

古典複素リー群の *generalized exponents*.

Young 図形と *universal character* と Kostant の *generalized exponents*.

東大・理. 松沢淳一 (Jun-ichi Matsuzawa)

Reductive な複素リー環上の *Symmetric algebra* を、*Adjoint* 群加群とみたとき、その構造は Kostant によって決定されたわけであるが ([Kos]), その際に導入された *generalized exponents* は、 GL の場合は *Kostka-Foulkes* 多項式、一般の場合は '一般化された' *Kostka-Foulkes* 多項式 ([Ka]) と深く関係しており、また *Affine Weyl* 群の或る *Kazhdan-Lusztig* 多項式とも密接に関係している ([H], [Ka]).

一方、古典群の表現論は Young 図形によって語ることできるという特徴的な側面をもっており、一般の型のリー群の表現論とはまた違った世界がそこに展開している。この報告では、古典群の *generalized exponents* を Young 図形によって記述し、Young 図形的な方法によってあらわれる *generalized exponents* の性質を示してみたい。その際、有限次元表現の指標を直接扱うのでは見通しが悪いので、無限変数の対称関数の理論を使って有限次元の表現論を記述するという新法

をとる。そうすることによって、 $GL(n, \mathbb{C})$, $Sp(2n, \mathbb{C})$, $SO(2n, \mathbb{C})$ の *generalized exponents* の Young 図形的な計算法に統一的な見通しを与えることができる。詳細については、[Ma] を参照されたい。

§1 準備, *generalized exponents*, Young 図形。

G を複素連結 *reductive* リー群, $\mathcal{U}$ をそのリー環, S を $\mathcal{U}$ 上の多項式環とする。 G の S への作用を $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$, $(g \in G, f \in S, x \in \mathcal{U})$ で定める。ただし $g^{-1} \cdot x$ は *adjoint* 作用とする。 S の G -部分加群 H を次のように定義する。

$H = \{ f \in S \mid \partial \cdot f = 0, \forall \partial : \mathcal{U} \text{ 上の定数係数微分作用素で } \partial \cdot 1 = 0 \}$ かつ ∂ の作用は G -作用と可換。

H の元は G 調和多項式とよばれる。 S^G を S の G 作用に関する不変式環とすると次の定理が成り立つ。

[定理] (Kostant, [Kos])

写像 $S^G \otimes H \rightarrow S$ ($f \otimes h \rightarrow f \cdot h$) は G 加群としての同型を与える。

従って S の G 加群としての構造は, S^G の構造がわかっているので, H のそれを決めればわかることになる。

さて, ρ を G の有限次元複素既約表現とし, H の ρ 次同次

成分 H^k に対し, $p_H(p, t) := \sum_{k=0}^{\infty} [H^k: p] t^k$ とする. ここで $[H^k: p]$ は p の H^k における重複度とする. このとき, $p_H(p, t)$ は多項式となり, その次数は p の最高ウェイトの単純ルートに関する高さに等しいことがわかってゐる. ([Kos]).

[定義] (Kostant). p を G の有限次元複素表現, $p = \sum_{i=1}^r c_i p_i$ をその既約分解とし $p_H(p, t) = \sum_{i=1}^r c_i p_H(p_i, t)$ とする. $p_H(p, t)$ を係数 1 の単項式の和で書いたとき, すなわち,

$$p_H(p, t) = t^{m_1(p)} + t^{m_2(p)} + \cdots + t^{m_s(p)}$$

としたとき $m_1(p), m_2(p), \dots, m_s(p)$ を, p に関する *generalized exponents* という.

たとえば $p_H(p, t) = 2t^2 + t^3 = t^2 + t^2 + t^3$ のときは, その *generalized exponents* は 2, 2, 3 である.

[注] p が adjoint 表現のとき, その *generalized exponents* は, リー群 G の *exponents* となり, それを $m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_l$ とすると次が成り立つ.

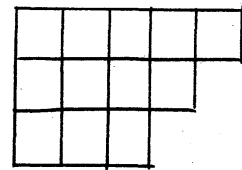
(1) $\prod_{i=1}^l (1 + t^{2m_i+1})$ は G の Bettic 数から決まる Poincaré 多項式となる.

(2) S^G は l 個の代数的に独立な同次多項式 $u_1, \dots, u_l$ により生成される. $S^G = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_l]$. このとき u_i の次数は $m_i + 1$.

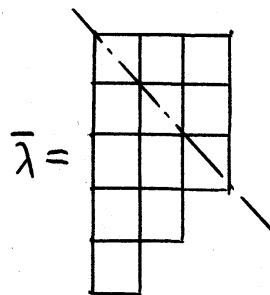
(3) G の Weyl 群 W の Coxeter-Killing 変換の位数 h は、
 $m_2 + 1$ で、その固有値は $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}m_i}{h}}$ である。

(4) W の位数は $\prod_{i=1}^l (m_i + 1)$ 。

自然数 f の分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$, $f = \sum \lambda_i$) に対し正方形を第 i 行に λ_i 個、左端をそろえて並べた図形を Young 図形といい、これも λ であらわす。 r も λ の深さ、 f を λ の大きさといい、それぞれ $l(\lambda)$, $|\lambda|$ と書く。また、Young 図形 λ を対角線に関して折り返して得られる図形を $\bar{\lambda}$ と書き λ の転置という。



$\lambda = (5, 4, 3)$



$\bar{\lambda} =$

§2. $GL(n, \mathbb{C})$ の generalized exponents.

