

複素力学系 $Z_{n+1} = \ln Z_n + C$ の分岐

岡山大学 理学部 川部 健

1. 研究の発端

1988年3月24日付けの朝日新聞記事に、'定積分の公式にミス' という見出しで $[0, 1]$ 区間の $1/\ln|x|$ の定積分が0ではなく、 $-0.15447 \dots$ であることが、200年ぶりに斎藤基彦氏によって指摘されたことが掲載されていた。その約2年後にこのことを知って、特に目的もなく、ただ数値計算のお遊びで2個以上の $\ln$ の重なりをもつ被積分関数の $[0, 1]$ 区間の定積分を求めた。 n 重の $\ln$ の定積分値 $L_n^{(a)}$ とその逆数の定積分値 $L_n^{(-a)}$ は、 n を大きくしていくと、共にある一定値に近づいていくが、その変化の様子は定積分 $L_n^{(a)}$ について、図1に示すようにセルフ・アフィンなフラクタル変化を示す。¹⁾ 定積分値 $L_n^{(-a)}$ についても同様な変化が見られる。

被積分関数は1次元対数写像 $x \mapsto \ln(a|x|)$ の $a=1$ に関係している。この対数写像の分岐は図2に示すように、 $e^{-1} < a < e$ の範囲でカオスになり、 $a=1$ は正にカオスの領域にある。 n 重の $\ln$ をもつ被積分関数は、 n 回写像を繰り返すことに対応しているが、実際の積分計算では1回の写像毎に広がった x の値を $[0, 1]$ 区間に閉じ込める変換を実行していて、この繰り返し変換が積分値のセルフ・アフィンなフラクタル変化に反映されている。

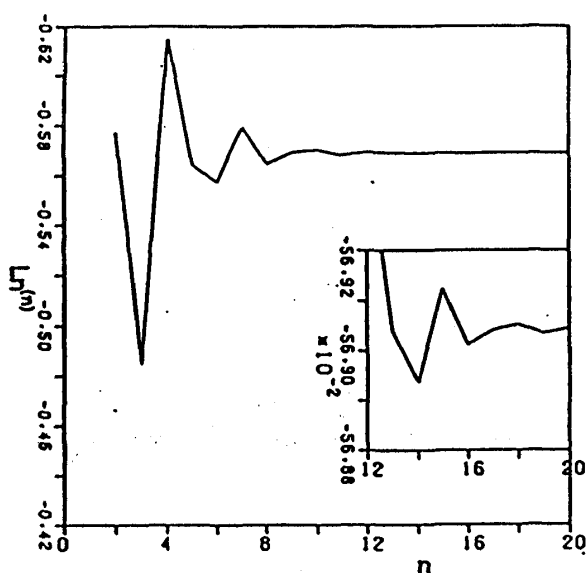


図1

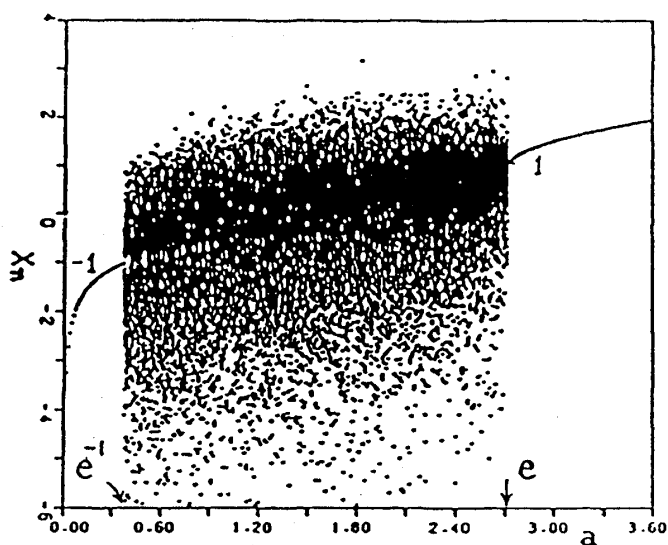


図2

この1次元対数写像は $a = e^{-1}$ でフリップ分岐, $a = e$ で接線分岐を示す. 従って, それぞれの近傍のカオス領域でタイプⅢおよびタイプⅠの間歇性カオスを示す.²⁾ この単純な対数写像関数は, 1つの分岐パラメータで2つのタイプの間歇性カオスが現れるという他の写像関数にない特徴をもつ. この1次元対数写像を拡張した対数関数の複素力学系は, どんな興味深い分岐を示すのだろうか.

