

ソリトンの安定性と周期ソリトン共鳴

大阪府立大学 工学部 田尻昌義 (Masayoshi TAJIRI)

大阪府立大学 工学部 村上洋一 (Youichi MURAKAMI)

1. はじめに

1次元のソリトン系ではソリトンは通常、線形安定の条件を満たしているばかりでなく衝突に対してもその形を崩さないといった非常に安定な性格を持っている。そのように1次元的に安定な構造が2次元的に（即ち、一様な横方向に対して）安定かどうかという問題がある。このような問題は Kd-V ソリトンに対しては Kadomtsev と Petviashvili[1] によって既に 1970 年に取り扱われている。彼らは2次元に拡張した方程式（この方程式は可積分系であるこ後に示された [2,3]。以下、KP 方程式と呼ぶ。）を導き、長波長近似を用いて線形安定性に関して次のような興味深い結論を得た。すなわち、媒質が負の分散の時（位相速度が長波長である方が大きい。例としては水面上の重力波。）ソリトンは安定であり、媒質が正の分散の時（位相速度が短波長である方が大きい。例としては水面上の表面張力波）ソリトンは不安定であることがわかった。分散性媒質における長波長の非線形波のダイナミックスは1次元では正負にかかわらず同じ性質を示す。2次元性を考慮するとその違いがソリトンの安定特性を変えてしまうほど本質的になる。多次元化により伝搬特性の違いが顕在するところが興味深い。

正の分散の時は不安定性の発達により2次元的に局在した構造が形成されることが期待され、実際に局在した代数ソリトンが解析的に得られている [4,5]。また、そのような構造が1列に並んだ周期ソリトンと呼ばれる解も得られている [6-8]。したがって、正の分散の時は3種類の解が存在することになる。最近、これらのソリトン間の相互作用については詳しく調べられ、周期ソリトン共鳴という新しいタイプの共鳴があることを示した [9-12]。

ところで、これら3種類のソリトンが初期値問題に対してどのような役割を果たすかという疑問が生じる。通常のソリトンについての安定性は[1]の長波長攪乱に対する結果に加えて、Zakharov[13]が逆散乱法を用いることにより任意の波長に対する安定性の結果を得、最大増幅率やそれを与える波長を求めた。厳密解を用いていることにより、攪乱の非線形段階の時間発展も記述することが可能になった。代数ソリトンに対しては、解析的に安定であることが得られている[14]。周期ソリトンについても[13]と同様の方法でZhdanov[15]は長波長攪乱にたいして不安定となる結果を得た。したがって通常のソリトンと周期ソリトンは安定なソリトン(代数ソリトン)とは異なる役割をしていると期待される。このような不安定なソリトンに攪乱を加えたときにどのように時間発展をしていくかを記述するのがこの研究の目的である。結果的にわかったことであるが、本質的には、以前の結果[13,15]とほぼ同じものである。彼らは論文中、導出の方法を明らかにしていないので、この講究録も一定の意義はあると思われる。この手法で興味深いのは周期ソリトン共鳴が生じるということが増幅モードを求めるのに本質的に関わっているという点である。まずわれわれはKP方程式のソリトン解を与え、線形安定性問題の定式化を行う。次に、N-ソリトン解を用いて周期ソリトンの共鳴解を与え、その表式を用いて増幅率と固有関数を求める方法を説明する。最後に一般の時間発展に対する役割と他のタイプのソリトン系との違いについて述べる。

2. 問題の定式化

Kadomtsev-Petviashvili 方程式は次のように表される。

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x - 3u_{yy} = 0, \quad (1)$$

一般には斜めに伝搬するソリトンがあるが、ここでは y 方向に広がり x 方向に伝搬するものに限定する。通常のソリトン解は

$$u = \frac{P^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\eta}{2}, \quad (2)$$

