

素子と結合¹

— 非線形物理入門 —

大阪府立大学大学院工学研究科 水口 毅²

非線形・非平衡系に特有な散逸構造と動的挙動に着目し、その発生機構に対する数理的なアプローチを紹介する。特に、葉序、分業、形態形成といった生物に見られるマクロな構造や現象を通して、現象の（ある側面を切り出す）モデル化とその解析方法を論じる。モデルを分類するにはいくつかの方法があるが、本講義では、素子と結合という観点から分類し、そのいくつかに関する解説を行なう。素子の性質は、たとえば、状態および時間（空間）連続性やノイズの有無、時間無限大での挙動によってカテゴライズされるが、主に力学系の観点から得られる非線形微分方程式、解の存在・安定性・分岐等の理論的あるいは数値的解析を紹介する。また、結合様式に関しても、比較的良く研究されている平均場型結合、拡散型結合に関する知見とともに、最近注目されているその他の結合形式も紹介し、挙動の差異についても触れる。

1 第一講：はじめに

1.1 テストケースとしての葉序

葉序という現象を通して「モデル化」ということについて考えてみよう。植物の葉や芽が茎のまわりにどのように付いているかという構造には、一定の規則性があり、葉序 (*phyllotaxis*) と呼ばれている。互生、対生、十字生などが知られているが、もっとも興味深いのが螺旋である。ひまわりやサボテン、松などの芽や種子に見られるパターンを良くみると、中心から時計周りと反時計周りの二方向の螺旋とみなすことが出来る。この腕の数が、Fibonacci 数列 ($a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ で構成される数列) の隣り合う二項になっている…と言われている。³ このような螺旋構造はどのようにして出来るのだろうか？

螺旋構造をつくり出す全てのメカニズムは成長先端にある。成長先端付近の拡大図から、その周辺の分裂組織 (meristem) から原基 (primordium) が順番に出現していること

¹ この原稿は、夏の学校に使用したテキストを抜粋、一部変更したものである。

² e-mail: gutchi@ms.osakafu-u.ac.jp

³ このように現象の特徴付けが明確になされている場合、問題設定は比較的しやすい。

がわかっている。成長先端は文字どおり成長して行くので、原基は取り残されるが、成長先端からみれば、原基が一定の速度で遠ざかっているようにみることも出来る。さて、成長先端の中心と各原基とを線分で結んでみると、ある原基は、ちょうどその直前に出現した原基と成長先端の中心に対して開度角と呼ばれる一定の角度で出現することが知られている。そして、螺旋の腕の数が Fibonacci 数列のどれかであるという事実は、 ϕ を黄金比とすると、この開度角がほぼ $2\pi/(1+\phi) \sim 137.5^\circ$ であることに対応する。

この現象に対して、オーキシンの分布や分化プロセスの解明など生物学的なアプローチが盛んである [4] のはもちろんであるが、ここでは Douady らによるアナログモデル [5] を紹介しよう。彼らは、次のような巧妙な実験装置を作った。すなわち、鉄分を含んだしずくを油膜に覆われた円盤の中心に一定時間間隔で落す。円盤には、磁場がかけてあって、(1) しずくが一定速度で半径方向に遠ざかる力と (2) しずく同士が反発する力を受けるようになっている。その意味するところは、しずく＝原基を表現しており、中心から一定速度で分裂組織から離れてゆくのは成長先端が一定速度で成長することを対応している。そして、彼らは、螺旋パターンの生成機構として、たったひとつ、原基同士が反発することを仮定したのである。しずくは磁気双極子となり、距離の 4 乗に反比例して反発する。大雑把に言えば、それぞれのしずくは中心から動径方向に離れて行くことははなから決まっているが、どの方向に動くかは、しずく同士の相互作用によって決まるとしたのである。彼らを選んだ、無次元のコントロールパラメータは $G = VT/R_0$ (V :しずくの移動速度, T :しずくの滴下間隔, R_0 :分裂組織の半径) であり、 $G = 1.2$ から徐々に減少させて、滴下されたしずくのパターンを観測した。 G が大きい (すなわち、滴下間隔の長い) ところでは、しずくは直前のしずくにのみ大きな影響を受けて、直前のしずくと反対方向に向かう。その結果、開度角は、 180° になる。では、 G を小さくしたら何が起こるか。直前のしずく以外に、もうひとつ前のしずくも「感じる」ようになったしずくは、「横」に弾き出されてしまう。その結果、開度角は、 180° よりも小さい値をとる。さらに G を小さくすると、あるしずくの「感じる」しずくの数が多くなって、それ以前のしずくの配置に応じた方向が選ばれる。そして、 G が小さい極限で、開度角は 137.5° を示すのである。⁴ すなわち、 G を変えるだけで、開度角 ϕ として、 180.0° (互生葉序) や 137.5° (Fibonacci 型螺旋葉序) を再現するのである。他に $99.5^\circ, 78.0^\circ, 151.1^\circ$ も再現している。

