus \xi)$ を P で表す. このとき, P 上の holomorphic vector fields 全体の Lie algebra $\mathcal{G}(P, \mathcal{J})$ が reductive である必要十分条件は $H^0(X, \xi) = H^0(X, \xi^{-1}) = (0)$ となることである. さらにこのとき, $\mathcal{G}(P, \mathcal{J})$ は, $\text{Aut}_0(X) \times \mathbb{C}^*$ の Lie algebra と一致する. (cf. [5, 8])

特別の場合として, H を $P^n(\mathbb{C})$ 上の hyperplane line bundle とするとき, Theorem M と Proposition 1 から次がわかる.

例 2. $1 \leq a \leq n$ のとき, $P(1 \oplus H^a)$ の first chern class は正となるが, $P(1 \oplus H^a)$ 上には Einstein Kähler metric は存在しない.

例 3. H_1, H_2 を $P^n(\mathbb{C}), P^m(\mathbb{C})$ の hyperplane line bundle からひきおこされた $P^n(\mathbb{C}) \times P^m(\mathbb{C})$ 上の holomorphic line bundle とする. 整数 a, b に対して $P_{a,b} = P(1 \oplus H_1^{-a} \oplus H_2^b)$ とおくとき, $|a| \leq n, 0 \leq b \leq m$ ならば $P_{a,b}$ の first chern class は正となるが, $-m \leq a \leq 0, 0 \leq b \leq m$,

$(a, b) \neq (0, 0)$ ならば, $P_{a,b}$ 上には Einstein Kähler metric は存在しない. また $1 \leq a \leq n, 1 \leq b \leq m$ ならば, $\mathcal{G}(P_{a,b}, J)$ は $sl(n+1, \mathbb{C}) \times sl(m+1, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ と同型な Lie algebra となる.

次に Futaki invariant を思い出しておく. (P, J, g) を first Chern class $C_1(P)$ が正である compact Kähler manifold とし, $C_1^+(P) = \{ \omega \in C_1(P) \mid \omega \text{ は positive closed type } (1,1) \text{ real } 2\text{-form} \}$ とおく. $\omega \in C_1^+(P)$ に対する Ricci form を ρ_ω で表すと, P 上の $\mathbb{C}^m$ -function F で
$$\frac{1}{2\pi} \rho_\omega - \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} dd'' F$$
 となるものが定数を加えることを除いて一意的に存在する. この F を用いて, 写像 $f: \mathcal{G}(P, J) \rightarrow \mathbb{C}$ を $f(X) = \int_P X F \omega^N$ ($N = \dim_{\mathbb{C}} P$) により定義する. このとき次の二本の定理がなりたつ.

Theorem F [4] linear map $f: \mathcal{G}(P, J) \rightarrow \mathbb{C}$ は $\omega \in C_1^+(P)$ のとり方によらない. 特に, (P, J, g) が Kähler Einstein metric を許容すれば, $f \equiv 0$ となる.

例 4 (Futaki [4]) $P^2(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ 上の $P^1(\mathbb{C})$ -bundle $P_{1,1}$ において, $P^2(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ 上では恒等変換を引きおこす $\mathbb{C}^*$ -action の holomorphic vector field X に対して, $f(X) \neq 0$ となり, $P_{1,1}$ ($P^2(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ 上の $P^1(\mathbb{C})$ -bundle) は Einstein Kähler metric を許容しない. この例では, $\mathcal{G}(P_{1,1}, J)$ は reductive

な Lie algebra である。

これらが今までに知られた obstruction theorems と知られた反例のいくつかである。

2 Main theorem

M を compact type の irreducible hermitian symmetric space とすると, M 上の holomorphic line bundles の同型類のなす群 $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ は $\mathbb{Z}$ と同型であることが知られている。 L を first chern class $c_1(L)$ が正となる holomorphic line bundle で群 $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ の generator となるものとする。このとき M の first chern class $c_1(M)$ は

$$c_1(M) = K c_1(L), \quad (K \text{ は } 2 \leq K \leq \dim_{\mathbb{C}} M + 1 \text{ なる整数})$$

をみたす。 $X = M_1 \times M_2$, M_1, M_2 は compact type の irreducible hermitian symmetric space, K_1, K_2 を M_1, M_2 に対する chern class から定まる正の整数とする。

正の整数 a, b で $0 < a < K_1$, $0 < b < K_2$ となるものに対し

て, X 上の holomorphic line bundle $L_1^{-a} \otimes L_2^b$

(L_1, L_2 は M_1, M_2 上の line bundle の generator から成りおこされた X 上の line bundle とする) を考え, $P_{a,b}$

$$= P(1 \oplus L_1^{-a} \oplus L_2^b) \text{ とおく, } P^1(\mathbb{C})\text{-bundle } P_{a,b} \text{ の}$$

first chern class $c_1(P_{a,b})$ は正で, Lie algebra $\mathcal{G}(P_{a,b}, J)$

は, $\text{Aut}_0(X) \times \mathbb{C}^*$ の Lie algebra と同型になる.

