

離散不動点定理と単体分割

九州大学・大学院数理学研究院 川崎英文 (Hidefumi Kawasaki)
Faculty of Mathematics, Kyushu University
kawasaki@math.kyushu-u.ac.jp

近年、離散不動点定理とゲーム理論へのその応用が研究されている。離散不動点定理には、(C) 縮小写像の不動点定理、(M) 単調写像の不動点定理、(B) Brouwer の不動点定理を利用するタイプがあり、それぞれ独立に研究されてきた。本論文では、タイプ (B) を中心に考察し、写像の定義域の単体分割が重要であることを示す。さらに、双行列ゲームを通して、タイプ (M) との比較をおこなう。

1 Brouwer の不動点定理に基づく離散不動点定理

飯村 [2] は、離散集合 $X \subset \mathbb{Z}^n$ からそれ自身への写像 f を連続写像へ拡張し、Brouwer の不動点定理を適用することにより離散不動点定理を導く方法を提案した。そのアイディアは、まず X の凸包を単体分割し、単体の頂点での値 $f(x)$ を基に区分的線形写像 g に拡張する。次に、 g の不動点が単体内部ではなく頂点になるような条件を与えて離散不動点定理を得る。飯村はその条件を方向保存条件とよんでいる。なお、Hex ゲームと Brouwer の不動点定理の同値性を示した Gale [1] に類似のアイディアが見られる。

$\mathbb{R}^n$ の単体の族 $\mathcal{S}$ は以下の 3 条件を満たすとき、 $C \subset \mathbb{R}^n$ の単体分割と言う。(i) $\cup_{S \in \mathcal{S}} S = C$ 。(ii) $S \in \mathcal{S}$ の面も $\mathcal{S}$ に属する。(iii) $\mathcal{S}$ の二つの単体の共通部分は空か、それらの共通面である。

単体分割において、同じ単体の頂点 x, x' はセル連結であると言い、 $x \sim x'$ と書く。点 x とセル連結な $x' \in X$ の集合を x の近傍とよぶ。また、 X から X への集合値写像 F に対して、任意の点 x で $f(x) \in F(x)$ なる写像 f をセレクションとよぶ。

飯村 [2]、飯村-室田-田村 [3] は、有限集合 (整凸集合) $X \subset \mathbb{Z}^n$ と集合値写像 F に対して、特別なセレクションを用いる形で離散不動点定理を与え、次の条件を方向保存条件とよんだ (正確には、 $x \sim x'$ の代わりに $\|x - x'\|_\infty \leq 1$ を用いた)。

$$x \sim x' \Rightarrow (f_i(x) - x_i)(f_i(x') - x'_i) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

Yang [12] は単体分割を出発点に、方向保存条件を少し緩めた局所総和方向保存条件 (locally gross direction preserving)

$$x \sim x' \Rightarrow (f(x) - x)^T (f(x') - x') \geq 0 \quad (2)$$

を用いて離散不動点定理（定理1）を与えた。なお、方向保存条件、局所総和方向保存条件いずれを用いても証明は同じである。

定理 1 $\text{co}X$ を有限集合 $X \subset \mathbb{Z}^n$ の凸包、 $\mathcal{G}$ を $\text{co}X$ の単体分割とする。 F のあるセクション f が局所総和方向保存条件を満たすならば、 $x \in F(x)$ なる $x \in X$ が存在する。

2 双行列ゲームに対する方向保存条件

離散不動点定理をゲーム理論に適用する際、方向保存条件等を翻訳する必要がある、本節では双行列ゲームを通して方向保存条件を詳しく調べる。

双行列ゲームとは、 $m \times n$ 利得行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ が与えられた対戦型ゲームで、2人のプレイヤーはそれぞれ $x^T A y$, $x^T B y$ を最大にするように確率ベクトル $x \in P_m$, $y \in P_n$ を選ぶ。この確率ベクトルのことを混合戦略、第 i 単位ベクトル $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ を純戦略とよぶ。ゲーム理論でよく知られているように、 A, B がどのような行列であっても

$$x^T A \bar{y} \leq \bar{x}^T A \bar{y}, \quad \bar{x}^T B y \leq \bar{x}^T B \bar{y} \quad \forall x \in P_m, y \in P_n$$