無論、様々な“反論”も考えられるが、比較的簡単な要素 (中心から一定速度で遠ざかる点) とその相互作用 (反発) からなるこのモデルは、現象を定量的に再現することによって、何から出来ているかに関係なく⁵ フィボナッチ型の螺旋が表れるためには、これらの性質を持つだけで十分と言うことを示したわけである。そういう意味で、モデル化による理解のうまくいった例のひとつではないかと筆者は考える。

物事を理解するための方法として、このようなアプローチを取る時に、どのような道具

⁴ 彼らは数値計算も併用しているが、実験の映像 [6] は説得力がある。

⁵ もちろん関係付けられる方がよいが。

が揃っているのだろうか．本講義はその一部を紹介することを目的とする．

1.2 モデル

発展則を大雑把に分類してみよう．初期条件を決めた時に，その後の発展がユニークに決定されるもの (決定論的) と，ノイズなどの影響で発展が確率的に決まるもの (確率論的) がある．また，状態を表す量や発展を記述する時間が連続的か離散的かによっても分類できる．オートマトン [状態離散，時間離散] / 写像 [状態連続，時間離散] / 力学系 (常微分方程式) [状態連続，時間連続] である．なお，計算機の中に“飼える”のは，オートマトンである．モデルを，素子 (即ちローカルな発展則) とそれらの間の結合とみなした場合，素子の性質は，定常状態 (時間無限大に) おける挙動に対して，静止，周期的，準周期的，非周期的と特徴づけることも出来る．同じ (あるいは同じような) 素子の集合を考えた時に，その相互作用に関しては，大域結合と局所結合がよく調べられているが，それ以外にも，非対称 / 非局所 / ネットワーク型などの結合がある．こういった極めて大雑把な分類の元で，まずは，素子—特に常微分方程式で表されるもの—の性質に着目してみよう．

2 第二講：素子

本節では素子 (ローカルな発展則) として常微分方程式 (力学系) を取り上げる．すなわち，状態変数 $\mathbf{X}(t)$ に対する発展則として

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X})$$

を考える．これは相空間 ($\mathbf{X}$ の空間) でのフローを与える．初期条件，軌道，定常状態をそれぞれ $\mathbf{X}(0)$, $\mathbf{X}(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t)$ で表す．発展則すなわちフローの制御はコントロールパラメータによって行う．相空間のフローが体積を保存する (例えば，ハミルトン系のように $\nabla \mathbf{F} = 0$ が常に成立する) か，平均として縮小させるかで，保存系，散逸系と分類することもある． $\mathbf{F}$ は一般に非線形性である．これは，解の重ね合わせが成立しないことを示すが，解くことを難しくすると同時に，得られる現象の豊かさの源にもなっている．

ここで，スケール変換 および 本質的なパラメータの数 について触れておこう．例えば，3変数力学系である Lorenz モデル

$$\dot{X} = -aX + bY, \quad \dot{Y} = -cXZ + dX - eY, \quad \dot{Z} = fXY - gZ$$

は，こう書くとパラメータが a, b, c, d, e, f, g の7つあるように見えるが，時間 t と状態変数 X, Y, Z をそれぞれ定数倍 (スケール) することによって，係数の大きさを選ぶことが

できる. この場合の本質的なパラメータの数は 3 であり, 通常は, 流体力学でよく使われる無次元数 (Rayleigh 数, Prandtl 数, アスペクト比) が選ばれる.

例題: 複素変数 $W(t) = X(t) + iY(t)$ に対する Stuart-Landau 方程式

$$\dot{W} = \mu W - g|W|^2 W,$$

(μ, g は複素パラメータ) の本質的なパラメータの数はいくつだろうか? (スケール変換で二つ消せるが, 対称性を用いてもう一つ減らすことができる.)

なお, スケール変換を用いて, 係数を 0 にしたり符号を変えたりする場合には注意が必要である.

2.1 定常状態とアトラクタ

定常状態 (ここでは, 時間無限大における挙動の意味) による分類を行う. 安定な定常状態に対応する部分集合をアトラクタといい, 定常状態, アトラクタ, アトラクタの次元をまとめると表 1 のようになる.

状態	アトラクタ	次元
静止	固定点	0
周期運動	リミットサイクル	1
準周期運動	トーラス	2 以上
非周期運動 (カオス)	ストレンジアトラクタ	一般に非整数

表 1: 定常状態とアトラクタの分類

安定な定常状態が二つ (あるいはそれ以上) 存在することもある. この場合は, 双安定性 (あるいは多重安定性) と呼ばれ, 時間無限大の時に, どちらの (あるいはどの) アトラクタに達するかは初期条件によって決定される. あるアトラクタに引き寄せられる初期条件の集合をそのアトラクタのベイスン (basin), あるベイスンと別のベイスンの境界はベイスン=バウンダリと呼ばれる.