$GL(n, \mathbb{C})$ の既約多項式表現の同値類は深さ n 以下の Young 図形によりパラメトライズされる。Young 図形 λ に対応する表現を $\lambda_{GL(n)}$ と書くことにすると、 $GL(n, \mathbb{C})$ の既約有理表現は $(\det)^e \otimes \lambda_{GL(n)}$ という形に書ける。ここで $e \in \mathbb{Z}$, $(\det)^e$ は $A \rightarrow (A \text{ の行列式})^e$, ($A \in GL(n, \mathbb{C})$) で与えられる $GL(n, \mathbb{C})$ の一次表現。この対応は表現の最高ウェイトの言葉で書くと次のようになる。対角行列 $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$ に対し、

一次形式 ε_i を $\varepsilon_i(H) = \lambda_i$ で定めると、 $\lambda_{GL(n)}$ の最高ウェイトは $\lambda \varepsilon_1 + \dots + \lambda_r \varepsilon_r$ となる。

[定義] (Littlewood-Richardson 係数). μ, ν を Young 図形とする。 $l(\mu) + l(\nu) \leq n$ とき既約分解

$$\mu_{GL(n)} \otimes \nu_{GL(n)} = \sum_{\lambda} LR_{\mu, \nu}^{\lambda} \lambda_{GL(n)}$$

の係数 $LR_{\mu, \nu}^{\lambda}$ を Littlewood-Richardson 係数という。

[三主] (1) 条件 $l(\mu) + l(\nu) \leq n$ をみたすかぎり、 $LR_{\mu, \nu}^{\lambda}$ は n によらない。

(2) GL, Sp, SO の表現論には、この Littlewood-Richardson 係数が常に本質的にかかわってくるのであるか。 $LR_{\mu, \nu}^{\lambda}$ には組合わせ論的な計算法があるため (cf [M]), 具体的な計算が可能となっている。

[universal character]

$\Lambda_n(x)$ を $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ 中の対称式全体のなす部分環とする。準同型 $p_{m,n} : \Lambda_m(x) \rightarrow \Lambda_n(x)$ ($m \geq n$) を $p_{m,n}(x_i) = x_i$ ($i \leq n$), $p_{m,n}(x_j) = 0$ ($j \geq n+1$), で定め、 $\Lambda(x) = \varprojlim \Lambda_n(x)$ を、次数付き環としての射影的極限とする。

$i \in \mathbb{Z}$ に対し $\Lambda(x)$ の元、 i 次基本対称関数 $e_i(x)$ を次のように定める。 $e_i = 0$ ($i < 0$) として、

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + x_i t) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i(x) t^i.$$

$p_m: \Lambda \rightarrow \Lambda_m$ を Λ_m への射影とすると、 $p_m(e_i \alpha)$ は $GL(m, \mathbb{C})$ の交代テンソル表現の指標となる。

[定義] (GL の Universal Character ; $[K_0]$).

α, β を Young 図形とし、 $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ としたとき $S_{[\alpha, \beta]_\infty}(x, y) \in \Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$ を次の行列式で定義する。

$$\begin{vmatrix} e_{\beta'_s}(y) & e_{\beta'_s-1}(y) & \cdots & e_{\beta'_s-s}(y) & \cdots & e_{\beta'_s-s-r+1}(y) \\ e_{\beta'_{s-1}+1}(y) & e_{\beta'_{s-1}}(y) & \cdots & e_{\beta'_{s-1}-s+1}(y) & \cdots & e_{\beta'_{s-1}-s-r+2}(y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{\beta'_1+s-1}(y) & e_{\beta'_1+s-2}(y) & \cdots & e_{\beta'_1-1}(y) & \cdots & e_{\beta'_1-r}(y) \\ e_{\alpha'_1-s}(x) & e_{\alpha'_1-s+1}(x) & \cdots & e_{\alpha'_1}(x) & \cdots & e_{\alpha'_1+r-1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{\alpha'_r-s-r+1}(x) & e_{\alpha'_r-s-r+2}(x) & \cdots & e_{\alpha'_r-r+1}(x) & \cdots & e_{\alpha'_r}(x) \end{vmatrix}$$

また、準同型 $\pi_{GL(m)}: \Lambda(x) \otimes \Lambda(y) \rightarrow (GL(m, \mathbb{C}) \text{ の指標環})$ を

$$\pi'(x_i) = \pi'(y_i) = 0 \quad (i > m), \quad \pi'(y_j) = x_j^{-1}, \quad \pi'(x_j) = x_j \quad (j \leq n)$$