なる確率ベクトル $\bar{x}, \bar{y}$ が存在し、それは Nash 均衡とよばれる。一方、戦略を純戦略 $x = e_i, y = e_j$ に限定すると、Nash 均衡が存在するとは限らないが、離散不動点定理を用いることにより、純戦略 Nash 均衡の存在を論じることができる。

ところで、行列の行番号や列番号は通常1から始めるが、 n 次元の場合は0から始める方が記述が楽である。そこで、プレイヤー1,2の最適応答をそれぞれ次式で定める。

$$F_1(j) = \{i \in \{0, \dots, m\} \mid a_{ij} \geq a_{i'j} \ \forall i'\}, \quad F_2(i) = \{j \in \{0, \dots, n\} \mid b_{ij} \geq b_{ij'} \ \forall j'\}.$$

このとき、 $F(i, j) = F_1(j) \times F_2(i)$ とおくと、純戦略 Nash 均衡は $(i, j) \in F(i, j)$ と表現できる。また、双行列ゲームでは $[0, m] \times [0, n]$ 格子の単体分割を考えるが、最初に特別な単体分割を考察する（命題1-3）。一般の単体分割は定理2で取り扱う。

命題 1 $[0, m] \times [0, n]$ 格子の単体分割として Freudenthal 分割¹をとるとき、最適応答 F のセクション $f = (f_1, f_2)$ が方向保存であるための必要十分条件は (3) を満たすことである。

$$f_1(j) \leq f_1(j+1) \leq f_1(j) + 1, \quad f_2(i) \leq f_2(i+1) \leq f_2(i) + 1 \quad \forall i, j. \quad (3)$$

¹この名称は藤重悟先生に教えて頂いた。

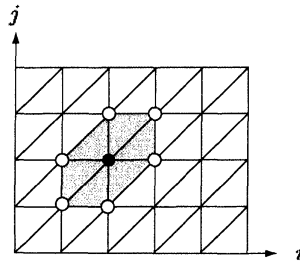


図 1: Freudenthal 分割と近傍. 行列の座標の原点は左上にあるが, n 次元への拡張に備えて, 左下の点 $(0, 0)$ を原点にする.

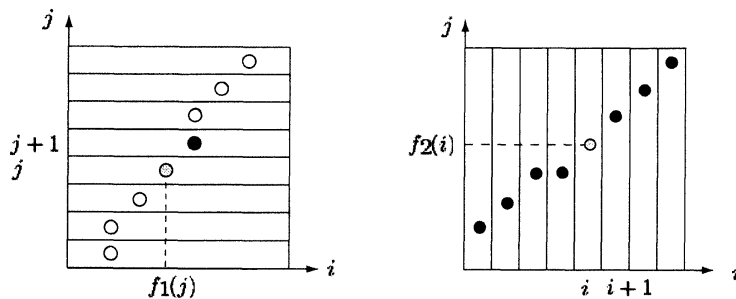


図 2: Freudenthal 分割の場合, 方向保存な最適応答は増加量が高々1の単調増加関数.

命題 2 $[0, m] \times [0, n]$ 格子の単体分割として Freudenthal 分割を 90 度回転させたものをとるとき, 最適応答 F のセレクション f が方向保存であるための必要十分条件は (4) を満たすことである.

$$f_1(j) - 1 \leq f_1(j+1) \leq f_1(j), \quad f_2(i) - 1 \leq f_2(i+1) \leq f_2(i) \quad \forall i, j. \quad (4)$$

ユニオンジャック分割をとると, 単調でない最適応答を取り扱うことができる.