で与えられ、ここで

$$\eta = Px - \Omega t - \eta_0, \quad (3)$$

であり、分散関係、 $\Omega = P^3$ を満たしている。また、周期ソリトン解は

$$u = 2\alpha^2 K \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{K}} \cosh(\alpha x - \Omega t + \sigma) \cos(\delta y + \theta)}{[\sqrt{K} \cosh(\alpha x - \Omega t + \sigma) - \cos(\delta y + \theta)]^2}, \quad (4)$$

で与えられ、

$$K = \frac{\delta^2}{\delta^2 - \alpha^4}, \quad (5)$$

という関係があり、分散関係は

$$\Omega = \alpha^3 + 3 \frac{\delta^2}{\alpha}, \quad (6)$$

であり、ここで σ と θ は位相定数、 α と β は実数で次の存在条件 ($K > 0$) を満たしている。

$$\delta^2 > \alpha^4. \quad (7)$$

式 (2) と (4) の解の線形安定性を調べるために式 (1) に $U(x, y) + u(x, y, t)$ (ここで U はソリトン解で u は微小攪乱である) を代入する。微小攪乱の 2 次の項を省略することにより、 u に対する方程式は次のようになる。

$$(u_t + 6U u_x + 6U_x u + u_{xxx})_x - 3u_{yy} = 0, \quad (8)$$

境界条件としては $u \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$)、 y 方向に対しては、周期境界条件 (通常のソリトン) もしくはフロケの定理による形 (周期ソリトン) を考える。この境界条件を満たす固有関数をこの形式で Kd-V 方程式 [16,17] や Boussinesq 方程式 [17] のソリトン解に対して見つけたように求めるのは (特に周期ソリトンに対しては) 非常に困難である。そこでわれわれは厳密解の表式を用いることにより固有値及び固有関数を求めることにする。

3. 共鳴ソリトン解を用いる不安定性解析

まず、共鳴状態とはどのようなものであるかを述べる。双一次変換 [3] を使って、周期ソリトンと通常のソリトンの相互作用を表す解を与える。

$$u = 2(\log f)_{xx}, \quad (9)$$

この変換へ次式を代入すると得られる。

$$f = 1 + \frac{K}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) - \frac{1}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1) \cos(\eta) \\ + \exp(\xi_2) \left[1 + \frac{KL^2}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) - \frac{L}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1) \cos(\eta) \right], \quad (10)$$

ここで以下の式を使っている。

$$K = \frac{\delta^2}{\delta^2 - \alpha_1^4}, \quad (11)$$

$$L = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\delta/\alpha_1)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\delta/\alpha_1)^2}, \quad (12)$$

$$\xi_1 = \alpha_1 x - \Omega_1 t + \sigma_1, \quad (13)$$

$$\xi_2 = \alpha_2 x - \Omega_2 t + \sigma_2, \quad (14)$$

$$\eta = \delta y + \theta, \quad (15)$$

$$\Omega_1 = \alpha_1^3 + 3 \frac{\delta^2}{\alpha_1}, \quad (16)$$

$$\Omega_2 = \alpha_2^3, \quad (17)$$

ここで σ_1, σ_2 と θ は任意の実定数である。 x 方向の位相のずれは、 $\Gamma = \log |L|$ で表されるので、 $L \rightarrow \pm\infty$ の時無限大となり、共鳴状態が現れる。図 1 に完全な共鳴状態に近いパラメータでの相互作用を示す [11]。このような場合を準共鳴状態と呼ぶことにする。図では一山しか描いていないが、この山が y -方向に無限に並んでおり、これが周期ソリトンである。この周期ソリトンが右にあるソリトンに衝突して一つの新しい共鳴ソリトンを形成することがわかる。このパラメータの場合さらに時間がたつと準共鳴状態は分裂してもとの 2 つのソリトンになる。

