

カオス尺度によるカオス現象の解析

東京理科大学理工学部情報科学科

井上 啓・上川原 一

1. はじめに

カオス尺度は、力学系のカオスの度合いを定量的に測る尺度である[6,7,8]. この尺度は、Ohyaによって提唱されている様々な複雑さと状態変化の力学の融合である理論（情報力学）[1,4,5,6]の2つの複雑量を用いて定義されている. 本稿では、エントロピーを用いて定義されるエントロピー型カオス尺度を用いて、特に、外磁場の影響しているスピン系の振る舞いについて考察する. 外磁場の強さや振動の周期によって、スピン1/2系の状態がどのように推移していくかを調べる.

本解析の基礎となる情報力学の基本概念やエントロピー型カオス尺度の定義については、論文[8]を参照していただきたい.

2. 磁場の影響のもとでのスピン1/2系の解析

この節では、以下のようなハミルトニアンで与えられるスピン1/2力学系を考え、磁場の影響のもとで、この力学系のカオス的な振る舞いをカオス尺度を用いて考察する.

$$H = \frac{\hbar^2}{4} A \sigma_3^2 - \frac{\hbar}{2} \mu B \sigma_1 \cos(\omega t)$$

このとき、ハイゼンベルグ運動方程式 $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = (i\hbar)^{-1} [\vec{\sigma}, H]$ は、以下の3つの方程式で表される.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{dt} &= -\frac{\hbar}{2} A \{\sigma_2, \sigma_3\} = 0 \\ \frac{d\sigma_2}{dt} &= -\frac{\hbar}{2} A \{\sigma_1, \sigma_3\} + \mu B \sigma_3 \cos(\omega t) = \mu B \sigma_3 \cos(\omega t) \\ \frac{d\sigma_3}{dt} &= -\mu B \sigma_2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

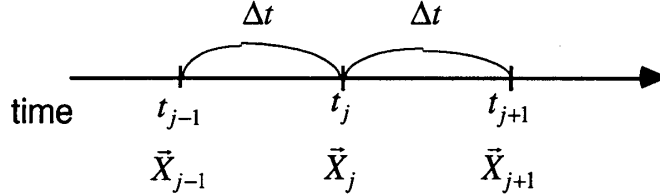
このハイゼンベルグ運動方程式は線形な微分方程式である. いま、微分 $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}$ を差分 $\frac{\vec{\sigma}(j+1) - \vec{\sigma}(j)}{\Delta t}$ ($j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) に置き換えると、ハイゼンベルグ運動方程式は

$$\sigma_1(j+1) = \sigma_1(j)$$

$$\sigma_2(j+1) = \sigma_2(j) + \mu B \sigma_3(j) \cos(\omega j \Delta t)$$

$$\sigma_3(j+1) = \sigma_3(j) - \mu B \sigma_2(j) \cos(\omega j \Delta t)$$

で表される[3]. 下図は, 時間変化とベクトル変化の様子を表したものである.



いま, 時間 j の状態 $\rho^{(j)}$ がこの差分化されたハイゼンベルグ運動方程式のもとで, どのように変化するかを考えてみる. このとき, 以下の補題が成り立つ.

<定理 2. 1> : $\rho^{(j)}$ を $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{\sigma} \cdot \vec{X}_j)$ で与えると, 時刻が $j+1$ では

$$\Gamma_j^* = \frac{1}{2}(I + \vec{\sigma} \cdot f_j(\vec{X}_j))$$

となる. ただし, $f_j: R^3 \rightarrow R^3$ は

$$f_j(\vec{X}_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_j \\ 0 & -a_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \\ x_3^{(j)} \end{pmatrix}, \quad a_j = \mu B \Delta t \cos(\omega j \Delta t)$$

である.

しかしながら, $\|f_j(\vec{X}_j)\| \leq 1$ が成り立つとは限らないので, 時間 j の状態 $\rho^{(j)}$ を時間 $j+1$ の状態 $\rho^{(j+1)}$ に移すチャネル Λ_j^* を

$$\Lambda_j^* \rho^{(j)} = \rho^{(j+1)} = \frac{|\Gamma_j^* \rho^{(j)}|}{\text{tr}[\Gamma_j^* \rho^{(j)}]}$$

で定義する. このチャネルは非線形である. このとき,

$$D^{(n)}(\rho^{(0)}; \Lambda_f^*) = \inf \left\{ -\sum_k \lambda_k^{(m)} S \left(\prod_{l=1}^j \Lambda_f^{*l} E_k^{(m)} \right); E^{(m)} = \{E_k^{(m)}\}, j=1, \dots, n \right\}$$

であり, 以下の結果が得られている[2].

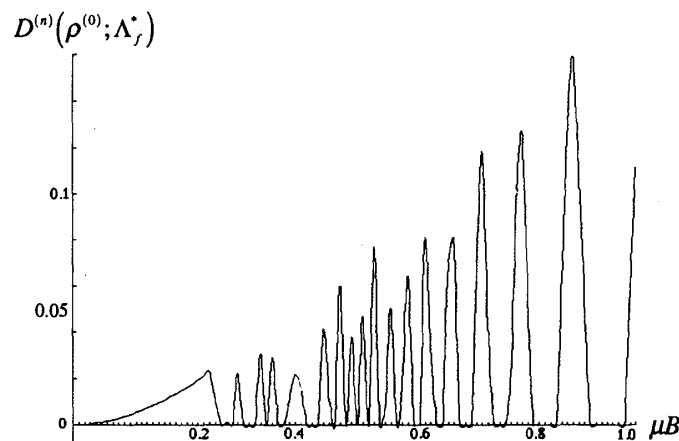


図1 エントロピー型カオス尺度の μB に関する変化
 $(\Delta t = 0.1, m = 100, n = 1000, X^{(0)} = (0.3, 0.3, 0.3)')$

3. 解析結果及び考察

以上より、量子系のエントロピー型カオス尺度を用いると、以下のような結果を得ることができた。

- (1) 外磁場の作用している量子スピン系は磁場の振動の周期に併せて振動する。また、外磁場の強度が大きいほど振動の幅（振幅）が大きくなり、量子スピン系は複雑な挙動を示す。
- (2) 従来の量子カオスの研究は、グッツビラーの跡公式や準位統計、ランダム行列論に代表されるように、古典的なカオス力学系を量子化したときの固有値の分布や古典-量子対応に重点が置かれているが、我々の量子系のカオス尺度を用いた解析では、量子系の状態変化を直接解析することが可能である。

参考文献：

- [1] R.S. Ingarden, A. Kossakowski and M. Ohya, *Information Dynamics and Open Systems*, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [2] 井上 啓・上川原一・大矢雅則, 量子エントロピー型カオス尺度を用いたスピン1/2系のカオスの解析, 投稿中.
- [3] K. Nakamura, *Quantum Versus Chaos- Questions Emerging from Mesoscopic Cosmos-*, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [4] M. Ohya, Information dynamics and its applications to optical communication processes, *Lecture Note in Physics*, 378, 81-92, 1991.
- [5] 大矢雅則, 小嶋 泉 (編著), 量子情報と進化の力学, 牧野書店, 1996.
- [6] M. Ohya, Complexity and fractal dimensions for quantum states, *Open Systems and Information Dynamics*, 4, 141-157, 1997.
- [7] M. Ohya, Complexities and their applications to characterization of chaos, *International Journal of Theoretical Physics*, 37, No.1, 495-505, 1998.
- [8] 大矢雅則, 情報力学からカオスへ, 物性研究, in this volume.