また, 問題の性質によっては, アトラクタ上の振舞いではなく, アトラクタへの緩和過程に着目する場合もある. 例えば興奮性と呼ばれる性質は, 擾乱の与え方によって, 緩和過程が大きく変わるという特徴である. この特徴は, 結合系 (特に空間的にひろがった系) で重要となる. 他にも, コイン投げ—を決定論的な力学系としてとらえるのであれば—そのアトラクタは, 倒れて (あるいは立って) 静止している状態, すなわち単なる固定点であり, 現象そのものはカオスではない. どう投げたらどちらの面が上を向いているかという (いろいろな意味で気になる) 問題は, ベイスンの構造に帰着されるが, その複雑さ—

実際、複雑なのだ—の起源は、緩和過程を見なければわからない⁶。

相空間のフローを把握するための指標の一つとしてヌルクラインがある。2次元力学系で、アクティベータ (活性因子) – インヒビタ (抑制因子) 系を例に取ってみよう。力学変数として、 $u(t), v(t)$ 、パラメータ $a, b, c, d > 0, e$ に対して発展則

$$\begin{cases} \dot{u} = au - bv - u^3 \\ \dot{v} = cu - dv + e \end{cases}$$

を考える。2次元相空間 $u-v$ で、 $\dot{u} = 0, \dot{v} = 0$ を満たす曲線がヌルクラインであり、大雑把にはあるが、相空間内の流れをとらえることができる。例えば、ヌルクライン同士の交点は固定点になる。

例題：アクティベータ – インヒビタ系に対して、典型的なパラメータに対するヌルクラインを描き、相空間内のフローを描いてみよう。

反応式から常微分方程式へ

常微分方程式の中には、反応式によって基礎付けられるものがある。遺伝子代謝ネットワークを含む化学反応系や、生態系など様々な「反応」系では、基本的には、反応速度を含めて反応経路が確定すれば、その反応物質の濃度に対する常微分方程式を得ることができる。以下、いくつか典型的な例を挙げてみよう。

• 化学反応系

化学反応系において、反応速度は反応物質の濃度の積に比例することから、発展方程式に非線形性が自然に備わっている。そのため、非線形現象の典型的な例として古くから取り上げられている。

• BZ (Belousov-Zhabotinski) 反応 [2]

BZ 反応とは、四種類の化合物 (金属触媒・酸化剤・還元剤・酸) が作る酸化還元反応で、中間生成物の濃度の自励振動や、スパイラルやターゲット等のパターンを鮮やかに可視化する非平衡化学反応の代表的なものである。反応経路は多様で中間生成物の種類も多い。この複雑なメカニズムをモデル化するために、FKN メカニズムや、オレゴネータ

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{u} &= aw - uw + u - u^2 \\ \dot{v} &= u - v \\ \epsilon' \dot{w} &= -aw - uw + bv, \end{aligned}$$

Keener-Tyson モデル

$$\epsilon \dot{u} = u(1-u) - \frac{bv(u-a)}{u+a}$$

⁶ 正直に言うと、緩和過程を見てもよくわからない。講義中にこの話をしたら、夜のセッションで、どういう初期条件から紙コップを落としたら立つか？という実験を延々と繰り返していた人がいた。彼はうまい初期条件を見付けられたのだろうか？

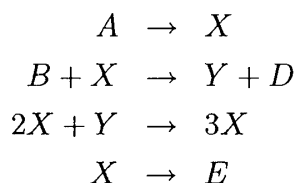
$$\dot{v} = u - v$$

といったモデルが知られている。

ここで、モデル間の関係にも着目して欲しい。二変数の Keener-Tyson モデルは、オレゴネータ (三変数モデル) の特殊な場合である。すなわち、オレゴネータで、 $\epsilon' = 0$ とおき、三番目の式を w に付いて解いたものを一番目の式に代入すると Keener-Tyson モデルが得られる。これは、異なる時間スケールを仮定し、時間変化の速い変数を断熱消去することによって、自由度が低減されたとみることができる。スケールの違いによる自由度の低減は、複雑な現象やモデルを簡略化する時の強力な道具である。

・ブラッセレータ

ブラッセレータは、仮想的な化学反応式



で表される。その反応物質 X, Y の濃度に関する常微分方程式は

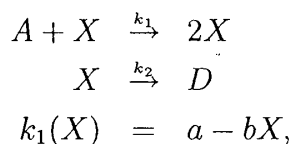
$$\begin{aligned} \dot{X} &= A - (B + 1)X + X^2Y, \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y \end{aligned}$$