$\pi_{GL(m)}(x_i \otimes y_j) = \pi'(x_i) \cdot \pi'(y_j)$ で定義し、これを

specialization homomorphism という。

[例] $m=4$, $\alpha=(3, 1, 1)$, $\beta=(2, 2, 1)$ とする。

$\bar{\alpha}=(3, 1, 1)$, $\bar{\beta}=(3, 2)$ だから。

$$S_{[\alpha, \beta]_\infty}(x, y) = \begin{vmatrix} e_2(y) & e_1(y) & e_0(y) & 0 & 0 \\ e_4(y) & e_3(y) & e_2(y) & e_1(y) & e_0(y) \\ e_1(x) & e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) & e_5(x) \\ 0 & 0 & e_0(x) & e_1(x) & e_2(x) \\ 0 & 0 & 0 & e_0(x) & e_1(x) \end{vmatrix}$$

$e_n(x_1, \dots, x_n) e_i(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}) = e_{n-i}(x_1, \dots, x_n)$ に注意する。

$$\pi_{GL(n)}(S_{[\alpha, \beta]_\infty}(x, y)) = (\det)^2 \cdot \begin{vmatrix} e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) & 0 & 0 \\ e_0(x) & e_1(x) & e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) \\ e_1(x) & e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) & 0 \\ 0 & 0 & e_0(x) & e_1(x) & e_2(x) \\ 0 & 0 & 0 & e_0(x) & e_1(x) \end{vmatrix} \quad \curvearrowright$$

$$= -(\det)^2 \cdot \begin{vmatrix} e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) & 0 & 0 \\ e_1(x) & e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) & 0 \\ e_0(x) & e_1(x) & e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) \\ 0 & 0 & e_0(x) & e_1(x) & e_2(x) \\ 0 & 0 & 0 & e_0(x) & e_1(x) \end{vmatrix}$$

$$= -(\det)^2 \cdot S_{(5,3)}(x).$$

$S_{(5,3)}(x)$ は、4変数の Schur 関数で、Young 図形 $(5,3)$ に対応する $GL(4, \mathbb{C})$ の表現 $(5,3)_{GL(4)}$ の指標である。

[注] (1) $l(\alpha) + l(\beta) \leq n$ のとき $\pi_{GL(n)}(S_{[\alpha, \beta]_\infty}(x, y))$ は既約表現 $(\det)^{-l(\beta)} \otimes \lambda_{GL(n)}$ の指標となる。ここで、 $\bar{\lambda} = (n - \beta_1, n - \beta_2, \dots, n - \beta_r, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ である。

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \alpha \\ \hline \square & \beta \\ \hline \end{array}$$

(2) Specialization $\pi_{GL(m)}(S_{\alpha, \beta, \infty}(x, y))$ は, Young 図形による簡単な求め方がある. ([K₀]).

以下, $l(\alpha) + l(\beta) \leq m$ のとき $\pi_{GL(m)}(S_{\alpha, \beta, \infty}(x, y))$ を指標にもつ $GL(m, \mathbb{C})$ の表現を $[\alpha, \beta]_{GL(m)}$ と書くことにする. S に現われる表現の最高ウェイトは root lattice の元のみだから, $|\alpha| \neq |\beta|$ のとき $p_H([\alpha, \beta]_{GL(m)}, \alpha) = 0$ となるので $|\alpha| = |\beta|$ のときのみを考えればよい.

S の k 次成分 S^k の $GL(m, \mathbb{C})$ の表現としての指標は,

$$\sum_{\substack{\mu: \text{Young 図形} \\ |\mu| = k, l(\mu) \leq m}} S_{\mu}(x_1, \dots, x_m) \cdot S_{\mu}(x_1^{-1}, \dots, x_m^{-1})$$

で与えられる. ここで $S_{\mu}(x_1, \dots, x_m)$ は n 変数の Schur 関数で表現 $[\mu, \phi]_{GL(m)}$ の指標である. (cf [M]). 目標は, この式の Schur 関数の分解を知りたいのであるが, 直接それを求めるのは大変なので, 一度 $\Lambda(\alpha) \otimes \Lambda(\beta)$ の中で, この式に対応する式の分解を調べ, その後で $\pi_{GL(m)}$ を施すという方法をとることにする. 対応する式の分解については, ([K₀]),

$$S_{\mu}(x) S_{\nu}(y) = \sum_{\tau, \xi, \eta} LR_{\tau, \xi}^{\mu} LR_{\tau, \eta}^{\nu} S_{\xi, \eta, \infty}(x, y).$$

が成り立つので, $\nu = \mu$ として, 両辺に $\pi_{GL(m)}$ を施すことにより次を得る.

