

Link cohomology と affine Grassmannian について

Kenji Aragane
Osaka City University

Abstract

Link の量子不変量の構成には、量子群の表現を用いるものと、KZ 方程式に由来するモノドロミー表現を用いた 2 種類が存在している。これらの不変量の構成で用いられる Lie 環の表現空間を、Affine Grassmannian の同変 perverse sheaves で置き換えることで、より細密な情報を取り出し、強い不変量を構成することを目指す。

1 Introduction

量子群を用いた、Link の不変量について説明をする。複素平面上の n 点の配置空間を $Conf(\mathbb{C})_n := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j, \text{ for } i \neq j\}$ として定義する。

半単純 Lie 代数として $\mathfrak{g}$ を一つ固定しておき、 V を $U(\mathfrak{g})$ -module とすると、 $Conf(\mathbb{C})_n$ 上には $V^{\otimes n}$ をファイバーとした vector bundle が存在する。この vector bundle には KZ connection と呼ばれる flat connection の構造が定まり、それによって、 $\pi_1(Conf(\mathbb{C})_n)$ の $V^{\otimes n}$ 上への作用が定まる。配置空間の基本群は、pure braid 群と呼ばれる群と同型であった。 $\pi_1(Conf(\mathbb{C})_n) \simeq P_n$ 。Link Theory で使われる量子不変量は、 $Conf(\mathbb{C})_n$ に対して、 n 次の対称群 S_n の作用で割った空間 $Conf(\mathbb{C})_n/S_n$ で、上と同様の方法によって $\pi_1(Conf(\mathbb{C})_n/S_n) \simeq B_n$ Braid 群の表現が定まる。この Braid 群の表現によって量子不変量が定まっていた。KZ 方程式による Braid 群の表現には、 $U(\mathfrak{g})$ -module を使用したが、量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ -module と、その表現に由来する R -行列を用いることによって、同値な表現が得られることが知られている。

このような量子不変量の例として、 $\mathfrak{sl}_2$ と、その vector 表現に付随する Jones 多項式、 $\mathfrak{sl}_n$ と、その vector 表現に付随する HOMFLY 多項式などが知られている。

こういった Link の不変量が構成された一方で、Khovanov によって、Link L に対して、 $H^{*,*}(L)$ という bigraded な module の Link 不変量で、weight 付きの Euler 数が Jones 多項式と一致するような物が構成された。

$$Jones(L) = \sum (-1)^i q^j \dim H^{i,j}(L)$$

Khovanov と Rozansky は更に、この bigraded module 型の不変量で、HOMFLY 多項式を weight 付きの Euler 数として持つような物を構成した。この不変量は、ある種の functoriality を持っており、Jones 不変量よりも強力な不変量であることが知られているが、それまでの量子群や Lie 環の表現論を用いることなく構成されており、それまでの多項式不変量との繋がりは不明瞭であった。その為、自然な疑問として KZ 方程式や量子群の表現論を用いて Khovanov homology と呼ばれるこれらの不変量を、再構成することが出来るかどうかということが問題となる。この報告では、この問題に対する部分的な解答を与えることにする。

2 Affine Grassmannian と Geometric Satake 対応

G を connected reductive group とし、 $\check{G}$ をその Langlands dual group とする。Langlands dual group とは、 $\check{G}$ の root データは G の coroot データと一致し、 $\check{G}$ の coroot データは G の root データと一致するようなものである。

$\mathcal{K} = \mathbb{C}((z))$, $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]]$ としたときに、 $\check{G}$ の affine Grassmannian を $\mathcal{G}_{\check{G}} = \check{G}(\mathcal{K})/\check{G}(\mathcal{O})$ として定義する。

Λ を G の coweight lattice とすると、 $\check{G}(\mathcal{K})/\check{G}(\mathcal{O})$ の部分集合と見做することができる。 $\check{G}(\mathcal{O})$ が $\mathcal{G}_{\check{G}}$ に作用していて、その orbit は dominant coweight によってパラメトライズされていて

$$\mathcal{G}_{\check{G}} = \sqcup_{\lambda \in \Lambda^+} \mathcal{G}_{\check{G}}^\lambda$$

が成り立つ。この時、 $\mathcal{G}_{\check{G}}^\lambda$ は、 $\lambda \in \Lambda^+$ の $\check{G}(\mathcal{O})$ -orbit である。

更に、 $\mathcal{G}_{\check{G}}^\lambda$ は有限次元であり、その次元は ρ を positive root の half sum とすると、 $\langle \lambda, 2\rho \rangle$ となっている。