Main theorem [8] $m = \dim_{\mathbb{C}} M_1$, $n = \dim_{\mathbb{C}} M_2$ とおく. 上に定義した $X = M_1 \times M_2$ 上の $P^1(\mathbb{C})$ -bundle $P_{a,b}$ が Einstein Kähler metric を許容するため必要十分条件は,

$$\int_{-1}^1 (k_1 - ax)^m (k_2 + bx)^n x dx = 0$$

である.

Corollary 1. $M = M_1 = M_2$, $a = b$ のとき, $P_{a,a}$ 上には Einstein Kähler metric が存在する.

Corollary 2. $M_1 = P^1(\mathbb{C})$, $M_2 \neq P^1(\mathbb{C})$ のとき, $P_{1,b}$ 上には Einstein Kähler metric は存在しない.

(Corollary 2 の証明は, $\int_{-1}^1 (2-x)(k_2+bx)^n x dx \neq 0$ であることと各 compact type の hermitian symmetric space にわけて計算するが, $b \geq 2$ のときこの積分が正となることは容易にわかる.)

さらに, $M_1 \neq M_2$ なる場合で Einstein Kähler metric の存在するものの例としては次のようなものがある.

$M_1 = G_{6,2}^{\mathbb{P}}(\mathbb{C})$ ($\mathbb{C}^6$ の中の 2-planes のなす complex grassmann manifold), $M_2 = P^3(\mathbb{C})$ とすると, $k_1 = 6$, $k_2 = 9$ となり, $P_{2,3}$ を考えると, 積分は $\int_{-1}^1 (6-2x)^6 (9+3x)^3 x dx = 0$ となり, $G_{6,2}(\mathbb{C}) \times P^3(\mathbb{C})$ 上の $P^1(\mathbb{C})$ -bundle $P_{2,3} = P(L_1^2 \oplus L_2^3)$ は,

Einstein Kähler metric を許容する。

次に Main theorem の証明の方針を述べる。

X を Kähler $\mathbb{C}$ -space とすると, X は G/U , ここに G は simply connected complex semi-simple Lie group, U は G の parabolic subgroup と表わされる。 $\rho: U \rightarrow \mathbb{C}^*$ を U の holomorphic representation とし, ξ_ρ で ρ に associate した X 上の homogeneous line bundle を表す。 X 上の各 holomorphic line bundle は homogeneous line bundle であることが知られている。 X 上の homogeneous holomorphic line bundle ξ_ρ に対して, X 上の $P(\mathbb{C})$ -bundle $P(1 \oplus \xi_\rho)$ を考える。 群 G は自然に $P(1 \oplus \xi_\rho)$ に作用することに注意する。 この G の作用に関して次がなりたつ。

Proposition 2. $P = P(1 \oplus \xi_\rho)$ は 3 つの G -orbit からなる。 1 つの orbit は P の open dense subset であり, ξ_ρ に associate した X 上の principal $\mathbb{C}^*$ -bundle であり, 他の 2 つの orbit は X と同型である。 ただし, ρ は non-trivial であるとする。

e を G の単位元とし, $(e, (1, 1)) \in G \times \mathbb{C}^2$ に対応する $P(1 \oplus \xi_\rho)$ の点を θ で表すとき, θ における G の isotropy subgroup $\widehat{U}$ は $\widehat{U} = \{g \in U \mid \rho(g) = 1\}$ で与えられる。 従って, ρ が non-trivial のとき, $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{U} = \dim_{\mathbb{C}} U - 1$ である。

G_u を G の maximal compact subgroup とし, $V = U \cap G_u$ とおくとき, G/U と G_u/V とは diffeomorphic となり,

$\widehat{V} = \{g \in V \mid p(g) = 1\}$ とおくと, p が non-trivial のとき, $\dim_{\mathbb{R}} \widehat{V} = \dim_{\mathbb{R}} V - 1$ となる.

Proposition 3. $p: U \rightarrow \mathbb{C}^*$ を non-trivial とするとき, principal $\mathbb{C}^*$ -bundle $G \times_p \mathbb{C}^*$ は, $G_u \times S^1$ -equivariant に $G_u/\widehat{V} \times \mathbb{R}_+$ と diffeomorphic である, ことに, $G_u \times S^1$ は $\mathbb{R}_+$ に trivial に作用する.