[定理 2.] $\alpha, \beta \in \mathcal{Y}_n$, $l(\alpha) + l(\beta) \leq n$ なる Young 図形 α, β .
 $\mathcal{P}_{GL(n)}([\alpha, \beta]) = \{(\xi, \eta) \mid \xi, \eta \text{ は Young 図形で, } |\xi| = |\eta| \text{ かつ}$
 $\pi_{GL(n)}(S_{\xi, \eta}(\alpha, \beta)) = \text{sgn}_{GL(n)}([\xi, \eta]) \cdot \pi_{GL(n)}(S_{\xi, \eta}(\alpha, \beta))$,
 $\text{sgn}_{GL(n)}([\xi, \eta]) = \pm 1 \}$,

$$a_k = \sum_{(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_{GL(n)}([\alpha, \beta])} \sum_{\substack{\mu, \tau \\ |\mu|=k, l(\mu) \leq n}} \text{sgn}_{GL(n)}([\xi, \eta]) LR_{\xi, \tau}^{\mu} LR_{\tau, \eta}^{\mu},$$

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

とすると,

$$P_H([\alpha, \beta]_{GL(n)}, t) = \left\{ \prod_{i=1}^n (1-t^i) \right\} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

さて, $\mathcal{P}_{GL(n)}([\alpha, \beta])$ は, 以下のようになら求められる。

$\alpha, \beta \in \mathcal{Y}_n$, $l(\alpha) + l(\beta) \leq n$ とする。

$$\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_r), \quad \bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_s),$$

$$(a_1, a_2, \dots) = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 - 1, \dots, \bar{\alpha}_r - r + 1, -r, -r-1, \dots)$$

$$(b_1, b_2, \dots) = (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2 - 1, \dots, \bar{\beta}_s - s + 1, -s, -s-1, \dots)$$

$$\delta = (0, 1, 2, \dots)$$

と置いて, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と自然数 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k$ に対しても, Young 図形の対 $g_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k}(\alpha, \beta)_n = (\xi, \eta) \in$

$$\bar{\xi} = (n+1-b_{j_k}, n+1-b_{j_{k-1}}, \dots, n+1-b_{j_1}, a_1, a_2, \dots, \hat{a}_{i_1}, \dots, \hat{a}_{i_2}, \dots) + \delta$$

$$\bar{\eta} = (n+1-a_{i_k}, n+1-a_{i_{k-1}}, \dots, n+1-a_{i_1}, b_1, b_2, \dots, \hat{b}_{j_1}, \dots, \hat{b}_{j_2}, \dots) + \delta$$

で定める。(ただし“ $\wedge$ ”はその数字をぬくことを意味することとする)。このとき、

[命題 2.2]

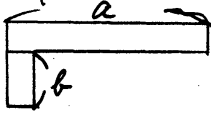
$$P_{GL(m)}([\alpha, \beta]) = \left\{ g_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k}(\alpha, \beta)_m \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k, 1 \leq j_1 < \dots < j_k \right\}.$$

$$\pi_{GL(m)} \left(S_{g_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k}(\alpha, \beta)_m}(x, y) \right) = (-1)^m S_{[\alpha, \beta]_m}(x).$$

$$\text{すなわち } S_{[\alpha, \beta]_m}(x) = \pi_{GL(m)} \left(S_{[\alpha, \beta]_{\infty}}(x, y) \right), \quad m = k + \sum_{p=1}^k (i_p + j_p).$$

(例) $n=3, k=2, i_1=1, i_2=3, j_1=2, j_2=3, \alpha = \square\square, \beta = \square$
 のとき、 $g_{1,3,2,3}([\alpha, \beta])_3 = ((3, 3, 2, 2, 1), (3, 3, 3, 1))$.

以下、(1) α, β が hook の場合、(2) $\alpha = (a)$ の場合、(3) $\beta = (1^b)$ の場合、そして (4) $GL(m, \mathbb{C})/P$ (P は parabolic 部分群) の場合、 γ と generalized exponents との関係について考える。

α, β が hook の場合、すなわち $\alpha = (a, 1^b), \beta = (c, 1^d)$
 $k=|\beta|, l(\alpha) + l(\beta) \leq n$ のとき、(命題 2.2) $\alpha =$ 
 より

[補題 2.3] α, β を上のようにとる。

$$\{(\beta, \eta) \in P_{GL(m)}([\alpha, \beta]) \mid l(\beta), l(\eta) \leq n\} = \{(\alpha, \beta), (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})\}$$

$$\text{ただし } \tilde{\alpha} = (a, 1^{n-d-1}), \tilde{\beta} = (c, 1^{n-b-1}).$$

さて. $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ とす.

$$Z(a, b, c, d; k) = \left\{ \prod_{i=1}^k (1-t^i) \right\} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\mu, \tau \\ \mu+\tau=m, \ell\mu \leq k}} LR_{\tau, \alpha}^{\mu} LR_{\tau, \beta}^{\mu} \right) t^m \right\}$$

とおく. $[\alpha, \beta]_{GL(n)}$ の generalized exponents は, 定理 2.1, 命題 2.2, 補題 2.3 より 次のように計算される.