となる。後述する様々なタイプの分岐を実現することから、仮想的であるにもかかわらず、よく研究されている。

● 生態系

・ロジスティック方程式

生態系の population dynamics で用いられるもっとも簡単な非線形モデルであり、個体の増殖と死亡を表す二種類の反応式



で表現することができる。増殖速度 k_1 は、指数成長の部分 a と、個体数密度によって飽和する効果 b からなるとしている。このとき、個体数密度 X の従う発展方程式は、

$$\dot{X} = (a - bX)AX - k_2X$$

あるいは、スケール変換して、

$$\dot{X} = kX(1 - X/N)$$

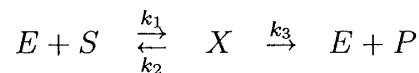
と表すことができる。(そして、もちろん、時間を離散化すれば、これまた有名なロジスティック写像が得られる。よく知られているように、時間を離散化することの影響は極めて大きく、常微分方程式とはまったく異なった振舞いがみられる。)

● 遺伝子代謝ネットワーク

細胞内で行われている遺伝子の発現とタンパク質の生成は、互いに、活性化因子あるいは抑制化因子となって反応ネットワークを構成していることが予想されていたが、近年になってその実験的検証が可能になりつつある。複雑な反応経路とたくさんの中間生成物で構成されていると言う点では、BZ 反応などと同じ⁷ だが、複雑さの度合いはかなり違うかもしれない。

● 酵素反応

酵素反応でも、時間スケールの違いによる自由度の低減によって、よく知られた Michaelis - Menten 型反応速度に関する式が得られる。基質 S, 酵素 E, 中間生成物 X, 反応生成物 P, 反応速度定数 k_1, k_2, k_3 として、



という反応を考えてみよう。S, E および P に関する濃度の発展方程式として、

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -k_1ES + k_2X + k_3X \\ \dot{S} &= -k_1ES + k_2X \\ \dot{P} &= k_3X\end{aligned}$$

が得られるが、 $\dot{E} = 0$ とすると、 $X = \frac{ES}{k_m}$ 。(ただし、 $k_m \equiv \frac{k_2 + k_3}{k_1}$)。酵素の総量 $E_0 = E + X$ を用いると、生成物の生成速度 $v = \dot{P} = k_3X = \frac{k_3E_0S}{k_m + S}$ という結果が得られる。

● 生体時計

ショウジョウバエや哺乳類の生体概日時計に対して、遺伝子代謝ネットワークによるモデル化も行われている。[7]

他の種類の非線形な素子としては、生体膜の興奮現象に関する Hodgkin-Huxley, Fitz-Hugh-Nagumo などのモデルもある。また、位相振動子, LIF, など定常状態として周期的

⁷ 元々、Belousov の動機は、生物の代謝系にあったとのこと。

な性質を持つ様々な振動子や、Rössler 方程式などカオス的な性質を持つ素子もよく研究されている。⁸

2.2 分岐・安定性解析/スイッチ/

コントロールパラメータを変化させると、それにともなって相空間のフローは変化するが、特に、フローに定性的な変化が起こる場合は、現象の特徴付けには重要な役割を果たすと思われる。本節ではこの相空間のフローの定性的な変化に着目する。

分岐・構造安定性

構造安定性とは“擾乱”に対して、相空間の構造が位相的にかわらないことであり、分岐とはパラメータの連続的な変化によって相空間の構造が質的に変わることとする。たとえば、解が(対)生成あるいは(対)消滅するような場合であり、また、既に存在する解の安定性が変化する場合である。

安定性解析

例として、固定点 $\dot{X} = 0$ を満たす状態を基準状態 X_s とし、この状態に擾乱 x を与えるとする。 $X = X_s + x$ を元の発展方程式に代入すると擾乱 x に関する方程式

$$\dot{x} = Lx + N_2 : xx + N_3 : xxx + \dots$$

が得られる。ここで、 L は線形演算子であり、 N_2, N_3 はそれぞれ 2 次 3 次の非線形項である。成分で書けば、

$$\dot{x}_i = \sum_j L_{ij} x_j + \sum_{j,k} N_{2\ ijk} x_j x_k + \sum_{j,k,l} N_{3\ ijkl} x_j x_k x_l + \dots$$

となる。擾乱の大きさが十分小さいとして、二次以上の項を無視したもの

$$\dot{x} = Lx$$

は、線形なので解ける。これを時間発展を $\exp(\lambda t)$ と仮定した時の固有値問題として考えれば、全ての固有値の実数部分が負であれば基準状態は線形安定、一つでも実部正の固有値があれば不安定であることがわかる。パラメータを変化させたときに、それまで全て負(または零)だった固有値の実部が正にかわったとすると、そのときアトラクタはアトラクタでなくなり、相空間の構造に質的な変化が起こることがわかる。

⁸ 逆(反応式←ODE)はどうだろうか？例えば Stuart-Landau 方程式を導くような反応式は存在するのだろうか？

例題：アクティバータ-インヒビタの2次元力学系での固定点とその安定性を調べてみよう。
すなわち、力学変数 $u(t), v(t)$, パラメータ $a, b, c, d > 0$ に対して

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = au - bv - u^3 \\ \dot{v}(t) = cu - dv + e \end{cases}$$