さて $P = P(1 \oplus \mathfrak{p})$ 上に Einstein Kähler metric が存在すれば, それは $G_u \times S^1$ -invariant metric であることに注意して, P の open orbit $G \times_p \mathbb{C}^*$ 上の $G_u \times S^1$ -invariant Kähler metric の形を考える. $\mathfrak{g}_u, \mathfrak{v}, \widehat{\mathfrak{v}}$ を $\mathfrak{g}_u, V, \widehat{V}$ の Lie algebra とし, $\langle, \rangle$ を $\mathfrak{g}_u$ の Killing form から定義される $\mathfrak{g}_u$ 上の $\text{Ad}(G_u)$ -invariant inner product とする.

$\mathcal{M}$ を $\langle, \rangle$ に関する $\mathfrak{v}$ の orthogonal complement とし, $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}$ を $\widehat{\mathfrak{v}}$ の $\mathfrak{v}$ における $\langle, \rangle$ に関する orthogonal complement とし, $\mathfrak{p} = \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}} + \mathcal{M}$ とおくと,

$$\mathfrak{g}_u = \widehat{\mathfrak{v}} \oplus \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{v} = \widehat{\mathfrak{v}} \oplus \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}, \quad [\mathfrak{v}, \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}] = (0)$$

$[\mathfrak{v}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M}$ となる. また $G \times \mathbb{C}^*$ の Lie subgroup $G_u \times \mathbb{R}_+$ は $G \times_p \mathbb{C}^* \cong G_u/\widehat{V} \times \mathbb{R}_+$ に transitively 作用する.

$\mathbb{R}_+$ の Lie algebra の a basis を $\{H\}$ とし, $v \in G \times_p \mathbb{C}^*$ にお

113 tangent space $T_0(P)$ と $\mathfrak{g} \oplus R\hat{H}$ とを同一視する.

$\mathcal{G}_n \oplus R\hat{H} = \hat{v} \oplus \mathfrak{g} \oplus R\hat{H}$, $Ad(\hat{V})(\mathfrak{g} \oplus R\hat{H}) \subset \mathfrak{g} \oplus R\hat{H}$ となることに注意する. $G \times_P \mathbb{C}^*$ (あるいは P) 上の complex structure J は $G \times \mathbb{C}^*$ の action が invariant であるから linear isomorphism $I: \mathfrak{g} \oplus R\hat{H} \rightarrow \mathfrak{g} \oplus R\hat{H}$ であり, $I^2 = -id$, $I \circ Ad(g) = Ad(g) \circ I$ ($g \in \hat{V}$) なるものをひきおこす. さらに, I は, $IL_{\mathfrak{g}} = R\hat{H}$ をみたし, $X = G/U = G_n/V$ 上の invariant complex structure とも compatible であるから $I\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ をみたす.

X が compact type の irreducible hermitian symmetric space M_1, M_2 の積 $M_1 \times M_2$ のときには, $\mathcal{G}_n = (\mathcal{G}_1)_n \oplus (\mathcal{G}_2)_n$, $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ は simple Lie algebra, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_i \subset (\mathcal{G}_i)_n$ ($i=1, 2$) となり, さらに $[\hat{v}, \mathfrak{m}_i] = \mathfrak{m}_i$ ($i=1, 2$),

$I\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_i$ ($i=1, 2$), $\mathfrak{m}_i$ ($i=1, 2$) は $\hat{v}$ -module であり irreducible である. これより, $\mathfrak{g} \oplus R\hat{H}$ 上の $Ad(\hat{V})$ -invariant hermitian inner product B は - 形式的に

$$B = d(\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}} + \langle I \cdot, I \cdot \rangle|_{R\hat{H}}) + c_1 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{m}_1} + c_2 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{m}_2}$$
 と表わされる. ここに d, c_1, c_2 は正の実数, $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{m}_1}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{m}_2}$ は, inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ から, $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ 上にそれぞれひきおこされた inner product, $\langle I \cdot, I \cdot \rangle|_{R\hat{H}}$ は $\langle IX, IY \rangle$ ($X, Y \in R\hat{H}$) により定義される $R\hat{H}$ 上の内積を

表す。 $\beta_0, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2$ をそれぞれ, $G/\hat{V} \times \mathbb{R}_+$ 上の $G \times \mathbb{R}_+$ -invariant symmetric tensor τ , $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{g}}$, $\langle I \cdot, I \cdot \rangle|_{\mathbb{R}\hat{H}}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{m_1}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{m_2}$ ($\text{Ad}(\hat{V})$ -invariant symmetric bilinear form on $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}\hat{H}$ とみて) に対対応するものとする。さらに $\beta_0, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2$ は right S^1 -action τ invariant である。このことから、次の Proposition が証明できる。

Proposition 3. $G \times_P \mathbb{C}^*$ 上の $G \times S^1$ -invariant hermitian metric g は

$$(2.1) \quad g = F^2(\beta_0 + \beta_1) + H_1^2 \alpha_1 + H_2^2 \alpha_2$$

と表される。ここに F, H_1, H_2 は $G \times S^1$ -invariant positive valued C^∞ function on $G \times_P \mathbb{C}^*$ である。