2. マンデルブロ集合

複素力学系がもつその多様な構造は, 代表的な力学系 $Z \mapsto Z^2 + C$ について詳細に紹介されているが,³⁾ 超越関数は指数関数について R. Devaney の研究⁴⁾ があるだけで, 対数写像はまだ調べられていない. 対数関数は指数関数の逆関数であるが, 多価性, 発散などを考慮して得られるマンデルブロ集合は全く異なった構造を示す.

対数写像 $Z \rightarrow \ln(|Z|) + C$ によって作り出されていく点列の座標 (X_n, Y_n) は, 次の差分方程式に従って決められる.

$$X_{n+1} = \ln(R_n) + C_x \quad (1)$$

$$Y_{n+1} = \theta_n + C_y \quad (2)$$

ここで, C_x, C_y は実数で, R_n, θ_n は次式を表す.

$$R_n = |Z_n| = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}, \quad \theta_n = \tan^{-1}(Y_n/X_n) \quad (3)$$

(3) 式により Z_n は周期 2π の多価関数である. 多価関数の分岐は任意に選ぶことができるが, ここでは (Ⅰ) $0 \leq \theta_n < 2\pi$, (Ⅱ) $-\pi/2 \leq \theta_n < 3\pi/2$, (Ⅲ) $-\pi \leq \theta_n < \pi$ の3つの場合に限って考察する.

最初にこの写像関数の固定点, 周期点について考えてみよう. 写像関数を $f(Z)$ とするとき, 固定点は $|f'(Z)| < 1$ から

$$f(Z) = Z \quad (4)$$

$$|Z| = R < 1 \quad (5)$$

を満たす領域に限られる. また, k 周期点では

$$Z_{j+1} = f(Z_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k-1), \quad Z_k = Z_1 \quad (6)$$

及び $|f'(Z_k)| < 1$ より

$$\prod_{j=1}^k |Z_j| = R_1 \cdot R_2 \cdots R_k > 1 \quad (7)$$

を満たしていなければならない。

固定点領域と周期点領域の境界は、(4)-(7)式によって固定点と周期点が競合する場合が起こるが、初期値によってその境界が決まる。固定点領域は(4), (5)式によって、 $R = 1$ に対し、

$$C_x = \cos \theta, \quad C_y = \sin \theta - \theta \quad (8)$$

で定義されるサイクロイド曲線、及び (I) $0 \leq \theta < 2\pi$ の場合には $C_x > 1$ に対して、 $R > 1$ となる境界

$$C_y = 0, \quad -2\pi \quad (9)$$

によって限られる。初期値 $Z_0 = (1.0, 1.0)$ に対して、(I) の場合の固定点と周期点領域の数値解析の結果を図 3 (a) の実線によって、また(8), (9)式で与えられる境界線を波線で示した。初期値 Z_0 によって境界線は、多少の変更を受けるが大体波線から大きくずれることはない。

図 (b), (c) はそれぞれ (a) C_y の A, B の部分を拡大したもので 2 周期点, 3 周期点が固定点の領域に侵入しているが、その規則的な境界線の変化が(6), (7)式から導かれるものか、これを解析するのは容易でない。力学方程式(1)-(3)は対称性を欠く形であるが、(I) $0 \leq \theta < 2\pi$ の場合には 1 つの対称性を容易に見いだすことができる。初期値 $(X_0, -Y_0)$ によって与えられる時系列は、