同様に2つの周期ソリトン間の相互作用は表す解は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 f = 1 &+ \frac{K_1}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) + \frac{K_2}{4\alpha_2^4} \exp(2\xi_2) + \frac{K_1 K_2 L_1^2 L_2^2}{16\alpha_1^4 \alpha_2^4} \exp(2(\xi_1 + \xi_2)) \\
 &- \frac{1}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1) \left[1 + \frac{K_2 L_1 L_2}{4\alpha_2^4} \exp(2\xi_2) \right] \cos(\eta_1) \\
 &- \frac{1}{\alpha_2^2} \exp(\xi_2) \left[1 + \frac{K_1 L_1 L_2}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) \right] \cos(\eta_2) \\
 &- \frac{1}{2\alpha_1^2 \alpha_2^2} \exp(\xi_1 + \xi_2) [L_1 \cos(\eta_1 + \eta_2) + L_2 \cos(\eta_1 - \eta_2)], \quad (18)
 \end{aligned}$$

ここで以下の式を使っている。

$$K_j = \frac{\delta_j^2}{\delta_j^2 - \alpha_j^4}, \quad (19)$$

$$L_1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\delta_1/\alpha_1 - \delta_2/\alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\delta_1/\alpha_1 - \delta_2/\alpha_2)^2}, \quad (20)$$

$$L_2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\delta_1/\alpha_1 + \delta_2/\alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\delta_1/\alpha_1 + \delta_2/\alpha_2)^2}, \quad (21)$$

$$\xi_j = \alpha_j x - \Omega_j t + \sigma_j, \quad (22)$$

$$\eta_j = \delta_j y + \theta_j, \quad (23)$$

$$\Omega_j = \alpha_j^3 + 3 \frac{\delta_j^2}{\alpha_j}, \quad (24)$$

ここで σ_j と θ_j 任意の実定数である。 x 方向の位相のずれは、 $\Gamma = \log |L_1 L_2|$ で表されるので、 $L_1 L_2 \rightarrow \pm\infty$ の時無限大となり、共鳴状態を表す。図2に完全な共鳴状態に近いパラメータでの相互作用を示す[9]。図では1山もしくは2山しか描いていないが、この山が y -方向に無限に並んでいる。この2つの周期ソリトンが衝突して一つの新しい共鳴周期ソリトンを形成することがわかる。このパラメータの場合さらに時間がたつと準共鳴状態は分裂してもとの2つのソリトンになるのは先ほどの例と同じである。

さて、準共鳴状態を使ってソリトンの安定性を調べる方法について説明する。図3は準共鳴状態の相互作用を $x-t$ 平面で模式的に描いたものである。考え方は非常に簡単である。準共鳴状態(図3で中の線)を共鳴ソリトンとそのズレ(それに対する攪乱)とみなす。そのズレとは周期ソリトンの種とでも

いうべきものであり、 y -方向に周期的であり、 x -方向には減衰しており、前節での線形安定問題の固有関数とみなされるはずである。この考えに基づいてズレの部分の f を次に計算する。

通常のソリトンと周期ソリトンの準共鳴の条件 ($L \rightarrow \infty$) のもとで、式 (18) において、 $\exp(\xi_1) \ll 1$ 、 $\exp(\xi_2) \gg 1$ かつ $\exp(2\xi_1 + \xi_2) \sim O(1)$ の領域が準共鳴状態に対応する。したがって、 $\exp(\xi_1) \sim O(1/\sqrt{L})$ と $\exp(\xi_2) \sim O(1/L)$ となる。そこで $\sqrt{L} \exp(\xi_1) \rightarrow \exp(\xi_1)$ 、 $\frac{1}{L} \exp(\xi_2) \rightarrow \exp(\xi_2)$ と定義し直すと、

$$f = 1 + \frac{K}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1 + \xi_2) - \frac{1}{\sqrt{L}} \left[\frac{1}{\alpha_1^2} (1 + \exp(\xi_2)) \exp(\xi_1) \cos(\eta) \right] + \frac{1}{L} \left[\exp(\xi_2) + \frac{K}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) \right]. \quad (25)$$