$X \in \mathfrak{g}$ に対して, $\{\exp tX \mid t \in \mathbb{R}\} \approx S^1$ の right action によって引き起こされる $G/\hat{V} \times \mathbb{R}_+$ 上の vector field を X^* で表し,
$$H = - \frac{JX^*}{g(X^*, X^*)^{1/2}} \quad \text{とおく。}$$
 $G \times_P \mathbb{C}^*$ 上の

$G \times S^1$ -invariant hermitian metric g が (2.1) の形のものが Kähler metric になる条件を考える。

Proposition 4. (2.1) の形の metric g が Kähler であるための必要十分条件は $\forall A, B \in m, 0 \neq X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$- \frac{F}{\langle X, X \rangle^{1/2}} \langle X, [A, IB] \rangle + d(H_1^2)(H) \langle A, B \rangle|_{m_1} + d(H_2^2)(H) \langle A, B \rangle|_{m_2} = 0$$

がなりたつことである。

さらに $G_n \times S^1$ -invariant hermitian metric g on $G \times_P \mathbb{C}^*$ が Kähler であるとき, g の Riemannian connection ∇ について, vector field H は $\nabla_H H = 0$ をみたすことがわかる. Compact Lie group $G_n \times S^1$ が $P = P(1 \oplus \rho)$ 上に holomorphic transformation group として作用するから P 上には $G_n \times S^1$ -invariant Kähler metric g_0 が存在する. $\bar{\sigma} \in G_n/\sqrt[n]{n}$ の原点とすると, 点 $C(t_0) = (\bar{\sigma}, 1) \in G_n/\sqrt[n]{n} \times \mathbb{R}_+$ を通る arc length を parametrized した (P, g_0) の geodesic $C(t)$ として $\dot{C}(t_0) = H_{C(t_0)}$ をみたすものを考える. $\nabla_H H = 0$ より, $C(t)$ は $(\bar{\sigma}, 1)$ を通る H の integral curve であり, L_0 を $P = P(1 \oplus \rho)$ の $G_n \times S^1$ の 2 つの singular orbit の $C(t)$ の長さとするとき, 次のことが成り立つ.

Theorem 4.

(1) g_0 を $P = P(1 \oplus \rho)$ 上の $G_n \times S^1$ -invariant Kähler metric とすると, g_0 は open orbit $G \times_P \mathbb{C}^*$ 上で,

$$g_0 = dt^2 + f_0^2(t) \tilde{\beta}_0 + h_1^2(t) \alpha_1 + h_2^2(t) \alpha_2$$

と表わされる. ここに $\tilde{\beta}_0$ は ρ の weight Λ に対して,

$\Lambda(x_0) = \sqrt{n}$ で定まる $[P]$ の元 x_0 を用いて, $\tilde{\beta}_0 = \frac{1}{\langle x_0, x_0 \rangle} \beta_0$ により定義される tensor (すなわち, $P'(C)$ の S^1 -action から right S^1 -action $\{ \exp t x_0 \mid t \in \mathbb{R} \}$ に対処するように (たまたま), f_0, h_1, h_2 は $[0, L_0]$ で定義された C^∞ function である).

次の条件をみたすもの:

$$(2.2) \begin{cases} f_0, h_j^0 \text{ は } (0, L_0) \text{ 上で正の値をとり,} \\ f_0 \text{ は } 0, L_0 \text{ で奇関数で, } f_0'(0) = -f_0'(L_0) = 1 \text{ を} \\ \text{みたし, } h_j^0 \text{ は } 0, L_0 \text{ で偶関数で, } h_j^0(0) > 0 \\ h_j^0(L_0) > 0 \text{ となる.} \end{cases}$$

(2) 逆に $f(s), h_j(s) (j=1,2)$ が $[0, L]$ で定義された C^∞ function で, 条件 (2.2) の性質をみたすものとする
と, metric $g = ds^2 + f(s)^2 \hat{\beta}_0 + h_1(s)^2 \alpha_1 + h_2(s)^2 \alpha_2$
は open orbit $G \times_P \mathbb{C}^*$ 上で定義され, g は $P(1 \oplus \mathfrak{g}_p)$
上の C^∞ metric に拡張される.

(2) において, g が $G \times_P \mathbb{C}^*$ 上で Kähler であらば, 拡張された metric も $P(1 \oplus \mathfrak{g}_p)$ で Kähler となることに注意する.

次に open orbit $G \times_P \mathbb{C}^* = G_u / \sqrt{v} \times (0, L)$ 上の metric $g = ds^2 + f(s)^2 \hat{\beta}_0 + h_1(s)^2 \alpha_1 + h_2(s)^2 \alpha_2$ の Ricci tensor を計算するために, Bérard Bergery [3] に従って Riemannian submersion になっていることを利用する.
metric g の開きから $G_u / \sqrt{v} \times (0, L) \rightarrow (0, L)$ は Riemannian submersion となり, O'Neill の formula を用いることにより, R を g の Ricci tensor, $\hat{R}$ を g_t の Ricci tensor と

するとき, 次の proposition をえる.