$$C_y \rightarrow -C_y - 2\pi$$

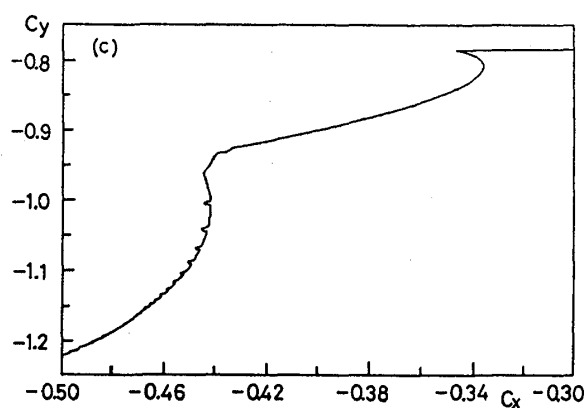
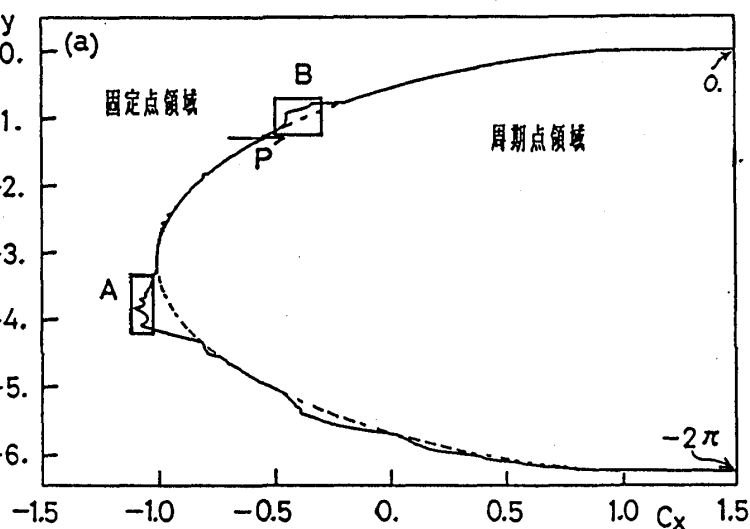
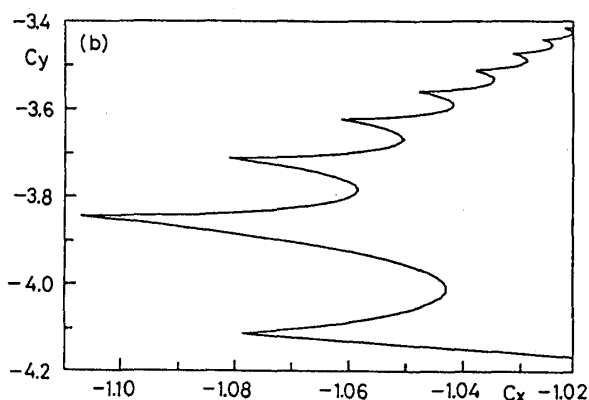


図 3

とするとき常に時系列 $(X_n, -Y_n)$ をつくるから、初期値 $(X_0, -Y_0)$ のマンデルブロ集合は初期値 (X_0, Y_0) のマンデルブロ集合と直線 $Cy = -\pi$ に関して対称となる。図3 (a) の点Pは固定点の境界線（サイクロイド曲線）上の点で3. でこの近傍の分岐について触れる。
 (II) $-\pi/2 \leq \theta_n < 3\pi/2$ 及び (III) $-\pi \leq \theta_n < \pi$ の場合のマンデルブロ集合は、(I) の場合と全く異なる。(II) の場合には図5に示しているが、(III) の場合には周期点領域はない。いずれの場合にも1次元対数写像で見たようなカオス領域が存在しない。

3. 周期加算則とホップ分岐

図3で示した周期点領域を詳細に調べてみる。初期値 $Z_0 = (1.0, 1.0)$ について周期解の領域を図4 (a), (b) に、更に (II) の場合を図5に示した。図4の (b) は (a) の一部を拡大したものである。この図より右の方から、例えば2周期と3周期の間から5周期、更に3周期と5周期の間から8周期、3周期と8周期の間から11周期が... というように大きな周期点が生成されていく。そこには m 周期 + n 周期 $\rightarrow$ $(m+n)$ 周期加算則が