命題 3 $[0, m] \times [0, n]$ 格子の単体分割として図3のユニオンジャック分割をとるとき, 最適応答 F のセレクション f が方向保存であるための必要十分条件は (5) と (6) を満たすことである.

$$f_1(j \pm 1) = \begin{cases} f_1(j), f_1(j) + 1, f_1(j) - 1 \text{ のどれか}, & j + f_1(j) : \text{even} \\ f_1(j), & j + f_1(j) : \text{odd}. \end{cases} \quad (5)$$

$$f_2(j \pm 1) = \begin{cases} f_2(i), f_2(i) + 1, f_2(i) - 1 \text{ のどれか}, & i + f_2(i) : \text{even} \\ f_2(i), & i + f_2(i) : \text{odd}. \end{cases} \quad (6)$$

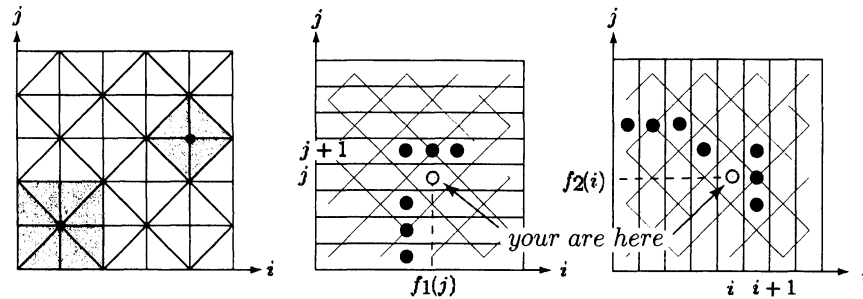


図 3: ユニオンジャック分割の場合, 単調でない最適応答が現れる.

このように, 離散不動点定理を応用する際に単体分割は重要である. 実は, 一般の単体分割に対する方向保存条件を特徴づけることができる. $[0, m] \times [0, n]$ 格子の任意の単体分割 (図 4) に対して, その境界 (辺) から横線をすべて取り除いてできるグラフを G_1 , 縦線をすべて取り除いてできるグラフを G_2 とする.

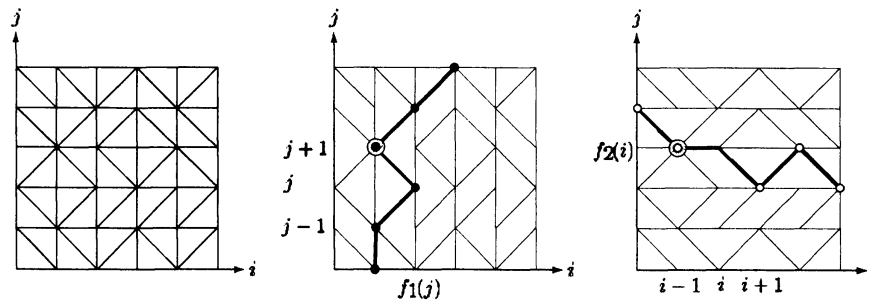


図 4: 一般の単体分割の場合の最適応答

定理 2 $[0, m] \times [0, n]$ 格子の任意の単体分割に対して, 最適応答 F のセレクション f が方向保存であるための必要十分条件は折れ線 $(f_1(1), 1), (f_1(2), 2), \dots, (f_1(n), n)$ が G_1 の部分グラフに, 折れ線 $(1, f_2(1)), (2, f_2(2)), \dots, (m, f_2(m))$ が G_2 の部分グラフになることである.

証明. 必要条件: 折れ線 $(f_1(1), 1), \dots, (f_1(j), j)$ が G_1 の部分グラフとする. $(i, j) = (f_1(j) + 1, j)$ における方向保存条件は, (i, j) にセル連結な任意の (i', j') 対して $f_1(j') \leq i'$ が成立することであるが, そのうち $j' = j+1$ なるものは $i' = f_1(j), f_1(j)+1, f_1(j)+2$ の高々 3 つである. Case 1: $(f_1(j), j+1)$ が $(f_1(j)+1, j)$ とセル連結な場合は $f_1(j+1) \leq f_1(j)$ が得られる. Case 2: $(f_1(j), j+1)$ が $(f_1(j)+1, j)$ とセル連結でない場合は $f_1(j+1) \leq f_1(j)+1$ が得られる. 同様に, $(i, j) = (f_1(j) - 1, j)$ における方向保存条件は, (i, j) にセル連結な