この式の $1/L$ のかかっていない部分は予想のとうり、共鳴ソリトンを表している。 $O(1/L)$ の項を無視し、線形問題の固有関数に相当する $O(1/\sqrt{L})$ の項を次のように書き直す。

$$f_d = -\frac{1}{\sqrt{L}} \left[\frac{1}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1 + \xi_2/2) \cosh(\xi_2/2) \cos(\eta) \right], \quad (26)$$

u に戻す前に次の共鳴条件を記す。

$$\frac{\delta}{\alpha_1} = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (27)$$

共鳴ソリトンの波数を $\alpha_0 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ と定義すると、攪乱の x -方向の波数は $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta})$ と任意の δ に対して与えられる。 $f = f_s + f_d$ の表式を変換 (9) に代入してソリトンの部分 u_s および攪乱の部分 u_d を求め、攪乱部分のみ下に与える。

$$f_d = -\frac{1}{\sqrt{L}} \left[\frac{1}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1 + \xi_2/2) \cosh(\xi_2/2) \cos(\eta) \right], \quad (28)$$

$$u_d = \frac{2\alpha_1^2}{K\sqrt{L}} [\alpha_0^2 \operatorname{sech}^2 \xi_0 \tanh \xi_0 - 2\alpha_1 \alpha_0 \operatorname{sech}^2 \xi_0 - 2\alpha^2 (1 + \tanh \xi_0)] \times \exp(\alpha_1(x - \alpha_0^2 t)) \exp(\gamma t) \cos(\eta). \quad (29)$$

ここで

$$\xi_0 = \xi_1 + \xi_2/2 + \sigma_2, \quad (30)$$

$$\sigma_2 = \log(\sqrt{K}/2\alpha_1^2), \quad (31)$$

$$\gamma = \delta\sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta}, \quad (32)$$

である。最後の表式は Zhdanov[13] が Zakharov[11] の逆散乱法のスキームを用いて求めたものと一致すると述べている表式と一致している。彼らの論文は非常に短く、以上我々が述べた方法と完全に一致するかどうかは不明であるが、非線形段階の不安定モードの時間発展も記述できると延べているので実質的には同じ方法であると考えられる。図4に δ に対する増幅率 γ のグラフが示されている。 $\delta \rightarrow 0$ で[1]の結果に一致することがわかる。この表現で興味深いことは不安定モードの非線形段階も記述できる点にある。不安定モードは周期ソリトンに成長して、より振幅の小さい通常のソリトンができる。

周期ソリトンの不安定モードの固有関数および増幅率も全く同様の方法によって求めることができる。固有関数はやや複雑な表式になるので省略し、増幅率の表式のみ下に記す。

$$\gamma = 4 \frac{\delta^2}{\alpha^4} \left(\frac{\delta_1}{\delta} \right)^2 \frac{\sqrt{\frac{1}{4}(1 + \frac{\delta}{\alpha^2})^2 - \frac{\delta_1}{\alpha^2} + \frac{\delta}{\alpha^2}}}{\sqrt{\frac{1}{4}(1 + \frac{\delta}{\alpha^2})^2 - \frac{\delta_1}{\alpha^2} + \frac{1}{2}(1 + \frac{\delta}{\alpha^2}) - \frac{\delta_1}{\delta}}}, \quad (33)$$

ここで共鳴周期ソリトンの波数は $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ および $\delta = \delta_1 + \delta_2$ で定義されている。また共鳴条件は

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \frac{\delta_2}{\alpha_2} + \alpha_1 + \alpha_2 \quad (34)$$

この条件により、攪乱の横波数 δ_1 を与えることにより α_1 が決まることに注意しておく。上の結果は Zhdanov[13] の結果と一致しており、通常のソリトンと同じように横方向の長波長攪乱について不安定である。図5に δ_1 に対する増幅率 γ のグラフが示されている。この場合不安定モードは周期ソリトンに成長し、もとのソリトンはより周期の長い周期ソリトンになる。