$\overline{\mathcal{G}_{\check{G}}^\lambda}$ を $\mathcal{G}_{\check{G}}^\lambda$ の $\mathcal{G}_{\check{G}}$ での closure とすると、projective variety となっていて $\overline{\mathcal{G}_{\check{G}}^\lambda} = \sqcup_{\mu \leq \lambda} \mathcal{G}_{\check{G}}^\mu$ となっている。

特に λ が minuscule な場合には $\overline{\mathcal{G}_{\check{G}}^\lambda} = \mathcal{G}_{\check{G}}^\lambda$ となり、smooth になっている。より一般的な状況でも成立する性質は多いが、以後、特に断らない限りは、簡単の為に全て minuscule な場合を考える。 IC^λ を $\overline{\mathcal{G}_{\check{G}}^\lambda}$ の intersection cohomology complex とし、 $Perv_{\check{G}(\mathcal{O})}(\mathcal{G}_{\check{G}})$ を $\mathcal{G}_{\check{G}}$ 上の $\check{G}(\mathcal{O})$ 同変 perverse sheaves のなす category とすると、全ての object は IC^λ の直和で書けることが知られている。

$Perv_{\check{G}(\mathcal{O})}(\mathcal{G}_{\check{G}})$ には convolution product と呼ばれる積構造が定まっていて、それによってテンソル圏となっている。Tannakian formalism によると、テンソル圏 $Perv_{\check{G}(\mathcal{O})}(\mathcal{G}_{\check{G}})$ からは Hopf 代数の構造を取り出すことが出来る。この事実を用いると、次の定理が示される。

Theorem 2.1. *Geometric Satake 対応*

テンソル圏としての同型が存在している。 $Perv_{\check{G}(\mathcal{O})}(\mathcal{G}_{\check{G}}) \simeq Rep(G)$

更に $V^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V^{\lambda_n}$ を G の表現 module とすると、 $IC^{\lambda_1} * \cdots * IC^{\lambda_n}$ が対応している。

3 幾何学的な構成: Jones 多項式

Geometric Satake 対応によると、KZ 方程式によって定めていたモノドロミー表現での $Conf(\mathbb{C})_n$ 上の vector bundle の fiber space $V^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V^{\lambda_n}$ を $IC^{\lambda_1} * \cdots * IC^{\lambda_n}$ という intersection cohomology complex で置き換えることが示唆される。 $IC^{\lambda_1} * \cdots * IC^{\lambda_n}$ は $\mathcal{G}_{\check{G}}^{\lambda_1} * \cdots * \mathcal{G}_{\check{G}}^{\lambda_n}$ という variety の intersection cohomology complex であった。これによって、KZ 方程式のモデルでは、Lie 環の表現空間を cohomology として持つような多様体が fiber となる fibration が存在していると期待される。

簡単な例として、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ とし、表現空間 V として、vector 表現をとって、それを幾何学的に再構成する方法を提示する。

SL_2 に対する dual Langlands group は PGL_2 であった。

ω を PGL_2 の minuscule coweight とし、 $\mathcal{G}_{PGL_2}^\omega$ を PGL_2 -affine Grassmannian での $PGL_2(\mathcal{O})$ -orbit とする。それらの fusion product $\mathcal{G}_{PGL_2}^\omega * \cdots * \mathcal{G}_{PGL_2}^\omega$ は $V^{\otimes n}$ に対応する variety であった。

L_0 を $\mathcal{G}_{PGL_2}$ 内の $PGL(\mathcal{O})$ -identity coset とするとき、 $(L_1, L_2) \in \mathcal{G}_{PGL_2} \times \mathcal{G}_{PGL_2}$ が $L_1 \rightarrow L_2$

であるとは (L_1, L_2) が (L_0, z^ω) の $PGL_2(\mathcal{K})$ -orbit に属している時であるとする。

この時、

$\mathcal{G}_{PGL_2}^\omega * \cdots * \mathcal{G}_{PGL_2}^\omega = \{(L_1, \dots, L_n) \in \mathcal{G}_{PGL_2}^n | L_0 \rightarrow L_1 \rightarrow \cdots \rightarrow L_n\}$ である。

$Y_n = \mathcal{G}_{PGL_2}^\omega * \cdots * \mathcal{G}_{PGL_2}^\omega$ とおく。位相的には Y_n は $\mathbb{P}^1$ の iterated bundle と同相であり、

$Y_n \simeq (\mathbb{P}^1)^n$ となっている。 $Z_n^i \subset Y_n \times Y_n$, $1 \leq i \leq n$ を