[命題 2.4] $\alpha = (a, 1^b)$, $\beta = (c, 1^d)$, $|\alpha| = |\beta|$, $\ell\alpha + \ell\beta \leq n$ とする.

$$P_H([\alpha, \beta]_{GL(n)}, t) = Z(a, b, c, d; n) - Z(a, n-d-1, c, n-b-1; n).$$

さらに, $Z(a, b, c, d; k)$ は次のような漸化式を満たす.

$$\begin{aligned} Z(a, b, c, d; k) &= Z(a, b, c, d; k-1) + t Z(a, b-1, c, d-1; k-1) \\ &\quad - t(1-t^{k-1}) Z(a, b-1, c, d-1; k-2) \\ &\quad + t^k Z(a, b-1, c-1, d; k-1) + t^k Z(a-1, b, c, d; k-1) \\ &\quad + t^k Z(a-1, b, c-1, d; k). \end{aligned}$$

初期条件は, $Z(a, 0, a, 0; 1) = t^a$, $Z(0, 0, 0, 0; k) = 1$.

$Z(1, 0, 1, 0; k) = t(1-t^k)/(1-t)$, 次のいずれか ρ が成立する時

$Z(a, b, c, d; k) = 0$, $k \leq b$, $k \leq d$, $a=0$ かつ $b > 0$, $c=0$

かつ $d > 0$, $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d < 0$, $k < 0$.

[例] (1) $\left[\begin{smallmatrix} n \\ a \end{smallmatrix} \right] = \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1}) \cdots (1-t^{n-a+1})}{(1-t^a)(1-t^{a-1}) \cdots (1-t)}$ とするときは,

$$Z(a, 0, a, 0; k) = t^a \left[\begin{smallmatrix} k+a-1 \\ a \end{smallmatrix} \right], \quad Z(1, k-1, 1, k-1; k) = t^k.$$

従って, $P_H([\square, \square]_{GL(n)}, t) = Z(1, 0, 1, 0; n) - Z(1, n-1, 1, n-1; n)$

$$= t \left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right] - t^n = t + t^2 + \cdots + t^{n-1}. \quad \text{すなわち, } GL(n, \mathbb{C}) \text{ の}$$

adjoint表現の generalized exponents である。

$$(2) z(1, 1, 1, 1; k) = t^2 \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z(1, k-2, 1, k-2; k) = t^{k-1} \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} \text{ より}$$

$$p_H([B, B]_{GL(m)}, t) = t^2 \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix} - t^{m-1} \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \text{その他. 簡単に求まるものとしては. } z(a, 0, a-1, 1; k) \\ = t^{a+1} \begin{bmatrix} a-1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k+a-2 \\ a \end{bmatrix}, \quad z(a, 0, r, a-r; k) = t^{a+\frac{(a-r)(a-r+1)}{2}} \begin{bmatrix} a-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} k+r-1 \\ a \end{bmatrix}. \quad z(a, 1, 1, a; k) = t^{1+\frac{a(a+1)}{2}} \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ a+1 \end{bmatrix}, \\ z(a, 1, a, 1; k) = t^{a+1} \left\{ \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k+a-2 \\ a-1 \end{bmatrix} + t^3 \begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k+a-2 \\ a+1 \end{bmatrix} \right\}.$$

[命題 2.5] $\alpha = (a)$, $l(\beta) = n-1$, $|\alpha| = |\beta|$, のとき

$$p_H([\alpha, \beta]_{GL(m)}, t) = t^{\begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}} \cdot p_H([\alpha-n], \beta]_{GL(m)}, t).$$

[命題 2.6] $\beta = (1^n)$, $|\alpha| = |\beta|$, $l(\alpha) + l(\beta) \leq n$ のとき, する
 べし $p_H([\alpha, \beta]_{GL(m)}, t)$ に従って言い換えると, $[\alpha, \beta]_{GL(m)}$ が

$(\det)^{-1} \otimes \lambda_{GL(m)}$, ($|\lambda| = n$) に同値なとき,

$$p_H((\det)^{-1} \otimes \lambda_{GL(m)}, t) = p_{H(\mathbb{G}_m)}(\bar{\lambda}_{\mathbb{G}_m}, t) \\ = \prod_{a \in \bar{\lambda}} \frac{t^{f(a)}}{1 - t^{h(a)}} \cdot \prod_{i=1}^n (1 - t^{i'})$$

ここで $p_{H(\mathbb{G}_m)}(\bar{\lambda}_{\mathbb{G}_m}, t)$ は, 対称群の自然表現に対して, $GL(n, \mathbb{C})$ の場合と同様に定義された, $\bar{\lambda}$ に対応する対称群 $\mathbb{G}_m$ の既約表現の generalized exponents により定まる多項式。第二の等式は, Kirillov ([K]) による公式で, $f(a)$, $h(a)$ は,

λ の cell a を角とする hook の foot length および hook length である。(hook μ の foot length とは $l(\mu)-1$ のこと)。

この命題により次のことがわかる (B-G-G)

[系 2.7] $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, $|\lambda| = n \leq L$. $GL(n, \mathbb{C})$ の Parabolic 部分群 P_λ を.

$$P_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline GL(\lambda_1, \mathbb{C}) & & & \\ \hline & GL(\lambda_2, \mathbb{C}) & * & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & GL(\lambda_r, \mathbb{C}) \\ \hline \end{array}$$