4. おわりに

我々は、 x -方向に伝搬するソリトン及び y -周期ソリトンの固有関数及び増幅率を双一次変換を用いて厳密に求め、逆散乱法を用いた [11,13] の結果と一

致することを示した。その導出において周期ソリトン共鳴が存在することが本質的であることを強調した。この導出は周期ソリトン共鳴が存在すれば周期ソリトンと共鳴するソリトンはいつでも横方向攪乱に対して不安定となることを示している。我々は不安定ソリトンの存在と周期ソリトンの存在を等価なものであらうと予想しているが、我々が示したのは周期ソリトン共鳴が存在するならば不安定ソリトンが存在するということであって、逆を示したわけではない。したがって、他のタイプの不安定なソリトンが存在する可能性はある。不安定ソリトンに任意の微小攪乱を加えるとどのように発展するのだろうか。この疑問に対して我々は離散モードに対応するものは周期ソリトンとなり、連続モードに対応するものはリップルとなるであらうと想像している。一般の時間発展に対して周期ソリトンは不安定の遷移的な過程における基本的なモードとみなされる。

多様なソリトン系は安定特性に基づき、次の3つのタイプに分類されると我々は考えている。

1. 安定なソリトン系
2. 媒質が不安定なソリトン系
3. 媒質は安定であるが、ソリトンの中に不安定なソリトンのある系

1つめは通常のソリトン系であり、Kd-V 方程式に代表されるものである。一般の初期値問題 ($u \rightarrow 0, x \rightarrow \pm\infty$) に対して漸近的にソリトンとさざ波 (リップル) になる。2つめは静止状態の分散関係に不安定モードを含むものであり、ある種の Boussinesq 方程式 [18]、非線形 Shroedinger 方程式 [19]、sine-Gordon 方程式 [20,21] がその例である。この場合不安定モードは成長し、最大値をとり、その後減衰してしまう。この解はソリトン解と重ね合わせができるので、ソリトンは線形安定性としては不安定となるが、その構造が壊れてしまうことはない。(結局もとに戻る。) この研究で取り上げたものは3つめに属するものである。この場合も不安定ソリトンは遷移過程で重要な働きをしていそうである。

参考文献

- [1] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili: Sov. Phys. Dokl. **15** (1970) 539.
- [2] V. E. Zakharov and A. B. Shabat: Funct. Anal. Appl. **8** (1974) 226.
- [3] J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. **40** (1976) 286.
- [4] S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its and V. B. Matveev: Phys. Lett. **A63** (1977) 205.
- [5] M. J. Ablowitz and J. Satsuma: J. Math. Phys. **19** (1978) 2180.
- [6] A. A. Zaitsev: Sov. Phys. Dokl **28** (1983) 720.
- [7] L. A. Abramyan and Yu. A. Stepanyants: Radiophys. and Quantum Electron. **28** (1985) 26.
- [8] M. Tajiri and Y. Murakami: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 3585.
- [9] M. Tajiri and Y. Murakami: Phys. Lett. **A143** (1990) 217.
- [10] Y. Murakami and M. Tajiri: Wave Motion **14** (1991) 169.
- [11] Y. Murakami and M. Tajiri: to appear in J. Phys. Soc. Jpn.
- [12] M. Tajiri, Y. Fujimura and Y. Murakami: to appear in J. Phys. Soc. Jpn.
- [13] V. E. Zakharov: Sov. Phys. JETP Lett. **22** (1975) 172.
- [14] E. A. Kuznetsov and S. K. Turitsyn: Sov. Phys. JETP **55** (1982) 844.
- [15] S. K. Zhdanov: Sov. Phys. Dokl. **30** (1985) 769.
- [16] A. Jeffry and T. Kakutani: Indiana Univ. Math. J. **20** (1970) 463.
- [17] J. G. Berryman: Phys. Fluids **19** (1976) 771.
- [18] N. Yajima: Prog. Theor. Phys. **69** (1983) 698.
- [19] Y. C. Ma: Stud. Appl. Math. **70** (1984) 201.
- [20] N. Yajima and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3069.
- [21] Y. Murakami and M. Tajiri: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 2207.