$Z_n^i := \{(L, L') \in Y_n \times Y_n | L_i \neq L'_i\}$

と定めるとする。 Z_n^i は variety であり、 $\mathcal{O}_{Z_n^i}$ を kernel とした Fourier-Mukai 変換

$\sigma_i: D^b(Y_n) \rightarrow D^b(Y_n)$ を考えると、これは derived category $D^b(Y_n)$ の autoequivalence を誘導している。

この圏同値に関して、次のことが成立している。

Theorem 3.1. $D^b(Y_n)$ 上の autoequivalence σ_i は braid relation を満たす。

$\sigma_i \circ \sigma_j \circ \sigma_i \cong \sigma_j \circ \sigma_i \circ \sigma_j$

$H^*(Y_n) \simeq V^{\otimes n}$ であったので、上の定理は KZ 方程式や量子群の表現を用いて得られていた braid 群の表現の category 版であると考えることが出来る。この σ_i を用いて bigraded な Link homology が構成され、その weight 付き Euler 数は Jones 不変量と一致する。特に自明な結び目での上の値は $H^*(\mathbb{P}^1)$ と一致している。

4 幾何学的な構成: 一般の場合

Geometric Satake 対応や上の構成では $\mathcal{K}$ や $\mathcal{O}$ は具体的な体、環としての表示が与えられていた。

幾何学的な量子不変量の構成をより一般に行うためには、この設定を見直す必要がある。

X を $\mathbb{C}$ 上の smooth curve とし、 $x \in X$ を一つとる。この時、 $\mathcal{O}_x$ を考えると、この環は $\mathbb{C}[z]$ という一変数環と non-canonical ではあるが、同一視することが出来る。

このように、 $\mathcal{O}_x$ と $\mathbb{C}[z]$ との間の同型を定めることを $x \in X$ のまわりで coordinate を定めるとする。

x の十分小さな近傍を考えるということは、 $\mathcal{O}_x$ の完備化を考えることと見なすことができ、それは $\mathbb{C}[[z]]$ を考えることと同値である。

$\mathbb{C}((z))$ は $\mathbb{C}[[z]]$ の商体であることから、上で構成していた affine Grassmannian $G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O})$ は $G(\mathcal{K}_x)/G(\hat{\mathcal{O}}_x)$ と同一視することが出来る。

$\hat{\mathcal{O}}_x$ や $\mathcal{K}_x$ は $x \in X$ に由来する環であったので、 $G(\mathcal{K}_x)/G(\hat{\mathcal{O}}_x)$ は X 上にのっていると考えることが出来る。

以上の考察から、affine Grassmannian は smooth curve と密接に関連しているのではないかと推察される。このことをより鮮明に考察する。重要な性質は以下に述べる bundle の自明性である。

Proposition 1. P を X 上の principal $\check{G}$ -bundle とする。この時、 P は $X - x$ で trivialize することが出来る。

さらに $X - x$ は affine curve となっている。

principal bundle P は $x \in X$ の近傍でも自明化することができ、また、上の性質から $X - x$ でも自明化することが出来る。 $X - x$ が affine variety の構造を持つことから、 X 上の bundle の moduli 空間 $Bund_{\check{G}}(X)$ は $\check{G}(A_{X-x}) \setminus \check{G}(\mathcal{K}_x)/\check{G}(\hat{\mathcal{O}}_x)$ と同一視される。この

ような同一視がされると、もともとの affine Grassmannian は $x \in X$ の local coordinate を定めることなく、 $Bund_{\check{G}}(X)$ と $\check{G}(A_{X-x})$ を用いて記述することが考えられる。 $\check{G}(A_{X-x})$ が Bundle の trivialization を表していたことを考えると、 $\{(P, \phi) : P \in Bund_{\check{G}}(X), \phi : P_0|_{X-x} \rightarrow P|_{X-x} \text{ an isomorphism, } P_0 \text{ trivial bundle}\}$ となる。この事実は次のような定理で纏めることが出来る。

Theorem 4.1. X を smooth curve とし、 $x \in X$ を任意にとり、
 $G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O}) \simeq \{P, \text{principal } G\text{-bundle, } \phi : \text{trivialization of } P \text{ over } (X-x)\}$
 として表すことが出来る。

このようにして、affine Grassmannian と、curve 上の bundle の moduli 空間が関連付けられる。

次に、このような同一視を用いた affine Grassmannian の考察をしよう。上記の定理では $x \in X$ を一つ取るごとに、 $G(\mathcal{K}_x)/G(\mathcal{O}_x)$ が定まっていて、これらが bundle の moduli を用いて表すことが出来ていた。