$X_\lambda = GL(n, \mathbb{C}) / P_\lambda$ とする。 e_i を $GL(n, \mathbb{C})$ の i 次交代テンソル表現とし、 $e_{\lambda_1} \otimes e_{\lambda_2} \otimes \dots \otimes e_{\lambda_r} = \bigoplus_{\mu} c_{\mu} \mu_{GL(n)}$ とすると、

X_λ の Betti 数より決まる Poincaré 多項式 $P_{X_\lambda}(t)$ は、

$$P_{X_\lambda}(t) = \sum_{\mu} c_{\mu} \cdot P_H(\det^{-1} \otimes \mu_{GL(n)}, t^2).$$

§ 3. $Sp(2m, \mathbb{C})$ の generalized exponents.

$$Sp(2m, \mathbb{C}) = \{ A \in GL(2m, \mathbb{C}) \mid {}^t A J A = J, J = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \}$$

とする。 $Sp(2m, \mathbb{C})$ の有限次元複素既約表現の同値類は、深さが m 以下の Young 図形と 1 対 1 対応する。それを、 GL の場合と同様に $\lambda_{Sp(2m)}$ と書くことにする。 $Sp(2m, \mathbb{C})$ の adjoint 表現は self dual であって、 $GL(2m, \mathbb{C})$ の 2 次対称テンソル表現 $(2)_{GL(2m)}$ を $Sp(2m, \mathbb{C})$ に制限して得られる。従って $Sp(2m, \mathbb{C})$ のリー環上の 2 次対称テンソル空間は、 $Sp(2m, \mathbb{C})$ 加群として

plethysm $(k)_{GL(2n)} \circ (2)_{GL(2n)}$ を $Sp(2n, \mathbb{C})$ に制限して得られる。

そこで、この plethysm は次のように分解する。([L])

$$(k)_{GL(2n)} \circ (2)_{GL(2n)} = \bigoplus_{\substack{K \\ |K|=k, \ell(K) \leq 2n}} (2(K))_{GL(2n)}$$

そこで $K = (k_1, \dots, k_r)$ としたとき $2K = (2k_1, \dots, 2k_r)$ 。

また、 $\lambda_{GL(2n)}$ の $Sp(2n, \mathbb{C})$ への制限は次のように分解する。
([K-T])

$$\lambda_{GL(2n)} \downarrow_{Sp(2n)} = \sum_{\mu} \left(\sum_K L R_{2K, \mu}^{\lambda} \right) \pi_{Sp(2n)}(\mu_{Sp}).$$

ここで、 μ_{Sp} は universal character ring Λ の元で、 Sp の universal character, $\pi_{Sp(2n)}: \Lambda \rightarrow (Sp(2n, \mathbb{C}) \text{ の指標環})$ は specialization homomorphism である ([K-T])。 $\pi_{Sp(2n)}(\mu_{Sp})$ は 0 または、ある Young 図形 ν があって $\pm \nu_{Sp(2n)}$ になる。
その求め方のアルゴリズムについては [K-T] を参照された。以上記の二式より次が導かれる。

[定理 3.1] $\ell(\lambda) \leq n$ のとき、

$$P_H(\lambda_{Sp(2n)}, t) = \left\{ \prod_{i=1}^n (1-t^{2i}) \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu \in P_{Sp(2n)}(\lambda)} \text{sgn}_{Sp(2n)}(\mu) \left(\sum_{\substack{K, \nu \\ |K|=k, \ell(K) \leq 2n}} L R_{2K, \mu}^{2\nu} \right) \right) t^k \right\}.$$

$$P_{Sp(2n)}(\lambda) = \left\{ \mu \mid \pi_{Sp(2n)}(\mu_{Sp}) = \text{sgn}_{Sp(2n)}(\mu) \lambda_{Sp(2n)}, \text{sgn}_{Sp(2n)}(\mu) = \pm 1 \right\}.$$

$P_{Sp(2n)}(\lambda)$ は次のようにして求められる。

$\ell(\lambda) \leq n$, $\bar{\lambda} = (k_1, k_2, \dots, k_{\lambda_1}, 0, 0, \dots)$, $\delta = (0, 1, 2, 3, \dots)$,

$(a_0, a_1, \dots) = \bar{\lambda} - \delta = (k_1, k_2 - 1, k_3 - 2, \dots)$ とし, 整数
 $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r$ に $\bar{\lambda} \nVdash$ し.

$$g_{i_1, \dots, i_r}^{sp(kn)}(\lambda) = (2(n+1) - a_{i_r}, 2(n+1) - a_{i_{r-1}}, \dots, 2(n+1) - a_{i_1}, a_0, a_1, \dots, \hat{a}_{i_1}, \dots, \hat{a}_{i_r}, \dots) + \delta.$$

とする. "A" は, その数字を λ へ ± 2 を意味する. ± 2 .

$$p_{i_1, \dots, i_r}^{sp(kn)}(\lambda) = \overline{g_{i_1, \dots, i_r}^{sp(kn)}(\lambda)}$$

とすると,

[命題 3.2]

$$P_{sp(kn)}(\lambda) = \{ p_{i_1, \dots, i_r}^{sp(kn)}(\lambda) \mid r \geq 0, 0 \leq i_1 < \dots < i_r \}.$$

$$\pi_{sp(kn)}(p_{i_1, \dots, i_r}^{sp(kn)}(\lambda)) = (-1)^{r + \sum_{j=1}^r i_j} \cdot \lambda_{sp(kn)}.$$

± 2 次に λ が hook の場合を考える. $\lambda = (a, 1^b)$ に $\bar{\lambda} \nVdash$ し.

$$\chi_{a, b, k} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k \\ k \neq i, l \leq k}} \sum_{\lambda} LR_{\frac{2k}{2}, \lambda}^{2k} \right) t^i$$

とすると. 上の命題より.