Proposition 5. $X_0 \in \Gamma_f$ を以前のように, $\Lambda(X_0) = \sqrt{f}$ で定義されるものとし, $M = M_1 \oplus M_2$ の orthonormal basis $\{B_1, \dots, B_{2m}, C_1, \dots, C_{2n}\}$ ($B_i \in M_1, C_i \in M_2$, $m = \dim_{\mathbb{C}} M_1, n = \dim_{\mathbb{C}} M_2$) をとる. $\{H, \frac{1}{f}X_0, \frac{1}{h_1}B_1, \dots, \frac{1}{h_1}B_{2m}, \frac{1}{h_2}C_1, \dots, \frac{1}{h_2}C_{2n}\}$ は g の orthonormal basis であるが, これに対して次がなりたつ.

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}(H, H) &= -\left(\frac{f''}{f} + 2m \frac{h_1''}{h_1} + 2n \frac{h_2''}{h_2}\right) \\ \mathcal{L}\left(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{f}X_0\right) &= \hat{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{f}X_0\right) - \frac{f'}{f} \left(2m \frac{h_1'}{h_1} + 2n \frac{h_2'}{h_2}\right) - \frac{f''}{f} \\ \mathcal{L}\left(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_1}B_i\right) &= \hat{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_1}B_i\right) - \frac{f'h_1'}{fh_1} - \frac{h_1''}{h_1} - (2m-1)\left(\frac{h_1'}{h_1}\right)^2 - 2m \frac{h_1'h_2'}{h_1h_2} \\ \mathcal{L}\left(\frac{1}{h_2}C_i, \frac{1}{h_2}C_i\right) &= \hat{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{h_2}C_i, \frac{1}{h_2}C_i\right) - \frac{f'h_2'}{fh_2} - \frac{h_2''}{h_2} - (2n-1)\left(\frac{h_2'}{h_2}\right)^2 - 2n \frac{h_1'h_2'}{h_1h_2} \\ \mathcal{L}\left(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{h_1}B_i\right) &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{h_2}B_i\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_1}B_j\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{h_2}C_i, \frac{1}{h_2}C_j\right) = 0 \\ &\text{for } i \neq j \\ \mathcal{L}\left(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_2}C_j\right) &= 0 \quad (i, j). \end{aligned} \right.$$

さらに, $\gamma_f = L_1^{-a} \otimes L_2^b$ ($0 < a < \kappa_1, 0 < b < \kappa_2$) のとき, metric $g = ds^2 + f(s)^2 \hat{\beta}_0 + h_1(s)^2 \alpha_1 + h_2(s)^2 \alpha_2$ が Kähler であるための必要十分条件は

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{a}{2\kappa_1} f + 2h_1 h_1' &= 0 \\ \frac{-b}{2\kappa_2} f + 2h_2 h_2' &= 0 \end{aligned} \right.$$

で与えられることが, Proposition 4 を用いることによってわかる。また Ricci tensor $\hat{\kappa}$ は次の Proposition のようになる。

Proposition 6. $\mathcal{F}$ の orthonormal basis $\{\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{h_1}B_1, \dots, \frac{1}{h_1}B_m, \frac{1}{h_1}IB_1, \dots, \frac{1}{h_1}IB_m, \frac{1}{h_2}C_1, \dots, \frac{1}{h_2}C_n, \frac{1}{h_2}IC_1, \dots, \frac{1}{h_2}IC_n\}$ に対して,

$$\hat{\kappa}(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{f}X_0) = 2m\left(\frac{a}{2k_1}\right)^2 \frac{f^2}{4h_1^4} + 2n\left(\frac{b}{2k_2}\right)^2 \frac{f^2}{4h_2^4}$$

$$\hat{\kappa}(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_1}B_i) = \hat{\kappa}(\frac{1}{h_1}IB_i, \frac{1}{h_1}IB_i) = \frac{1}{2h_1^2} - \left(\frac{a}{2k_1}\right)^2 \frac{f^2}{2h_1^4}$$

$$\hat{\kappa}(\frac{1}{h_2}C_j, \frac{1}{h_2}C_j) = \hat{\kappa}(\frac{1}{h_2}IC_j, \frac{1}{h_2}IC_j) = \frac{1}{2h_2^2} - \left(\frac{b}{2k_2}\right)^2 \frac{f^2}{2h_2^4}$$