を考え、線形演算子の跡と行列式によって分類できることに注意して、相空間でのフローの変化を図示してみよう。

分岐は、相空間の局所的な性質だけで決定する局所的分岐と、相空間のフローの大域的な性質で決定する大域的分岐と分類できる。実例としては以下のようなものが挙げられる。方程式はそのタイプに分岐点近傍でオーダーパラメータが従う標準形である。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{局所的分岐} & \left\{ \begin{array}{ll} \text{saddle node} & : \dot{z} = c_0 - c_2 z^2 & (z \in R) \\ \text{transcritical} & : \dot{z} = c_1 z - c_2 z^2 & (z \in R) \\ \text{pitchfork} & : \dot{z} = c_1 z - c_3 z^3 & (z \in R) \\ \text{Hopf} & : \dot{Z} = C_1 Z - C_3 |Z|^2 Z & (Z \in C) \end{array} \right. \\ \text{大域的分岐} & \left\{ \begin{array}{l} \text{homoclinic connection} \\ \text{heteroclinic connection} \\ \text{coalease} \\ \vdots \end{array} \right. \end{array} \right.$$

また、新しい状態(解の枝)が、基準状態の不安定側に出るか、安定側に出るかによって分類する方法もある。前者を超臨界 (supercritical)、後者を亜臨界 (subcritical) と呼ぶ。亜臨界分岐の場合、多重安定な領域が存在し、初期値依存性や履歴現象—即ち、コントロールパラメータを上げるときと下げるときで異なる状態が実現される現象—が見られる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{超臨界分岐} & : \text{二次転移的/分岐点でオーダーパラメータが連続} \\ \text{亜臨界分岐} & : \text{一次転移的/分岐点でオーダーパラメータがとぶ} \end{array} \right.$$

例題：分岐ダイアグラムを描いてみよう。横軸にコントロールパラメータ、縦軸にオーダーパラメータ(力学変数)をとり、分岐点でどのような解の枝が分かれるか、また、それぞれの解がどんな安定性を持つか調べてみよう。

2.3 弱非線形解析・標準形

摂動論を高次まで試みると、永年項と呼ばれる項が出て来て摂動論が破綻することがある。この破綻を防ぎ、非線形領域での挙動を記述するために必要な一連の手続きを弱非線形解析という。ここでは、そのために必要ないくつかの概念を説明する。

臨界モード

分岐点では、安定性が入れ替わる場合でも解の生成消滅が起こる場合でも、その近傍でゆっくりした運動が生じる。それは分岐点直上のゼロモードの振幅の運動であり、他の動的時間スケールに比べて遅いことから、タイムスケールが分離が起こる。

多重尺度展開

分岐点近傍で、コントロールパラメータ、オーダーパラメータ、時間を微小量で展開するとき、異なるスケールが存在すると仮定し、それらの間のバランスを仮定する。微小量同士の相対的な大きさには任意性が残るが、その決定には物理的な状況などを考慮すべきである。例えば、Hopf 分岐の場合、時間スケールとコントロールパラメータのスケールを等しくおき、オーダーパラメータのスケールをその $1/2$ 乗にとると、次に述べる可解条件から Stuart-Landau 方程式が得られる。⁹

可解条件

線形非同次方程式が非自明な解を持つための条件、すなわち、線形演算子の随伴演算子のゼロ固有ベクトルと非同次項とが直交しているという条件である。具体的な手続きは、内積を定義し、随伴演算子を求め、そのゼロ固有ベクトルを決定し、非同次項との内積を計算することになる。

標準形

弱非線型解析の手続きは、多重尺度展開を行い、微小量の同じべきで整理することによって一連の線形非同次方程式群を得る。スケールの大きな方から、順次解いて行き、得られた解をよりスケールの小さな方程式の非同次項に代入する。得られた線形非同次方程式に対して可解条件を適用することによって、臨界モードのゆっくりした運動を記述する方程式が得られる。この分岐点近傍で得られる普遍的な発展方程式を標準形という。

3 第三講：結合

同じ (あるいは同じような) 素子 X_i の集団が相互作用する状況を考えてみよう。いくつの素子が、どのように 相互作用 (あるいは結合) するかを決める必要がある。素子数 N に関して言えば、 $N = 2, 3$ といった少数の場合から、 $N \gg 1$ や、無限大の極限を取る場合

⁹ 二つのゼロモードが共存する場合、異なるスケーリングに従うこともある。[8]

などがある。相互作用の仕方も、よく知られた大域型 (global)、局所型 (local) の他に、非対称型、非局所型、ネットワーク型など様々なタイプがある。

着目すべきは (単なる重ね合わせでない) 何が起きるかであろう。例えば、クラスタ化、パターン、引き込み、乱流 といった様々な現象が典型的に考えられる。冒頭の葉序に対する Douady らのアナログモデルでは、しずく一滴一滴が「半径方向に一定速度で動く」という性質を持った素子であるが、それらを単純に集めただけでは、螺旋というパターンは生み出されない。しずく同士が「遠方で減衰する反発相互作用」した結果として、螺旋パターンが再現できたわけである。以下、いくつかの典型的な結合形式と、それによって表される現象を見ていこう。