[命題 3.3] $\lambda = (a, 1^b)$, $l(\lambda) \leq n$ のとき.

$$P_H(\lambda_{sp(kn)}, t) = \left\{ \prod_{i=1}^n (1 - t^{2i}) \right\} (\chi_{a, b, 2n} - \chi_{a, 2n-b, 2n}).$$

$\chi_{a, b, k}$ は次のような漸化式をもつ.

[命題 3.4] (1) k が偶数のとき,

$$(1 - t^k) \chi_{a, b, k} = \chi_{a, b, k-1} + t^k \chi_{a-1, b-1, k-1} + t^2 \chi_{a, b-2, k-2}$$

$$- t^2 \chi_{a, b-2, k-3}.$$

(2) k が奇数のとき, $(a, b) \neq (1, 1)$ ならば

$$\chi_{a, b, k} = \chi_{a, b, k-1} + t^k \chi_{a-2, b, k} + t \chi_{a-1, b-1, k-1} - t \chi_{a-1, b-1, k-2}.$$

$$\chi_{1, 1, k} = \chi_{1, 1, k-1}.$$

初期条件は, $\chi_{0,0,0} = 1$, $\chi_{0,0,k} = \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (1 - t^{2i})^{-1}$ ($k > 0$),

$a < 0$ 又は $b < 0$ 又は $k < 0$ の時 $\chi_{a,b,k} = 0$, $b+1 > k$ のとき

$$\chi_{a,b,k} = 0, \quad \chi_{a,b,0} = 0 \quad (a,b) \neq (0,0), \quad \chi_{0,b,k} = 0 \quad (b > 0).$$

§4. $SO(2m+1, \mathbb{C})$, $SO(2m, \mathbb{C})$ の generalized exponents.

$\lambda_{SO(m)}$ ($m = 2m+1, 2m$, $\ell(\lambda) \leq n$) を Young 図形 λ に対応する $SO(m, \mathbb{C})$ の表現とする. $SO(m, \mathbb{C})$ の coadjoint 表現は, $GL(m, \mathbb{C})$ の 2 次交代テンソル表現 $(1, 1)_{GL(m)}$ を $SO(m, \mathbb{C})$ に制限して得られるから, plethysm $(k)_{GL(m)} \cdot (1, 1)_{GL(m)}$ の $SO(m, \mathbb{C})$ Λ の制限を考えると 1 になる。

$$(k)_{GL(m)} \cdot (1, 1)_{GL(m)} = \sum_{\substack{K \\ |K|=k, \ell(\overline{2K}) \leq m}} (\overline{2K})_{GL(m)}, \quad ([1]).$$

$$\lambda_{GL(m)} \downarrow_{SO(m)} = \sum_{\mu} \left(\sum_K L R_{2K, \mu}^{\lambda} \right) \pi_{SO(m)}(\mu_{SO}), \quad ([k-T])$$

ただし, μ_{SO} は universal character ring Λ の元で, SO の universal character, $\pi_{SO(m)}: \Lambda \rightarrow (SO(m, \mathbb{C}) \text{ の指標環})$ は specialization homomorphism である $([k-T])$. Sp の場合と同様に $\pi_{SO(m)}$ の像は 0 になるか, 又はある Young 図形 ν があ

かつ $\pm \lambda_{\text{Sol}(m)}$ とするかのいずれかである。 λ は、Young 図形を用いた簡単なアルゴリズムによって求められる。

上記の二式より、

[定理 4.1] $l(\lambda) \leq n$ かつ

$$P_H(\lambda_{\text{Sol}(m)}, t) = F(m, t) \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu \in P_{\text{Sol}(m)}(\lambda)} \text{sgn}_{\text{Sol}(m)}(\mu) \left(\sum_{|k|=k} \sum_{l(2k) \leq m} L R_{2\nu, \mu}^{2k} \right) \right) t^k \right\}.$$

ここで $F(m, t)$ は、 $m = 2n+1$ かつ $\prod_{i=1}^n (1-t^{2i})$, $m = 2n$ かつ

$(1-t^n) \prod_{i=1}^{n-1} (1-t^{2i})$ で、 $P_{\text{Sol}(m)}(\lambda) = \{ \mu \mid \pi_{\text{Sol}(m)}(\mu_{\text{Sol}}) = \text{sgn}_{\text{Sol}(m)}(\mu) \lambda_{\text{Sol}(m)} \}$.