これは X 上に affine Grassmannian が fibration していると思えることが出来る。ここでの目標は、 X^n 上に KZ-connection の精密化を実現することであったので、これをより一般化する必要がある。

$x \in X$ とし、 $U \subset X$ を x の開近傍とする。この時、

$$\mathcal{G}_{U,x} := \{(P, \phi) : P \text{ principal } \check{G}\text{-bundle on } U \\ \text{and } \phi : P_0|_{U \setminus x} \rightarrow P|_{U \setminus x} \text{ an isomorphism}\}$$

とすると、 x の coordinate を定めることによって、 $\mathcal{G}_{U,x} \simeq \mathcal{G}_{\check{G}}$

この同型による $\mathcal{G}_{\check{G}}^\lambda$ の preimage を $\mathcal{G}_{U,x}^\lambda$ とする。

$(P, \phi) \in \mathcal{G}_{U,x}^\lambda$ の元のことを Hecke type λ を x で持つと言う。

より一般的に (P_1, P_2) という、 X 上の二つの $\check{G}$ -bundle と、 $X-x$ での isomorphism ϕ が与えられたとする。この時に、 P_1 を $x \in U \subset X$ での trivialization φ を一つとる。すると、二つの trivialization の合成によって、 $(P_2|_U, \phi') \in \mathcal{G}_{U,x}$ が得られる。これらが Hecke type λ を持つ時に、 ϕ は Hecke type λ を持つということにする。これらの準備のもとに、

$$\mathcal{G}_{X^n}^\lambda := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n, P \text{ is a principal } \check{G} \text{ bundle, } \phi : P_0|_{X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}} \rightarrow P|_{X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}} \text{ is an isomorphism, } \phi \text{ has Hecke type } \leq \sum_i \lambda_i\}$$

という space を考えると、これらは明らかに X^n 上の family となっている。

同様に、

$$\tilde{\mathcal{G}}_{X^n}^\lambda := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n, P_i \ 1 \leq i \leq n \text{ are principal } \check{G} \text{ bundles, } \phi_i : P_{i-1}|_{X \setminus x_i} \rightarrow P_i|_{X \setminus x_i} \text{ is an isomorphism, } \phi_i \text{ has Hecke type } \lambda_i\}$$

という space を考えると、これらも明らかに X^n 上の family となっている。

また isomorphism の合成を考えることによって、 $\tilde{\mathcal{G}}_{X^n}^\lambda \rightarrow \mathcal{G}_{X^n}^\lambda$ が得られる。

この時、 $\{(x_1, \dots, x_n) \in X^n | x_i \neq x_j\}$ を考えると、この上では $\tilde{\mathcal{G}}_{X^n}^\lambda$ と $\mathcal{G}_{X^n}^\lambda$ はどちらも $\mathcal{G}^{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{G}^{\lambda_n}$ という fiber を持っている。

$\mathcal{G}_{X^n}^\lambda$ の持つ自然な対称群の作用で割ったものを $\mathcal{G}_n^\lambda$ とする。これは配置空間上の family となっている。

Proposition 2. fiber空間の cohomology は $H^*(\mathcal{G}_x^\Delta) \simeq V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n}$ となっている、

これによって、配置空間の fibration として、fiber 空間の cohomology が元の群の表現空間となっている物が構成出来た。これに対して、上と同様にすると、braid 群の表現を誘導することが出来る。

References

- [1] A. Beilinson, V. Drinfeld, Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigen-sheaves, preprint.
- [2] S. Cautis, J. Kamnitzer, Knot homology via derived categories of coherent sheaves I, $\mathfrak{sl}(2)$, *Duke Math. J.* 142 no. 3 (2008), 511-588.
- [3] S. Cautis, J. Kamnitzer, Knot homology via derived categories of coherent sheaves II, $\mathfrak{sl}(m)$, *Inventiones Mathematicae.* 174, no. 1 (2008), 165-232.
- [4] M. Khovanov, Categorification of the Jones polynomial, *Duke J. of Math.* (2000), 359-426.
- [5] M. Khovanov, L. Rozansky, Matrix factorizations and link homology, *Fundamenta Mathematicae.* vol.199 (2008), 1-91.
- [6] M. Khovanov, L. Rozansky, Matrix factorizations and link homology 2, *Geometry and Topology.* vol.12 (2008), 1387-1425.
- [7] M. Khovanov, L. Rozansky, Triply-graded link homology and Hochschild homology of Soergel bimodules, *International Journal of Math.* vol.18, no.8 (2007), 869-885.
- [8] I. Mirkovic and K. Vilonen, Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings, *Annals of Math.* vol.166 (2007) 95-143.