3.1 大域結合/分化・分業/

大域型結合の場合、素子は位置情報を持たない。なかでも、平均値 $\bar{X} \equiv \sum_i^N X_i/N$ を介して他の全てと相互作用する場合を平均場結合という。この場合、仮定した場の中にある素子がつくり出す場の平均が、仮定した場と一致するというセルフコンシステント条件を満たすことが必要となる。大域結合で、主として解析の対象となるのは、素子の状態の分布関数である。よく研究されているのは、振動子の引き込みなど素子の状態空間でのクラスタ化や乱流現象であるが、ここでは、その一例として、分業や分化現象と状態間個体数の比率に関する制御に注目してみよう。

分業と比率制御

再びアクティベータ=インヒビタ系を考える。平均量 $\bar{u} \equiv \sum u_j/N$, $\bar{v} \equiv \sum v_j/N$ を通じて、

$$\begin{aligned}\dot{u}_i &= au_i - bv_i - u_i^3 + K_1(\bar{u} - u_i) \\ \dot{v}_i &= cu_i - dv_i + K_2(\bar{v} - v_i)\end{aligned}$$

という形で平均場結合している N 個の同一の素子集団を考える。ここで、 a, b, c, d, K_2 は、非負定数とし、 $a - d < 0$, $ad - bc < 0$ かつ $K_1 = 0$ としよう。相互作用が無ければ ($K_2 = 0$)、単独個体は、原点という唯一の安定状態に落ちる。相互作用を強くしていくと、何が起こるだろうか。相互作用が弱い場合は、全ての個体が $(0, 0)$ という同一状態をとるいわゆる 1-クラスタ状態 (一様状態) が実現される。ところが、相互作用がある値を越える ($K_2 > K_{2c}$) と、1-クラスタ状態は不安定化し、各個体は $(u^{(1)}, v^{(1)})$ か $(u^{(2)}, v^{(2)})$ かどちらかの状態に「分化」し、いわゆる 2-クラスタ状態を作る。この 2-クラスタ状態は、二状態間の個体数の比率 (例えば、状態 1 にある個体数 N_1 の全個体数 N に対する比率 $p \equiv N_1/N$) で特徴付けられるが、比率 p という値を持つ解の安定性を計算すると、 K_2 で決まるある一定の範囲 $p_{min}(K_2) < p < p_{max}(K_2)$ の間で安定であるということがわ

かる。すなわち、この系では二状態間の素子数の比率が一定の範囲に調整されるという一種の制御機構が働いていると考えることができる。[9] このことは、2-クラスタ状態にある系に対して、比率を変えるような擾乱—例えば、一方のクラスタに属する個体を取り除くとか—を与えてみるとよくわかる。与える擾乱が安定性に対する p の範囲を越えなければ、系はその擾乱を受け入れるが、安定性に対する p の範囲を越えてしまえば、系はバランスを失なう。このとき個体は平均場を通じてそのことを“知り”、その結果、集団としては二状態間の素子数の比率が適当な範囲にまで回復する。

想像を豊かにすれば、たとえば、同じ種類の個体からなる集団から〇〇好きなものばかりを選んで取り除くと、残された集団は、(〇〇しないものばかりだったにもかかわらず、)やはり〇〇をするものとししないものに分かれる¹⁰ (〇〇には「仕事」、「掃除」、「サボり」、「勉強」など適当なものをいれて下さい。「犯罪」は違うか?)といった一種の分業と比率の自発的な調整という現象との対応が思い浮かぶ。その場合、それぞれの個体が自分の行動を決める際に感じとる全体の「雰囲気」が平均場であり、個人はそれを通じて全体の状況を知るわけである。こういった現象では、元来〇〇好きな個体とそうでない個体がいるという「性向」の分布も系全体の振舞いを決める上で重要な要因になると思われる¹¹ が、分業機構をそれだけで説明するには難しい。ちなみに、このモデルでは個体の性向を必要としない(あってもよいが)。初期条件の違いだけで十分である。¹²

一様状態(1-クラスタ状態)の不安定化は、インヒビタの分配がアクティベータの分配に比べて速いときに起こるが、この傾向は、次の局所結合でも見られる。^{13 14}

3.2 局所結合/パターン/

素子が空間的に分布している場合、発展則は次のように拡張される。

$$\dot{X}(x, t) = F(X; \{\nabla\})$$

ここで、 x は位置を、 ∇ は空間微分を表す。空間微分の入り方には $(v \cdot \nabla)$ や ∇^4 など、様々な種類があるが、特に、次の式で表されるものを反応拡散方程式とよぶ。

$$\dot{X}(x, t) = F(X) + D\nabla^2 X$$

¹⁰ 取り除かれた集団の方とは言うのと、やっぱり〇〇をするものとししないものに分かれる…はずである。

¹¹ 蜜蜂で遺伝的に均一な—すなわち父親が一匹の—コロニーを作ってみたところ、父親が複数である通常のコロニーに比べて巢内温度制御が不安定であるという報告がある。[10] これは、集団が素子の多様性を積極的に利用している一つの例かも知れない。