任意の (i', j') に対して $f_1(j') \geq i'$ が成立することであるが, そのうち $j' = j + 1$ なるものは $i' = f_1(j) - 2, f_1(j) - 1, f_1(j)$ の高々3つである. Case 3: $(f_1(j), j + 1)$ が $(f_1(j) - 1, j)$ とセル連結な場合は $f_1(j + 1) \geq f_1(j)$ が得られる. Case 4: $(f_1(j), j + 1)$ が $(f_1(j) - 1, j)$ とセル連結でない場合は $f_1(j + 1) \geq f_1(j) - 1$ が得られる.

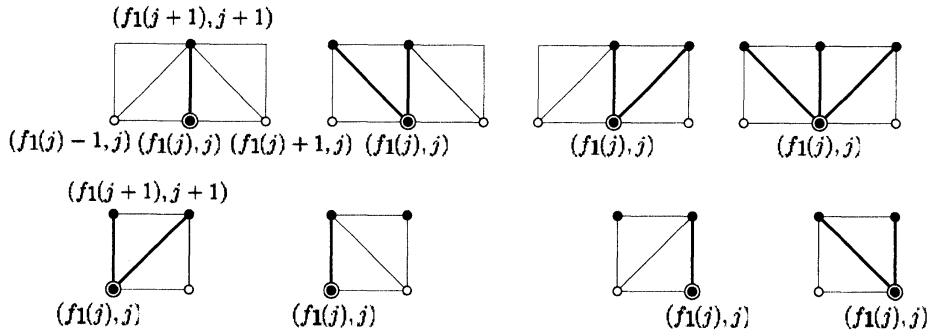


図 5: 2 重丸が $(f_1(j + 1), j + 1)$ で, 白丸が $(f_1(j) \pm 1, j)$ である. $(f_1(j + 1), j + 1)$ が取りうるのは黒丸の点である.

以上の結果を Case 1,3, Case 1,4, Case 2,3, Case 2,4 の 4 つに場合分けしたものが図 5 の上段であり, $(f_1(j), j)$ と $(f_1(j + 1), j + 1)$ を結ぶ辺は G_1 に属する. また, $f_1(j)$ が 0 または m のときは上の不等式の一部だけを考慮すればよく, 図 5 の下段になり, やはり延長した辺は G_1 に属する. G_2 についても同様である. 以上の議論の逆をたどれば, 十分条件であることも分かる. ■

注意 1 $x \sim x'$ の代わりに $\|x' - x\|_\infty \leq 1$ を採用すると, 方向保存条件は $f_1(j + 1) = f_1(j)$, $f_2(i + 1) = f_2(i)$ となる (図 6).

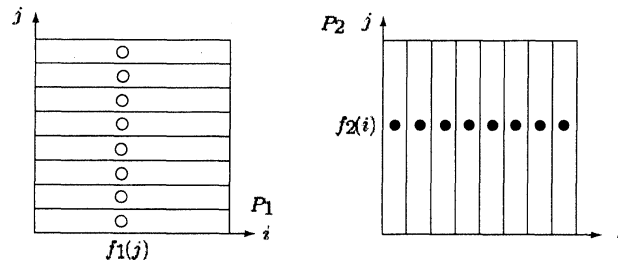


図 6: $x \sim x'$ の代わりに $\|x' - x\|_\infty \leq 1$ とすると, 最適応答は定数になってしまう.

注意 2 単体分割は後付で導入したものであり, 双行列ゲームの純戦略均衡の存在を保証するためには, 方向保存条件を満たすような最適応答のセレクションと単体分割を見つければよいことになる.