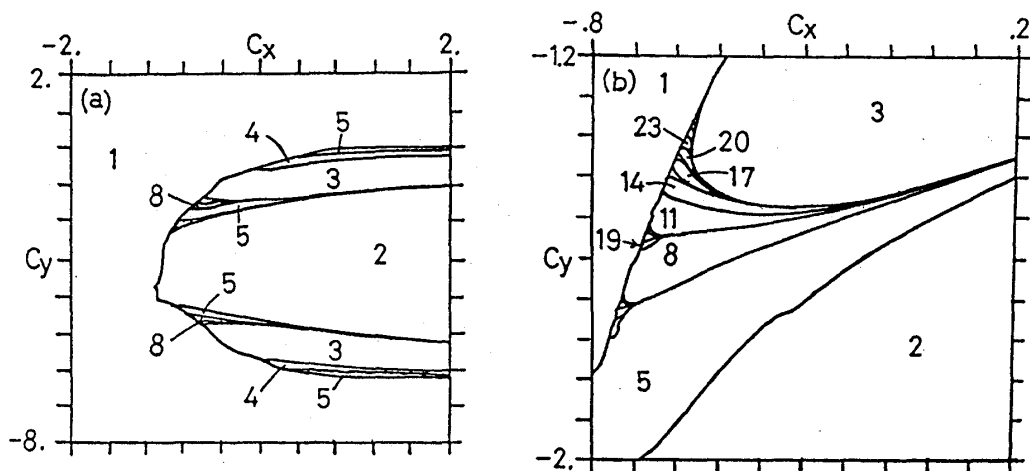


図4

成り立っていて、図4 (b) の中に $3k+2$ の周期列やその他の周期列が固定点との境界に向かって生成されていく様子を観察することができる。例えば、 $31k+27$ のような大きな周期列も見つかっている。図5においても $2k+3$, $3k+4$, $4k+5$, ... の周期列が存在する。このような周期加算則は結合ロジスティックマップ、⁵⁾ サイン・サークルマップ⁶⁾ やファンデルポール振動子系⁷⁾ などで見いだされているものである。

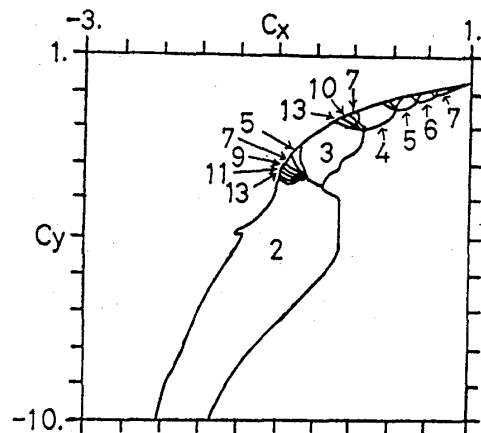


図5

それでは周期点の生成に関する分岐パラメータに対するスケーリング則はどうなっているのでしょうか。周期生成に関しては、図4(b)の例の $3k+2$ の周期列について3周期点領域が3周期点領域と接している境界線の長さ(A_k とする)が k を大きくするとき、何らかのべき則でスケールされると思われる。結合ロジスティックマップやサイン・サークルマップでは A_k が k^{-3} でスケールされている。そこで、もっと大きな周期点が見れる領域、図4(b)の上端で3周期点領域が固定点領域と接しているように描かれている部分を数値計算の精度と繰り返し回数を上げて調べると図6のような結果が得られた。3周期点是不連続的に $3k+2$ 周期点領域と接しているが、計算の精度を更に上げることによってこれらの周期境界線は互いに交わると予測される。左側の固定点との境界線は、滑らかな曲線と異なり、ぎざぎざしていて右側の境界線との間には複雑な構造をもつ周期加算則に従う $3k+2$ 以上の周期点領域が存在すると思われる。

図3(a)のサイクロイド曲線上のP点($-0.56, -1.3366895$)のごく近傍の点 $C_x = -0.56$, $C_y = -1.33669$ では、初期値 $Z_0 = (-1.0, 1.0)$ に選んだとき、最初の 10^5 個を捨てた後の点列がつくる時系列変化のx成分, y成分を図7に示す。

完全な周期性を示しているように見えるが、実際には約 10^7 個の時系列の後に1361周期の周期性を見いだす。従って、サイクロイド曲線上に準周期性を示す点が存在すると思われる。

次にP点の近傍を水平に横切って、左から右へ C_x を変化させていったとき、初期値 $Z_0 = (-10., -10.)$ に対する(1)-(3)式によって与えられる最初の100個を除いた1000個の点列を図8に示す。図8では $C_y = -1.337$ に固定して、 $C_x = -0.60$ から -0.555 まで変化させていくとき、a) -0.60 からd) -0.561