¹² 実際の蜜蜂でも、従事している仕事によって遺伝子の発現が異なっていることを示す報告もある。[11] これは、行動が遺伝子の違いではなく、発現という内部状態にコードされていると解釈できる。

¹³ このモデルが、分業および比率制御を行うためのミニマルモデルかと言われるとそうではない。たとえば $K < 0$ のように平均場から離れたがるといふ相互作用を導入すれば1変数でも可能である。

¹⁴ 講義で行った三状態以上への分業の話は割愛します。

D は各成分毎に値を持つ. (より一般的な拡散項の表式は $\nabla(D\nabla\mathbf{X})$ である.) あるいは, その離散版として, 空間的な位置を表す離散変数 j を用いて,

$$\dot{\mathbf{X}}_j(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_j) + \tilde{D}(\mathbf{X}_{j+1} - 2\mathbf{X}_j + \mathbf{X}_{j-1})$$

もある. これは, 空間的に並んだ素子の隣同士が結合していることに対応する. この場合, 主として解析の対象となるのは空間パターンあるいは時空間パターンである. よく研究されているものとしては, 周期構造, 螺旋パターン, ターゲットパターンの他に, 樹枝状構造, キンクやパルスなどの局在構造, 乱流構造, 時空間欠的な構造などが挙げられる. ここでは, 単純な例として, 拡散が引き起こす一様状態の不安定性として Turing 不安定性に着目しよう.

Turing パターン

生物の発生における形態形成のモデルとして, Turing は, 化学物質モルフォゲンの拡散が非一様性を生み出すモデルを提唱した. ここで, みたび, アクティベータ=インヒビタの二次元力学系を考えよう. その一次元空間への拡張版を以下のように考える. 力学変数 $u(x, t), v(x, t)$, パラメータ a, b, c, d , の他に, 拡散係数 $D, D' > 0$ を導入し, 簡単のため $e = 0$ とする.

$$\begin{cases} \dot{u} = au - bv - u^3 + D\partial_x^2 u \\ \dot{v} = cu - dv + D'\partial_x^2 v \end{cases}$$

境界条件を適当に決めた後, 原点 $(u_s, v_s) = (0, 0)$ での一様状態という自明な解に関する安定性解析を行えば, 擾乱 $\delta u, \delta v$ の Fourier 成分 $\delta u_k(t), \delta v_k(t)$ に対して

$$\begin{pmatrix} \delta u_k \\ \delta v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - Dk^2 & -b \\ c & -(d + D'k^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_k \\ \delta v_k \end{pmatrix}$$

が成立する. 全ての波数 k に対して安定であるためには, $\text{Tr} = (a - Dk^2) - (d + D'k^2) < 0$ かつ $\text{Det} = -(a - Dk^2)(d + D'k^2) + bc > 0$ であれば良い. 前者は常に成立するが, 後者は, D' が大きい時破れうる. このとき, 一様状態は不安定化し, 正の固有値を持つ波数成分が成長しはじめる. 特に, 0 でない有限の波数 k のモードが最初に不安定になる場合を Turing 不安定性と言う. インヒビタの分配が速い (D' が大きい) と非一様性が生じるという点は, 大域結合の場合と同じである. この Turing 不安定性は実験的にも確認されている. [12]

3.3 その他の結合/ネットワーク /

前節で紹介した大域型と局所型以外にも様々な結合が考えられる. 相互作用の強さが, 素子の相対的な位置に依存するようなケースでは, 単純な平均場では表せないし, 大域型

と局所型の相互作用が同時に存在することも考えられる。 i 番目の素子が j 番目の素子に与える影響と j 番目の素子が i 番目の素子に与える影響が違う場合も有り得る。 ネットワーク型の結合や、結合の強さのダイナミクスなど拡張の方向はいくらでもあるわけだが、そこには何が隠れているのだろうか。

非局所型

重み付の平均場 $\tilde{X}(x, t) = \int G(|x' - x|) X(x') dx'$ を通した結合モデル

$$\dot{X} = F(X) + K(\tilde{X} - X)$$

は、重み関数 $G(x)$ の選び方で、局所結合にも大域結合にもなる。その意味で、局所結合と大域結合をつなぐものであり、両者の“間”をシステマティックに調べることが出来る。実際、近傍にある素子の状態の連続＝不連続転移や、特異な分散関係など、奇妙な特徴を持つことが報告されている。なお、この形の相互作用は多変数反応拡散方程式から断熱消去によって導出することができる。