3 非協力 n 人ゲームに対する方向保存条件

本節では非協力 n 人ゲームの最適応答に対して、方向保存条件と単体分割の関係を考察する。ここでは、プレイヤー i の純戦略集合を $X_i = \{0, \dots, m_i\}$ とし、 X をそれらの直積集合、 $X_{-i} = \prod_{j \neq i}^n X_j$ とおく。プレイヤー i の利得関数と最適応答をそれぞれ $r_i(x)$, $F_i(x_{-i}) = \{x_i \in X_i \mid r(x_i, x_{-i}) \geq r(y_i, x_{-i}) \ \forall y_i \in X_i\}$ とし、 $F(x) = \prod_{i=1}^n F_i(x_{-i})$ とおく。このとき、純戦略 Nash 均衡は $x \in F(x)$ と表現できる。

そこで先ず、 $\prod_{i=1}^n [0, m_i]$ 格子の Freudenthal 分割を考える。即ち、置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し $S_\sigma = \text{co}\{\mathbf{0}, e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(1)} + e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(1)} + e_{\sigma(2)} + \dots + e_{\sigma(n)}\}$ とおくと、 $\{S_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ は $[0, 1]^n$ の単体分割を与える。 $\prod_{i=1}^n [0, m_i]$ 格子を構成する全ての超立方体をこの方法で単体分割して得られたものを **Freudenthal 分割** とよぶ。

補題 1 Freudenthal 分割に対し、 $x \sim x'$ であるための必要十分条件は、比較可能 ($x \leq x'$ または $x \geq x'$) かつ $\|x - x'\|_\infty \leq 1$ が成り立つことである。

定理 3 $\prod_{i=1}^n [0, m_i]$ 格子の Freudenthal 分割をとるとき、最適応答 F のセレクション f が方向保存であるための必要十分条件は (7) を満たすことである。

$$f_i(x_{-i}) \leq f_i(x_{-i} + d_{-i}) \leq f_i(x_{-i}) + 1 \quad \forall x \in X, \forall d \in \{0, 1\}^n, \forall i. \quad (7)$$

2次元の場合 (命題 3) と同じように、Freudenthal 分割を回転したものを考え、補題 1 や定理 3 と同様の結果を導くことができる。つまり、 e'_i を e_i か $-e_i$ の何れか一方として、置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$S'_\sigma = \text{co}\{\mathbf{0}, e'_{\sigma(1)}, e'_{\sigma(1)} + e'_{\sigma(2)}, \dots, e'_{\sigma(1)} + e'_{\sigma(2)} + \dots + e'_{\sigma(n)}\}$$

とおくと、 $\{S'_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ は $\text{co}\{\sum_{j \in J} e'_j \mid J \subset N\}$ の単体分割を、 $\{S'_\sigma + \sum_{e'_j = -e_j} e_j \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ は $[0, 1]^n$ の単体分割を与える。これを平行移動することにより $\prod_{i=1}^n [0, m_i]$ 格子を構成する全ての超立方体を分割したものを一般 **Freudenthal 分割** とよぶ。また、格子点集合 $\{\sum_{j \in J} e'_j \mid J \subset N\}$ に

$$\sum_{j \in I} e'_j \preceq \sum_{j \in J} e'_j \Leftrightarrow I \subset J$$

により半順序を入れ、格子点 $\prod_{i=1}^n \{0, 1, \dots, m_i\}$ 全体に半順序 $\preceq$ を拡張しておく。

補題 2 一般 Freudenthal 分割に対し、 $x \sim x'$ であるための必要十分条件は、比較可能 ($x \preceq x'$ または $x \succeq x'$) かつ $\|x - x'\|_\infty \leq 1$ が成り立つことである。

定理 4 $\Pi_{i=1}^n[0, m_i]$ 格子の一般 Freudenthal 分割をとるとき, 最適応答 F のセレクション f が方向保存であるための必要十分条件は, 任意の $x \in X$ と任意の $d \in \{\sum_{j \in J} e'_j \mid J \subset N\}$ に対して (8) が成立することである.

$$\begin{cases} f_i(x_{-i}) \leq f_i(x_{-i} + d_{-i}) \leq f_i(x_{-i}) + 1 & \text{if } e'_i = e_i, \\ f_i(x_{-i}) \geq f_i(x_{-i} + d_{-i}) \geq f_i(x_{-i}) - 1 & \text{if } e'_i = -e_i. \end{cases} \quad (8)$$