$$(i=1, \dots, m, j=1, \dots, n)$$

となる。

以上により, 次の定理を得る。

Theorem 7. X を 2 つの irreducible hermitian symmetric space of compact type M_1, M_2 の直積 $M_1 \times M_2$ とし, X 上の projective bundle $P(1 \oplus L_1^{-a} \oplus L_2^a)$ を考える。 $G_n \times S^1$ -invariant metric $g = ds^2 + f(s)^2 \tilde{\rho}_0 + h_1(s)^2 \omega_1 + h_2(s)^2 \omega_2$ on the open orbit が Einstein Kähler であるための必要十分条件は, f, h_1, h_2 が次の ordinary differential equation を満たすことである。

$$(2.3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{2k_1} f + 2h_1 h_1' = 0 \\ -\frac{b}{2k_2} f + 2h_2 h_2' = 0 \\ -\left(\frac{f''}{f} + 2m \frac{h_1''}{h_1} + 2n \frac{h_2''}{h_2}\right) = \lambda \\ -\frac{f''}{f} - \frac{f'}{f} \left(2m \frac{h_1'}{h_1} + 2n \frac{h_2'}{h_2}\right) + 2m \left(\frac{a}{2k_1}\right)^2 \frac{f^2}{4h_1^4} + 2n \left(\frac{b}{2k_2}\right)^2 \frac{f^2}{4h_2^4} = \lambda \\ -\frac{h_1''}{h_1} - \frac{f' h_1'}{f h_1} - (2m-1) \left(\frac{h_1'}{h_1}\right)^2 - 2n \frac{h_1' h_2'}{h_1 h_2} + \frac{1}{2h_1^2} - \left(\frac{a}{2k_1}\right)^2 \frac{f^2}{2h_1^4} = \lambda \\ -\frac{h_2''}{h_2} - \frac{f' h_2'}{f h_2} - (2n-1) \left(\frac{h_2'}{h_2}\right)^2 - 2m \frac{h_1' h_2'}{h_1 h_2} + \frac{1}{2h_2^2} - \left(\frac{b}{2k_2}\right)^2 \frac{f^2}{2h_2^4} = \lambda \end{array} \right.$$

ここに λ は正の定数.

Ordinary differential equations (2.3) は次の differential equation と同値であることがわかる.

$$(2.4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{2k_1} f + 2h_1 h_1' = 0, \quad -\frac{b}{2k_2} f + 2h_2 h_2' = 0 \\ h_2' = \sqrt{y(h_2)}, \quad 2\lambda (ak_2 h_2^2 + bk_1 h_1^2) = ak_2 + bk_1 \\ \frac{dy}{dh_2} + 2\left(\frac{n+1}{h_2} - m \frac{ak_2}{bk_1} \frac{h_2}{h_1^2}\right) y = \frac{1}{2h_2} - \lambda h_2 \end{array} \right.$$

この最後の一階の線型常微分方程式の解は

$$y = \frac{1}{2h_2^{2(m+1)} (bk_1 h_1^2)^m} \left\{ \int h_2^{2m+1} (bk_1 h_1^2)^m (1 - 2\lambda h_2^2) dh_2 + C \right\}$$

(ここに, C は定数で, h_1^2 は $ak_2 h_2^2 + bk_1 h_1^2 = \frac{1}{2\lambda} (ak_2 + bk_1)$ を

みたすものとする) によってえられる。

さて $P(1 \oplus L_1^{-n} \oplus L_2^+)$ 上に Einstein-Kähler metric g が存在すると仮定すると, Matsushima の定理により, g は $G_n \times S^1$ -invariant metric と考えてよく, g は Theorem 7 の開りによい。また $h_2'(0) = 0$ より $y(h_2(0)) = 0$ で, $y(h_2)$ は次のように表される:

$$y(h_2) = \frac{1}{2h_2^{2(m+1)}(h(K_1, h_1^2))^m} \int_{h_2(0)}^{h_2} h_2^{2m+1} (h(K_1, h_1^2))^2 (1 - 2\lambda h_2^2) dh_2$$

さらに, $y(h_2(L)) = 0$ より,

$$y(h_2(L)) = \frac{1}{2h_2^{2(m+1)}(L)(h(K_1, h_1^2(L)))^m} \int_{h_2(0)}^{h_2(L)} h_2^{2m+1} (h(K_1, h_1^2))^2 (1 - 2\lambda h_2^2) dh_2$$

$= 0$. また $f'(0) = -f'(L) = 1$ を用いて,

$$h_2(L) = \sqrt{(1 + b/k_2)/2\lambda}, \quad h_2(0) = \sqrt{(1 - b/k_2)/2\lambda}.$$

がわかり, $y(h_2(L)) = 0$ は次の積分が 0 となることと同値であることがわかる。

$$\int_{-1}^1 (K_2 + b\alpha)^m (K_1 - a\alpha)^m \alpha d\alpha = 0.$$

よって

$$\int_{\sqrt{(1-b/k_2)/2\lambda}}^{\sqrt{(1+b/k_2)/2\lambda}} h_2^{2m+1} (h(K_1, h_1^2))^2 (1 - 2\lambda h_2^2) dh_2 = 0$$

