

b -函数の特殊根と、孤立特異点の分類

東大 教養 斎藤恭司

ここでは b -函数のある種の根から導かれる量か、代数曲線論における示性数の様な役割を、孤立特異点に対しはたす事を示し、それに基づいて簡単な場合について、特異点の分類を行ってみます。ここでは複素幾何や各種のモノドロミーとの関連で [3] の内容を主としますが、力学系の立場から、V. I. Arnold [1] の研究もあります。

§1. $r(f)$, $s(f)$

f を $\mathbb{C}^n$ における原点 0 の近傍で定義された正則函数とする時、 f が (又は $\{f=0\}$ が) 0 で孤立特異点を持つとは、 f の偏微分係数で生成されたイデアル $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ の共通零点の中で 0 が孤立立している事で、言い換えれば、 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ の極大イデアル m の適当な n を $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ が含む事である。

さて更に、 f がイデアル $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ に属している時 f を *quasi-homogeneous* と呼ぶ事にする。以降に述べる種々の結

果は quasi-homog. を仮定せずとも正しいと思われるが、証明の都合上本稿では、quasi-homog. な f のみをあつかう事にする。

さて f を quasi-homog. とすると $\mathbb{C}^n$ の原点の局所座標を適当とりかえて、次の様な vector field X をみつける事ができる。

$$Xf = f, \quad X = \sum_{i=1}^n r_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{ここで } r_i \text{ は } 0 < r_i \leq \frac{1}{2} \text{ なる有理数。}$$

(b-函数と超曲面の特異性 1973. 数理研)

さて柏原等によると、 f の b-函数は

$\{u \in B_{pt} : \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u = 0 \quad i=1, \dots, n\}$ の endomorphism として作用する X の最少多項式として与えられる。さて原点における δ -函数は明かに $\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \delta = 0 \quad i=1, \dots, n$ であるが、 δ に X を作用させてみると：

$$X\delta = \sum_{i=1}^n r_i x_i \frac{\partial \delta}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n r_i \delta$$

従って δ は X の個有ベクトルで、その個有値は $\sum_{i=1}^n r_i$ である。

特に $\sum_{i=1}^n r_i$ は f の b-函数の根であるが、最根になる事は容易に確かめられる。

今 $r(f) = \sum_{i=1}^n r_i$ とおくと、明かに $0 < r(f) \leq \frac{n}{2}$ であって、 $r(f) = \frac{n}{2}$ となる必要充分条件は、 f の hessian が non-degenerate (すなわち、 f が普通の二重点を定義する) 事である。

$s(f) = n - 2r(f)$ とおけば、次の事は(易容)にたしかめられる。

$$X h(f) = s(f) h(f) \quad \text{ここで } h(f) = \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1, \dots, n}$$

$$\text{さて } r(f + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + \dots + x_{n+k}^2) = r(f) + \frac{k}{2} \text{ なので}$$

更に duality を用いれば (δ 函数と Hessian は互に dual となって
あり) $s(f)$ は

$$\mathbb{C}_{\mathbb{C}^n, 0} / \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

の endomorphism として作用している X の個有値の最大なもの
として特徴づけられ、その個有ベクトルは Hessian $h(f)$ と
なる。

さて $r(f)$, $s(f)$ は $2r(f) + s(f) = n$, $0 < r(f) \leq \frac{n}{2}$,
 $0 \leq s(f) < n$ 等を満す有理数であったが、もう少し精密
に、次の評価式を得る。[3]

定理 i) $r(f) \leq \frac{1}{2} (n - \text{corank}(f)) + \frac{1}{3} \text{corank}(f)$

ii) $s(f) \geq \frac{1}{3} \text{corank}(f)$

但し、 $\text{corank}(f)$ とは Hessian 行列 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$ の corank の事。

例 $f = x_1^{p_1} + \dots + x_n^{p_n}$ とすると $r(f) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$, $s(f) = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{2}{p_i}\right)$.

§ 2 有理特異点、と単純楕円型特異点

前節で見た様に $s(f)$ は 0 と n の間の有理数で、

$s(f + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+k}^2) = s(f)$ 等の性質を持ち、ある意味で f
の特異性の度合を表わす ($s(f)$ が大きいほど特異) とみなせる。

そこで $s(f)$ の値の小さいものについての f の分類を試みる。

まず $s(f) \leq 1$ とすると、前節最後の定理により、 $\text{corank}(f)$

≤ 3 。従って 3 次以上の項で f に表はれる変数は高々 3 つとなる。更に函数 f の jet について初等的計算を繰り返す事により次の結果を得る。[3]

定理 i) $s(f)=0$ とすると適当な局所座標系により $f = x_1^2 + \dots + x_n^2$ となる。

ii) $0 < s(f) < 1$ とすると適当な局所座標系により f は次のいずれかとなる。

$$x_1^{k+1} + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad k \geq 2$$

$$x_1^{k-1} + x_1 x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \quad k \geq 4$$

$$x_1^4 + x_2^3 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

$$x_1^5 + x_2^3 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

iii) $s(f)=1$ とすると f は適当な局所座標系により、次のいずれかとなる。(但し λ は或る、0 とも 1 とも異なる複素数)

$$x_2(x_2 - x_1)(x_2 - \lambda x_1) - x_1 x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2$$

$$x_2 x_1(x_2 - x_1)(x_2 - \lambda x_1) - x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2$$

$$x_2(x_2 - x_1^2)(x_2 - \lambda x_1^2) - x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2$$