までの間は固定点を表し、e)の29周期, f)の61周期を経て3周期点に至る。写像関数の固有値とその積は、固定点(X^*, Y^*)において、それぞれ

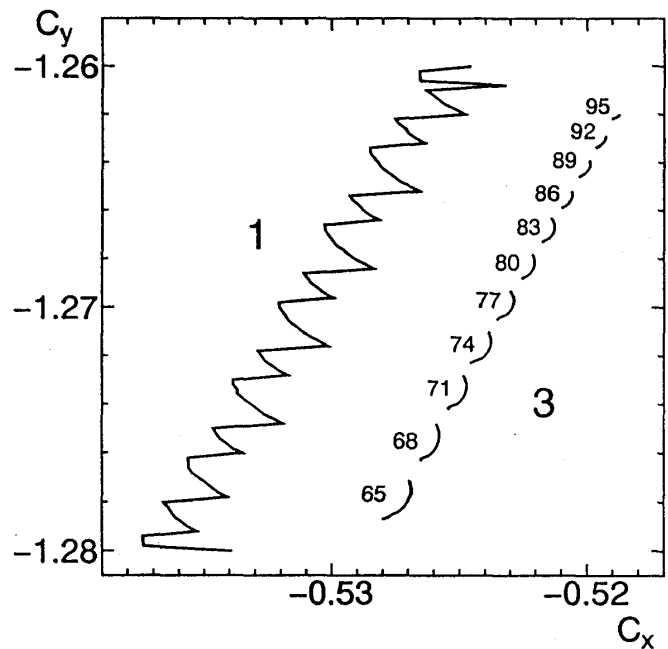


図6

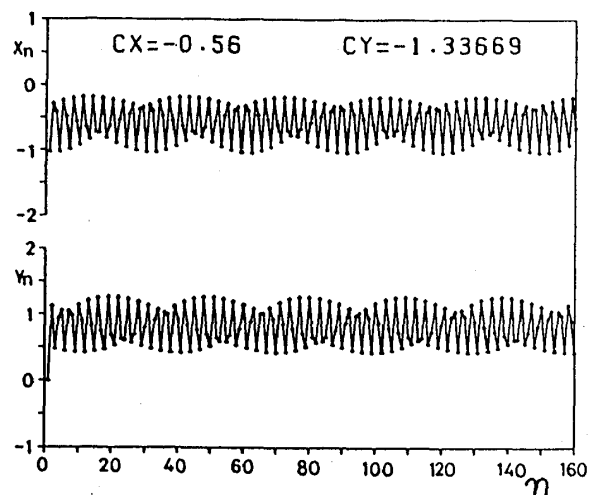


図7

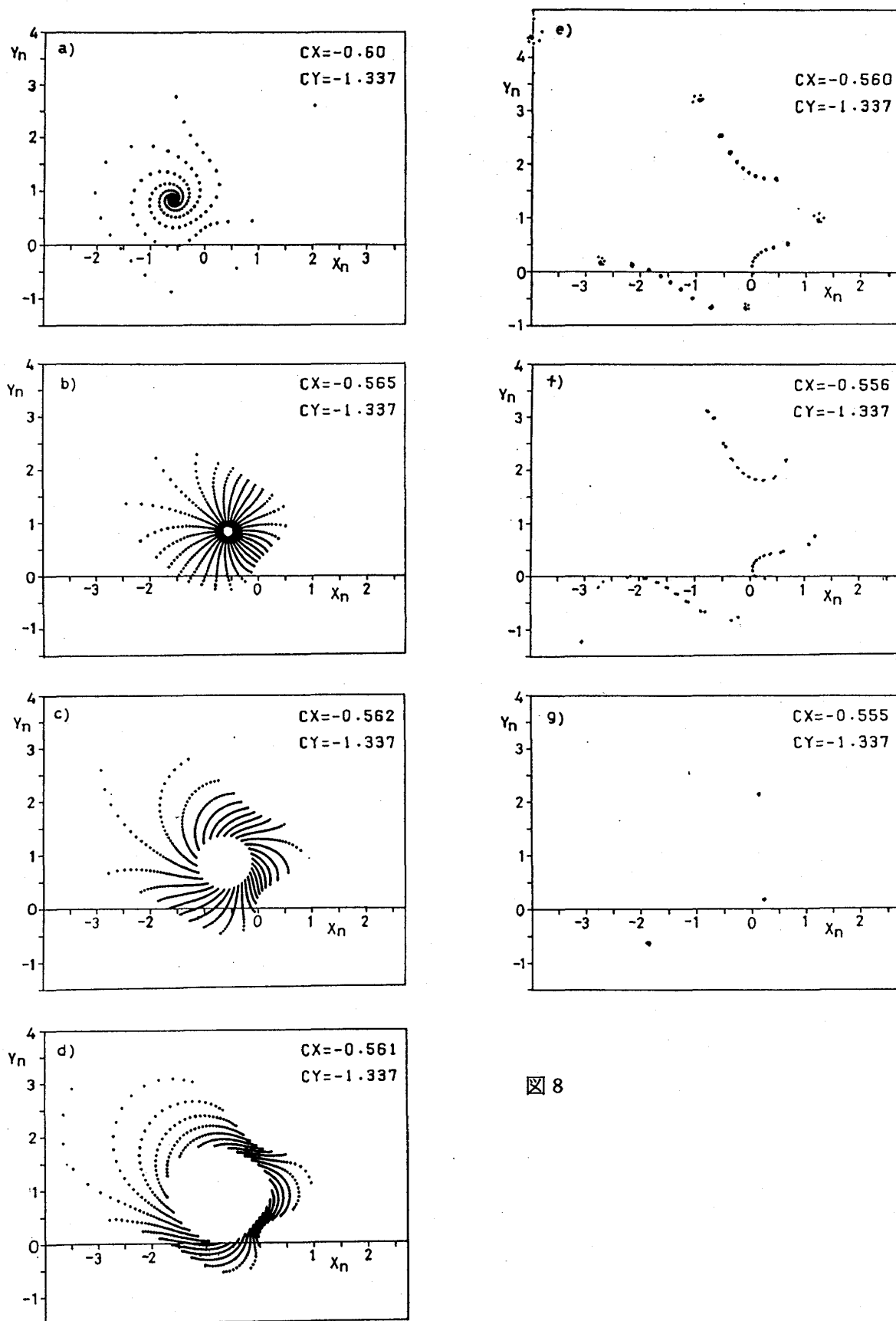


図 8

$$E_{\pm} = \frac{X^* \pm iY^*}{R^{*2}}, \quad E_+ E_- = \frac{1}{R^{*2}} < 1 \quad (10)$$

で与えられるから安定なフォーカスになっているが、その状況は図 a) ~ d) によって理解でき、境界に接近するに従い R^* は 1 に近づき、固定点に達するのに時間を要することが分かる。29 周期点と 61 周期点の近傍には周期加算則により 32 周期点の存在が予測される。この図から分かるように境界線上でホップ分岐が起こっている。

4. おわりに

多価関数の分岐をここで定義した (I), (II) の場合には、固定点と周期点が、(III) の場合には固定点だけが現れて、カオスを示す領域が存在しなかった。また、このような 2π の範囲の分岐を与えるとき、1 次元対数写像 $x \mapsto \ln(a|x|)$ を含む表現を与えることができない。分岐の幅を狭くとり (折り畳む) ことによって、カオス領域が現れると考えられ、そこにはタイプ II の間歇性カオスをみることができるだろう。