とすると, $h^0 = \sqrt{(1 - b/k_2)/2\lambda}$, $h^1 = \sqrt{(1 + b/k_2)/2\lambda}$ と

おく. $[h^0, h^1]$ の近傍上で $y(h_2)$ を

$$y(h_2) = \frac{1}{2h_2^{2(n+1)}(hk_2h_1^2)^m} \int_{h^0}^{h_2} h_2^{2n+1}(hk_2h_1^2)^m(1-2\lambda h_2^2)dh$$

により定義すると, $y(h^0) = y(h^1) = 0$ であり, $h^0 < h_2 < h^1$

に対して, $y(h_2) > 0$ となる. また $\frac{dy}{dh_2}(h^0) > 0$,

$\frac{dy}{dh_2}(h^1) > 0$. (h^0, h^1) 上の関数 $\widehat{t}(h_2)$ を

$$\widehat{t}(h_2) = \int_{\sqrt{1/2\lambda}}^{h_2} \frac{1}{\sqrt{y(h_2)}} dh_2 \text{ により定義する.}$$

$$\widehat{t}_0 = \lim_{h_2 \rightarrow h^0+} \widehat{t}(h_2), \quad \widehat{t}_1 = \lim_{h_2 \rightarrow h^1-} \widehat{t}(h_2) \text{ は存在する.}$$

$[h^0, h^1]$ 上の関数 $t(h_2)$ を

$$t(h_2) = \widehat{t}(h_2) - \widehat{t}_0, \quad t(h^0) = 0, \quad t(h^1) = \widehat{t}_1 - \widehat{t}_0 = L$$

により定義すると, $t(h_2) : [h^0, h^1] \rightarrow [0, L]$ monotone increasing continuous function であり, (h^0, h^1) 上で C^∞ となる. $h_2(t)$ を $t(h_2)$ の逆関数とすると,

$(0, L)$ 上で $\frac{dh_2}{dt} = \sqrt{y(h_2)}$ となる. $h_2(t)$ は $[0, L]$ 上の正の値をとる C^∞ function であり, $0, L$ で偶関数となるものに拡張できることがわかる. $f \in f = \frac{4k_2}{h} h_2 h_2'$ により定義し, $h_1 > 0$ を $2\lambda(ak_2h_2^2 + hk_1h_1^2) = ak_2 + h(k_1$ とおいたように定義すると, f, h_1, h_2 は (2.4) をみたし, 条件 (2.2) もみたす. 従って, Einstein Kähler metric が

存在する。

3. Futaki invariant と Main theorem の積分の条件との関係, その後の発展

Futaki invariant と Main theorem の積分の条件との関係は, Koiso-Sakane [6] で調べられ, Main theorem は次のように拡張される。

Theorem I. X を compact Einstein Kähler manifold で, g_0 を X 上の Kähler metric でその Ricci tensor R_0 が $R_0 = g_0$ をみたすものとする。 ξ を X 上の holomorphic line bundle で, ξ の fiber metric に関する metric connection の curvature tensor B の g_0 に関する固有値が, X 上で constant でかつ, これらの固有値の絶対値が 1 より小さいような fiber metric が存在するものとする。このとき, X 上の $P^1(\mathbb{C})$ -bundle $P = P(1 \oplus \xi)$ に Einstein Kähler metric が存在するための必要十分条件は, Futaki invariant

$f = \mathcal{O}(P, J) \rightarrow \mathbb{C}$ が 0 となることである。さらに, Futaki invariant が 0 となることは,

$$\int_{-1}^1 x \det(1 - x g_0^{-1} B) dx = 0$$

と同値である。

Theorem I の適用できる例をあげよう。

例 5. M を compact Einstein Kähler manifold として、 M 上の line bundle L として、 $C_1(L) = a C_1(M)$ ($0 < a < 1$) となるものが存在すると仮定する。 $X = M \times M$ とおき、 $\xi = L \oplus L^{-1}$ を $L \rightarrow M$, $L^{-1} \rightarrow M$ からひきおこされた X 上の holomorphic line bundle とする。このとき、 M 上の Kähler metric g と ξ の Ricci tensor R が $R = g$ をみたすものをとると、 X 上の product metric $g_0 = g \oplus g$ に関して、Theorem I の仮定がみたされ、 $P(1 \oplus \xi)$ 上に Einstein Kähler metric が存在すること、被積分関数 $\alpha \det(\text{id} - \alpha g_0^{-1} B)$ が奇関数となり、積分が 0 となることよりわかる。