$P_{\text{Sol}(m)}(\lambda)$ は次のようにして求められる。

$$\bar{\lambda} = (k_1, k_2, \dots, k_n, 0, 0, \dots), \quad \delta = (0, 1, 2, \dots)$$

$(a_0, a_1, \dots) = \bar{\lambda} - \delta$ かつ、整数 $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r$ に対し、

$$g_{i_1, \dots, i_r}^{\text{Sol}(m)}(\lambda) = (m - a_{i_r}, m - a_{i_{r-1}}, \dots, m - a_{i_1}, a_0, a_1, \dots, \hat{a}_{i_1}, \dots, \hat{a}_{i_r}, \dots) + \delta.$$

$$p_{i_1, \dots, i_r}^{\text{Sol}(m)}(\lambda) = \overline{g_{i_1, \dots, i_r}^{\text{Sol}(m)}(\lambda)}.$$

としたとき、

[命題 4.2].

$$P_{\text{Sol}(2n+1)}(\lambda) = \{ p_{i_1, \dots, i_r}^{\text{Sol}(2n+1)}(\lambda) \mid r \geq 0, 0 \leq i_1 < \dots < i_r \}$$

$$P_{\text{Sol}(2n)}(\lambda) = \{ p_{i_1, \dots, i_r}^{\text{Sol}(2n)}(\lambda) \mid l(\lambda) < n \text{ のとき } r \geq 0, l(\lambda) = n \text{ のとき } r \geq 1, 0 \leq i_1 < \dots < i_r \}.$$

$$\pi_{\text{Sol}(m)}(p_{i_1, \dots, i_r}^{\text{Sol}(m)}(\lambda)) = (-1)^{\sum_{j=1}^r i_j} \cdot \lambda_{\text{Sol}(m)}.$$

λ が hook の時, Sp と同様の事が成り立つ。 $\lambda = (a, 1^b)$ に對し,

$$y_{a,b,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\kappa \\ l(\kappa)=i, l(2\kappa) \leq k}} \sum_{\nu} L_{2\nu, \lambda}^{\overline{2\kappa}} \right) t^i$$

とすると

[命題 4.3] $\lambda = (a, 1^b)$, $l(\lambda) \leq n$ のとき, ($n = [\frac{m}{2}]$)

$$p_H(\lambda_{SO(m)}, t) = F(m, t) \{ y_{a,b, 2[\frac{m}{2}]} + y_{a, m-2-b, 2[\frac{m}{2}]} \}.$$

$$\text{すなわち } F(2n+1, t) = \prod_{i=1}^n (1-t^{2i}), \quad F(2n, t) = (1-t^n) \prod_{i=1}^{n-1} (1-t^{2i}).$$

また, $y_{a,b,k}$ の漸化式については,

[命題 4.4] (1) k が偶数の時, $(a,b) \neq (1,1)$ ならば,

$$(1-t^k) y_{a,b,k} = y_{a,b,k-2} + t^k (1-t^k) y_{a-2,b,k} \\ + t \cdot y_{a,b-2,k-2} - t \cdot y_{a,b-2,k-4} + t^{k-1} (1+t) y_{a-1,b-1,k-2}.$$

$$(1-t^k) y_{1,1,k} = y_{1,1,k-2} + t^{k-1} y_{0,0,k-2}.$$

(2) k が奇数のときは, $y_{a,b,k} = y_{a,b,k-1}$.

初期条件は, $y_{0,0,0} = 1$, $y_{0,0,k} = \prod_{i=1}^{[k/2]} (1-t^{2i})^{-1}$ ($k > 0$),

$a < 0$ 又は $b < 0$ 又は $k < 0$ 又は $b+1 < k$ のとき $y_{a,b,k} = 0$,

$y_{a,b,0} = 0$ ($(a,b) \neq (0,0)$), $y_{0,b,k} = 0$ ($b > 0$).

参考文献.

[B-G-G] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand and S.I. Gelfand:

Schubert cells and cohomology of the space G/p ; Russian

- Math. Surveys, 28 (1973), 1-26.
- [H] W. H. Hesselink : Characters of the full cone ; Math. Ann., 252 (1980), 179-182.
- [K] A. A. Kirillov : Polynomial covariants of the symmetric group and some of its analogs ; Functional Anal. appl., 18 (1984), 63-64.
- [Ko] K. Koike : On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups ; to appear in Adv. Math.
- [K-T] K. Koike and I. Terada : Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type B_n, C_n, D_n ; J. Algebra, 107 (1987) 466-511.
- [Ka] S. Kato : Spherical functions and a q -analogue of Kostant's weight multiplicity formula. ; Invent. Math., 66 (1982) no. 3, 461-468.
- [Kos] B. Kostant : Lie group representations on polynomial rings ; Amer. J. Math., 85 (1963), 327-404.
- [L] D. E. Littlewood : The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups ; 2nd. ed., Oxford Univ. Press, London, 1950.

- [M] I. G. Macdonald : *Symmetric Functions and Hall Polynomials* ; Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.
- [Ma] J. Matsuzawa : *On the generalized exponents of classical lie groups* ; to appear in *Comm. Alg.*