注意 上記定理の i) ii) の函数芽 f は Arnold による

simple germ と呼ばれるものであり、iii) の函数芽 f はその boundary case と言われるものになっている。上記 f には

が4変数 x_4 以下は単に2次の項として加っているので、或る意味で本質的には高々3変数と考え、 $n=3$ とすると、方程式 $f=0$ は i), ii) の時、Curtis 等によって導入された有理二重点を定義し、iii) の時 単純楕円型特異点 ([3] 参照) と呼ばれるものを定義する。

以上の事実に基いて定理の i), ii) 及び iii) の函数芽をそれぞれ、上から順次 $A_1, A_k, D_k, E_6, E_7, E_8, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ と名付ける事にする。

§ 3. 特異点の変型

$f_t(x) = f(x, t)$ を $n+1$ 変数の正則函数芽とし、 $f_0(x)$ が孤立特異点を持つなら、 $|t| \ll 1$ なる t_0 を固定すれば、 $f_{t_0}(x)$ も孤立特異点を持つ。この特 f_{t_0} を f_0 の変型と呼ぶ事にし、 $f_0 \rightarrow f_{t_0}$ と記す事にする。

次の Prop. は容易にたしかめられる。

Prop. $f \rightarrow g$ ならば $r(f) \leq r(g), s(f) \geq s(g)$ となる。

更に § 2 に出て来た特異点については精密に次の結果が成立する。[1], [2], [3]

定理 $A_k (k \geq 1), D_k (k \geq 4), E_6, E_7, E_8, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ 等の特異点の変型は再び、そのすれかとなり、 $P \rightarrow Q$ となる必要充分条件は、 P に対応する Dynkin 図型が Q に対応するそれを

部分図型として含む事である。

1 方次の事実も容易に確かめる事ができる。

Prop f を A_k とし、 D_k, E_6, E_7, E_8 のいずれとも異なる超曲面孤立特異点とすると、 $f \rightarrow \tilde{E}_6, f \rightarrow \tilde{E}_7$ 又は $f \rightarrow \tilde{E}_8$ となる。

注意 今 n を奇数とする時、 f の Milnor fiber の intersection form や f の semi-universal 変型の total モノドロミー群を考えてみる。すると f が、 A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 等の時には、Brieskorn によって [2], intersection form は対応する Lie 環の Cartan-form, モノドロミー群は対応する Weyle 群となる事が計算されており、従ってそれぞれ、definite form, 有限群となっている。一方 $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ については Gabrielov 等の計算により、intersection form は個有値を持ち、モノドロミー群は無限群である。すると上記 Prop. と組みあわせる事により、intersection form が definite になるような、あるいは、total モノドロミー群が有限となるような f は A_k, D_k, E_6, E_7 、そして $\tilde{E}_8$ しかない事が分る。この事は既に 1973. Lamotteke によって指摘されている。ここでは hypersurface を与える f しか考えていないが、実は更に 完全交叉な孤立特異点を与える様な f に対象をひろげても、やはり、intersection form が definite になるような、あるいは、total モノ

ドロミーが有限となる様な f は、上記の A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 の deformation のみである事が確かめられる。

§4.

最後に次の一見奇妙な判定法を与える。

定理 f は孤立特異点を持つとする。

f の任意の変型がすべて quasi-homog. となる必要充分条件は、 $s(f) \leq 1$ となる事である。

もし $s(f) \leq 1$ ならば、§2, §3 の定理を組み合わせる事により、 f の任意の変型は quasi-homog. である。

逆に $s(f) > 1$ としよう。 $Xf = f$ なる

ベクトル場 X を持ってきた時、 f の hessian $h(f)$ に対し、

$$X h(f) = s(f) h(f) \quad \text{であったから}$$

$$f_t(x) = f(x) + t h(f)(x)$$

なる $f_t(x)$ の変型を考えると、その critical set は $x=0, |t| \ll 1$

となり、 f_t は μ -constant family をなしている。この時、

f_t が quasi-homog. とは、 f_t がイデアル $(\frac{\partial f_t}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_t}{\partial x_n})$ に属する事を意味する。この条件を書き下してみると、

$h(f)$ がイデアル $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ に属する事を意味するが、それは、 $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ が局所環 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ のパラメーター系になっ

ているので、おこり得ない。(Hartshorne: Residue and Duality 参照.)
従って $s(f) \leq 7$.

参照文献

- [1] Arnold, V.I.: Normal forms of functions near degenerate critical points, Weyle groups A_k, D_k, E_k and Lagrange singularities. Functional Anal. and its Appl. Vol 6 N°4 3-25 (1972)
- [2] Brieskorn, E.: Singular elements of semi-simple algebraic groups. Actes, Congres intern. Math. 2, 279-284 (1970)
- [3] Saito, K.: Einfach-elliptische Singularitäten. Invent. math. 23, 289-325 (1974)
- [4] 柏原正樹: b 函数と超平面の特異性. (1973. 夏).