ネットワーク

より一般的な結合アーキテクチャとして、ネットワーク型が挙げられるであろう。ネットワークについては、ランダムネットワーク (Erdős & Rényi), ニューラルネットワークなどの既に様々な分野で研究されてきたが、近年、スモールワールド (Watts & Strogatz 1998) とスケールフリーネットワーク (Barabási 1999) という二種類のクラスの発見によって再び注目を集めている。[13]

つなげられる点をノード (あるいはバーテックス), つながりを経路とよぶ。平均 (あるいは最長) 距離の素子数依存性 ($\sim \log N$) とクラスタリング係数に着目したスモールワールドと、度数 (ノード毎のエッジ数) 分布のべき則によって特徴付けられるスケールフリーネットワークは、映画俳優とその共演関係、ウェブサイトとリンク、空港と路線、遺伝子代謝系の物質と反応関係、学術論文と参照、神経系など様々なところに遍在することが報告されている。¹⁵

いずれも、まず注目されたのは、つながっているかいないかというネットワークの構造の特徴であり、隣接行列 (adjacency matrix) A_{ij} の特徴である。特徴付けには、直径 (ネットワークのノード間の距離の最大値), クラスタリング係数 ($C_i \equiv 2E_i/k_i(k_i - 1)$, k_i はノード i のエッジ数, E_i はノード i とつながっている (k_i 個の) ノード間のエッジ数), 度数分布, グラフスペクトル (A_{ij} の固有値スペクトル) といった量が知られており、様々なネットワークで調べられている。

構造の発展 $A_{ij}(t)$ や要素の増減に関する拡張はもちろん、こういった構造のネットワークにどのような種類の素子をノード (あるいはエッジに?) にのせ、どのように結合させ、ど

¹⁵ Kevin Bacon 数, Erdős 数といった「特定のノードからの距離」をはかってみたところ、それが意外に小さいという事実は知られており、スモールワールドという構造を予感させる話は昔からあった。

んな現象を見るか、という問題は、様々な方向への発展が期待されるテーマである。また、他のクラスのネットワーク¹⁶にも興味深い世界がひろがっていると思われる。

謝辞

夏の学校に参加してくれた全ての学生さんに感謝します。スタッフのみなさんの綿密な計画、周到的な準備、素晴らしい開催地の選択等のおかげで、夏の学校は朝から晩まで楽しく、かつ、学問的にも充実したものになりました。¹⁷ 特に木原久美子さんには、様々な面で御世話になりました。本講義の準備をするにあたり、多くの方との議論が参考になりました。蔵本由紀先生、大同寛明先生、佐野雅己先生に感謝します。また、小林亮先生、中尾裕也さん、島伸一郎さん、小林幹さんには貴重な資料を提供して頂きました。

参考文献

- [1] “Chemical Oscillations, Waves and Turbulence”, Y. Kuramoto, DOVER Pubns. (2003); 「散逸構造とカオス」, 蔵本由紀他, 岩波書店, (1994).
- [2] 「非平衡系の科学 III 反応・拡散系のダイナミクス」, 三池秀俊他, 講談社サイエンティフィク, (1997).
- [3] 「非平衡系の物理学」, 太田隆夫, 裳華房, (2000).
- [4] D. Reinhardt et al., Nature, **426** (2003) 255.
- [5] S. Douady and Y. Couder, Phys. Rev. Lett., **68** (1992) 2098; S. Douady and Y. Couder, J. Theor. Biol., **178** (1996) 255;
- [6] <http://www.math.smith.edu/~phyllo/Gallery/index.html> .
- [7] A. Goldbeter, Nature, **420** (2002) 238.
- [8] P. C. Matthews and S. M. Cox, Phys. Rev., **E 62** (2000) R1473.
- [9] T. Mizuguchi and M. Sano, Phys. Rev. Lett., **75** (1995) 966.
- [10] J. C. Jones, et al., Science, **305** (2004) 402.
- [11] C. W. Whitfield, A. M. Robinson, Science, **302** (2003) 296.

¹⁶ 追記: MRCA (家系図の話) に関する興味深い論文 [14] を夏の学校終了後に発見。

¹⁷ DNA やモータータンパクなどの機能を持った生体高分子を直接扱う実験や観測手段の最近の進歩には驚かされます。それにともなって新しい問題が次々に提示されていることを実感しました。

- [12] Q. Ouyang and H. Swinney, *Nature*, **352**, (1991) 610.
- [13] たとえば, R. Albert and AL. Barabási, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 47.
- [14] B. Derrida, S. C. Manrubia and D. H. Zanette, *J. Theor. Biol.* **203** (2000) 303.
- [15] F. S. Merkt et al, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 184501. 最後に見せた “粘弾性オシロン” (あるいは “常温超流動”) のビデオに関する論文です.

おことわり：著作権等の問題からほとんどの図を省略しています。講義で言葉の紹介だけになってしまったカオスや空間的にひろがった系での諸項目に関しても適宜省略しました。