例 6. $M = P^n(\mathbb{C})$ とし、 H を M 上の hyperplane section line bundle とし $L = H^m$ とおくと、 $X = M \times M$ 上の $P^1(\mathbb{C})$ -bundle $P(L \oplus L)$ は Einstein Kähler metric を許容し、isometry group の action に関して cohomogeneity は 1 である。 $P = P(L \oplus L)$ の first Chern class $C_1(P)$ は

$$C_1(P) = (n+1-m) \pi^*(C_1(H) \oplus C_1(H)) + 2 C_1(\zeta)$$

(ここに $\pi: P \rightarrow X$ は projection, ζ は P の各 fiber $P^1(\mathbb{C})$ 上

の hyperplane line bundle から引きおこされる P 上の line bundle とする) で与えられる。従って $n+1-m$ が偶数ならば, P 上の holomorphic line bundle η で, $C_1(\eta) = \frac{1}{2} C_1(P)$ なるものが存在する。 P の k 個の copy を考え, $Y = P \times \cdots \times P$ (k 個), $\xi_0 = \xi \otimes \cdots \otimes \xi$ (k 個) とかき, k が奇数のとき $X = Y \times P^{\frac{(n+1)k}{2}}_{(\mathbb{C})}$, $\xi = \xi_0^{-1} \otimes H^{\frac{(n+1)k+1}{2}}$ と (k が偶数のとき $X = Y \times Q^{\frac{(n+1)k}{2}}_{(\mathbb{C})}$ ($Q^l_{(\mathbb{C})}$ の l 次元の complex hyperquadric), $\xi = \xi_0^{-1} \otimes L_0^{\frac{(n+1)k}{2}}$ (ここに, L_0 は $Q^{\frac{(n+1)k}{2}}_{(\mathbb{C})}$ の holomorphic line bundle の群の generator で $C_1(L_0)$ が正となるもの, $C_1(Q^l_{(\mathbb{C})}) = l C_1(L_0)$ となることに注意) とかくと, Theorem I の条件と X, ξ はみたし, 被積分関数は $\alpha \det(\text{id} - \alpha g_0^{-1} P) = \alpha (1 - \frac{1}{2} \alpha)^{2(n+1)k} (1 + \frac{1}{2} \alpha)^{2(n+1)k}$ で与えられ, これは奇関数であるから, 積分は 0 となり, $P(1 \otimes \xi)$ は Einstein Kähler metric を許容し, Cohomogeneity は, $k+1$ となる。すなわち, 与えられた cohomogeneity をもつ '既約' な Einstein Kähler manifold が存在する。

例 7. 最後に $P^1_{(\mathbb{C})}$ -bundle の base space X が, 既約で, Einstein Kähler metric が $P^1_{(\mathbb{C})}$ -bundle P に

存在するものの例をおいておく. $X = SL(3, \mathbb{C})/B$,
 ここに B は Borel subgroup とする. $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ を holomorphic
 line bundle の isomorphism class のなす群とすると,

$H^1(X, \mathcal{O}^*) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ となる. H_1, H_2 を holomorphic
 line bundle over X の generator とするもので,

$C_1(H_1) > 0, C_1(H_2) > 0, C_1(X) = 2(C_1(H_1) + C_1(H_2))$
 とするものとする. $\xi = H_1^{-1} \otimes H_2$ とおくと, X, ξ は
 Theorem I の条件を満たし, この場合の B の ρ_0 に関し
 固有値は $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$ となる. 従って 積分は 0 となり,
 $P(1 \otimes \xi)$ (X 上の $P(1, \mathbb{C})$ -bundle) は Einstein Kähler
 metric を許容する.

References

- [1] T. Aubin: Equation du type Monge-Ampère
 sur les variétés kähleriennes compactes, Bull. Sc. Math.
 102 (1978) 63-95.
- [2] S. Bando - T. Mabuchi: to appear.
- [3] L. Bérard Bergery: Sur de nouvelles variétés
 riemanniennes d'Einstein, Preprint 1981.
- [4] A. Futaki: An obstruction to the existence of
 Einstein Kähler metrics, Invent. Math. 73 (1983), 437-443.

- [5] K. Ishikawa and Y. Sakane : On complex projective bundles over a Kähler C -space, Osaka J. Math. 16 (1979) 121-132.
- [6] N. Koiso and Y. Sakane : Non-homogeneous Kähler-Einstein metrics on compact complex manifolds, to appear.
- [7] Y. Matsushima : Sur la structure du groupe d'homeomorphismes analytique d'une certaine variété kählérienne, Nagoya Math. J., 11 (1957) 145-150.
- [8] Y. Sakane : Examples of compact Einstein Kähler manifolds with positive Ricci tensor, to appear.
- [9] S. T. Yau : On the curvature of compact Hermitian manifolds, Invent. Math. 25 (1974), 213-239.
- [10] S. T. Yau : On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339-411.