例 1 $n = 3$ で $e'_1 = e_1, e'_2 = e_2, e'_3 = -e_3$ のとき, $\{i, j\} = \{1, 2\}$ として, 不等式 (8) は次のようになる.

$$\begin{aligned} f_i(x_j, x_3) &\leq f_i(x_j + 1, x_3 - 1), f_i(x_j + 1, x_3), f_i(x_j, x_3 - 1) \leq f_i(x_j, x_3) + 1, \\ f_3(x_1, x_2) - 1 &\leq f_3(x_1 + 1, x_2 + 1), f_3(x_1 + 1, x_2), f_3(x_1, x_2 + 1) \leq f_3(x_1, x_2). \end{aligned}$$

4 単調写像の不動点定理

本節では, 単調写像の不動点定理 (Tarski) を紹介し, それを双行列ゲームに適用して得られる結果と前節の結果を比較する.

半順序集合 $(X, \preceq)$ で, 任意の $x, y \in X$ に対して x, y の最小上界と最大下界が存在するものを束とよぶ. 束 X は, 任意の $Y \subset X$ が最小上界と最大下界をもつとき, 完備であるという. 束 X から X への集合値写像 F は, $x \preceq x'$ ならば, 任意の $y \in F(x)$ に対して, $y \preceq y'$ なる $y' \in F(x')$ が存在するとき, 単調であるという.

定理 5 (Tarski [10]) 完備束 X 上の単調な集合値写像 F は不動点をもつ. すなわち, $x \in F(x)$ なる $x \in X$ が存在する.

Tarski の不動点定理を用いて, 最適応答が単調性をもつ非協力 n 人ゲームは純戦略 Nash 均衡をもつことを示すことができる. 本節でも, X_i や X は前節のそれと同じとする.

定理 6 (Topkis [11]) 写像 $f_i : X_{-i} \rightarrow X_i$ ($i = 1, \dots, n$) が次の単調性を満たすとする.

$$x_{-i} \preceq x'_{-i} \Rightarrow f_i(x_{-i}) \preceq f_i(x'_{-i}) \quad (9)$$

このとき, $f_i(x_{-i}) = x_i$ ($i = 1, \dots, n$) なる $x \in X$ が存在する.

プレイヤーが 2 人の場合, $X = X_1 \times X_2$ に通常の大小関係で半順序を入れると, 条件 (11) は次の (12) になり, 最適応答が単調増加であることを意味する (図 7).

$$x_2 \leq x'_2 \Rightarrow f_1(x_2) \leq f_1(x'_2), \quad x_1 \leq x'_1 \Rightarrow f_2(x_1) \leq f_2(x'_1). \quad (10)$$

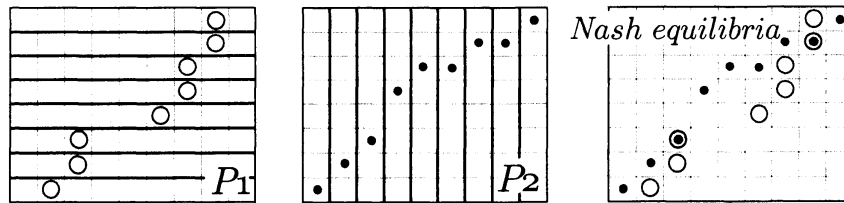


図 7: 最適応答が単調増加ならば純戦略 Nash 均衡が存在する.

$x \preceq x'$ を $x_1 \leq x'_1$ かつ $x_2 \geq x'_2$ で定義すると, (11) は次の (13) になり, 最適応答が単調減少であることを意味する.

$$x_2 \geq x'_2 \Rightarrow f_1(x_2) \leq f_1(x'_2), \quad x_1 \leq x'_1 \Rightarrow f_2(x_1) \geq f_2(x'_1). \quad (11)$$

前節の命題 1 と命題 2 では, 増加 (減少) 量が高々 1 の単調な最適応答を説明できたが, 本節の (12) と (13) ではより広い範囲の単調な最適応答を説明できる. しかしながら, 単調写像の離散不動点定理では, 単調でない最適応答を取り扱うことができない.