図 7 の周期加算則に関連して、その分岐パラメータに対するスケーリング則は、この図の不連続的に並んだ境界の長さだけでその目安が得られると考えてよい。その間の部分には非常に幅の狭い領域を隔てて更に大きな周期点領域が続いていて、これがどの部分についても同じ構造で起こっていると考えられるからである。

複素対数写像 $Z \mapsto \ln(|Z|) + C$ によって得られるマンデルブロ集合やリアプノフ指数のコンピュータ・グラフィックスを他の文献に示す。⁸⁾

参 考 文 献

- 1) T. Kawabe and Y. Kondo, Prog. Theor. Phys. 85(1991)759.
- 2) T. Kawabe and Y. Kondo, Prog. Theor. Phys. 86(1991)581.
- 3) H.-O. バイトゲン, P. H. リヒター (宇敷重広訳) (1988)『フラクタルの美』シュプリンガー・フェアラーク東京.
- 4) R. L. Devaney, bull. Amer. Math. Soc. 11(1984)167.
- 5) K. Kaneko, Prog. Theor. Phys. 69(1983)1427.
K. Satoh and T. Aihara, J. Phys. Soc. Jpn. 59(1990)1123, 1184.
- 6) K. Kaneko, Prog. Theor. Phys. 69(1983)403.
- 7) G. Quin, D. Gong, R. Li and X. Wen, Phys. Lett. A141(1989)412.
- 8) T. Kawabe and Y. Kondo, to be published in J. Phys. Soc. Jpn. 62(1993), No. 2.