5 ブール代数上の縮小写像に対する離散不動点定理

本節では縮小写像の離散不動点定理について簡単に説明する. ブール代数 $\{0, 1\}$ 上の行列をブール行列とよぶ. 行列の和や積は通常の計算規則と同じで, それらの成分の和や積はブール代数に従うものとする. また, 固有値 ($\in \{0, 1\}$) や固有ベクトルも普通に定義する. 写像 $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ に対して, 関係行列 $B(f) := (b_{ij})$ を次で定義する.

$$b_{ij} := \begin{cases} 0, & f_i \text{ が } x_j \text{ に依存しない場合} \\ 1, & \text{その他.} \end{cases}$$

関係行列の最大固有値が 0 のとき, f を縮小写像とよぶ.

定理 7 (Robert [7]) 縮小写像 $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ は唯一の不動点をもつ.

Shih-Dong [9] は離散微分を用いて, 定理 7 を局所的縮小写像に拡張した. さらに, Richard [8] は Shih-Dong の離散不動点定理を整数区間の直積 $X = \prod_{i=1}^n X_i$ 上の写像に拡張した. それらから次の 2 つの定理が容易に導かれる.

定理 8 (川崎 [4]) X 上の写像 f について, ある置換 σ があって, どの $i = 1, \dots, n$ についても $f_{\sigma(i)}$ が $x_{\sigma(j)}$ ($j \geq i$) に依存しなければ, f は唯一の不動点をもつ.

定理 9 (川崎 [4]) 最適応答 F のセレクション $f = (f_1, \dots, f_n)$ の変数と関数の番号を適当に並べ替えたとき, f_i が i より若い番号のプレイヤーの戦略にしか依存しないならば純戦略 Nash 均衡が存在する. また, F が一点集合の場合は, 純戦略 Nash 均衡は一意に決まる.

定理 8 とタイプ (B) やタイプ (M) の離散不動点定理との関係は不明である. また, 定理 9 の仮定はかなり強いが, 完全情報をもつ展開形ゲームに対する Kuhn の定理を定理 9 で説明できる (川崎他 [5][6]).

参考文献

- [1] D. GALE, The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem, *The American Mathematical Monthly*, **86**, No. 10, (1979) 818–827.
- [2] T. IIMURA, A discrete fixed point theorem and its applications, *J. Math. Econom.*, **39** (2003), 725–742.
- [3] T. IIMURA, K. MUROTA AND A. TAMURA, Discrete fixed point theorem reconsidered, *J. Math. Econom.*, **41** (2005), 1030–1036.
- [4] 川崎英文, 縮小写像の離散不動点定理とその応用, 京都大学数理解析研究所講究録 1682 「不確実・不確定性下での意思決定過程」, ed. 土肥正, (2010) 163–167.
- [5] 川崎英文, 吉良知文, 縮小写像の離散不動点定理と展開形ゲーム 京都大学数理解析研究所講究録 1726 「最適化モデルとアルゴリズムの新展開」, ed. 梅谷俊治, (2011) 33–38.
- [6] H. KAWASAKI, A. KIRA, AND S. KIRA, An application of a discrete fixed point theorem to a game in expansive form, to appear in *Asia-Pacific Journal of Operational Research*.
- [7] F. ROBERT, *Discrete Iterations: A Metric Study*, Springer, Berlin, (1986).
- [8] A. RICHARD, An extension of the Shih-Dong's combinatorial fixed point theorem, *Advances in Appl. Math.*, **41** (2008), 620–627.
- [9] M.-H. SHIH AND J.-L. DONG, A combinatorial analogue of the Jacobian problem in automata networks, *Advances in Appl. Math.*, **34** (2005), 30–46.
- [10] A. TARSKI, A lattice-theoretical fixpont theorem and its applications, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 285–309.

- [11] D. TOPKIS, Equilibrium points in nonzero-sum n -person submodular games, *SIAM J. Control Optim.*, **17** (1979), 773–787.
- [12] Z. YANG, Discrete fixed point analysis and its applications, *Journal of fixed point theory and applications*, **6** (2009) 351-371.