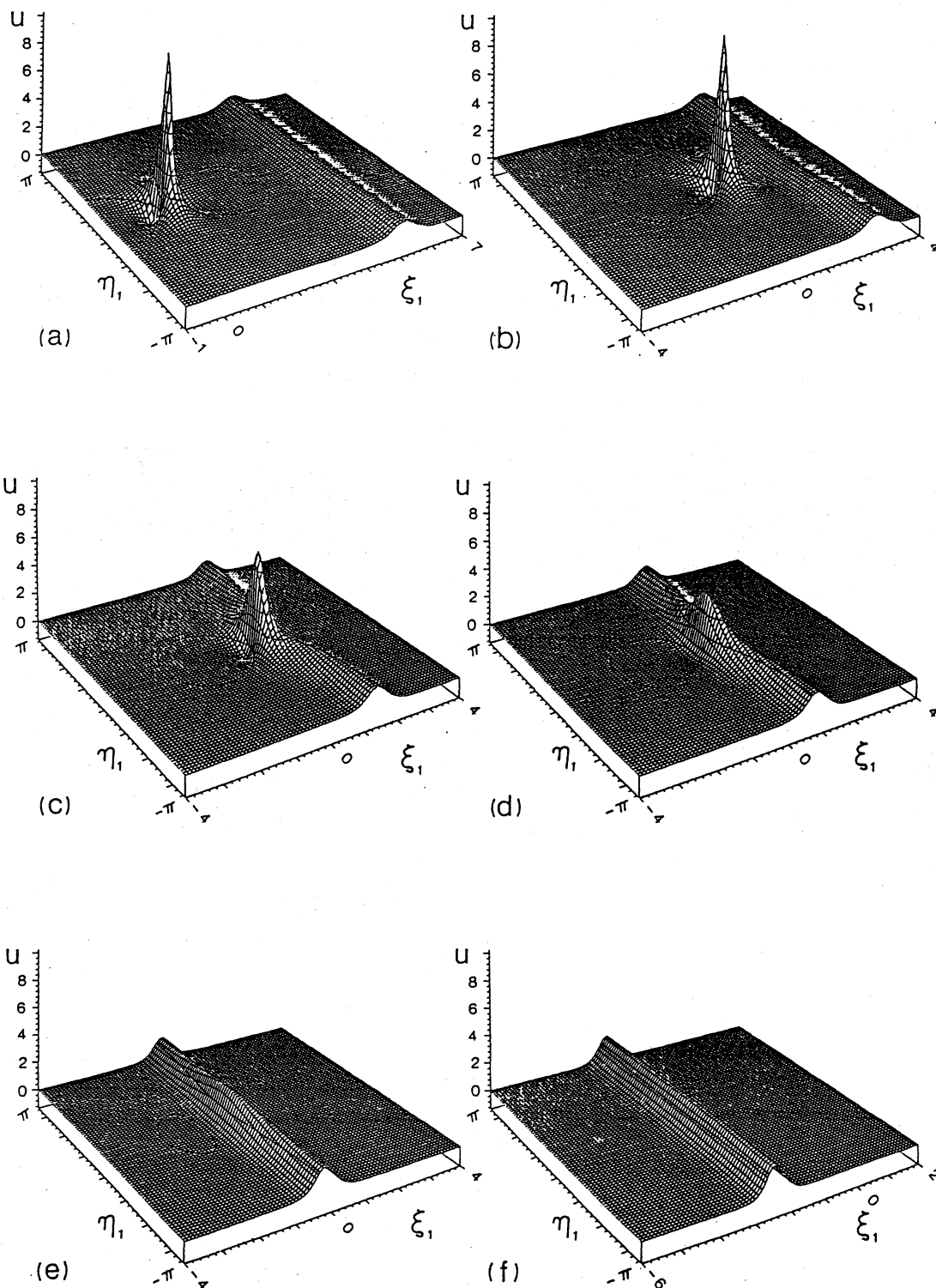


図1 周期ソリトンと通常のソリトンの共鳴相互作用

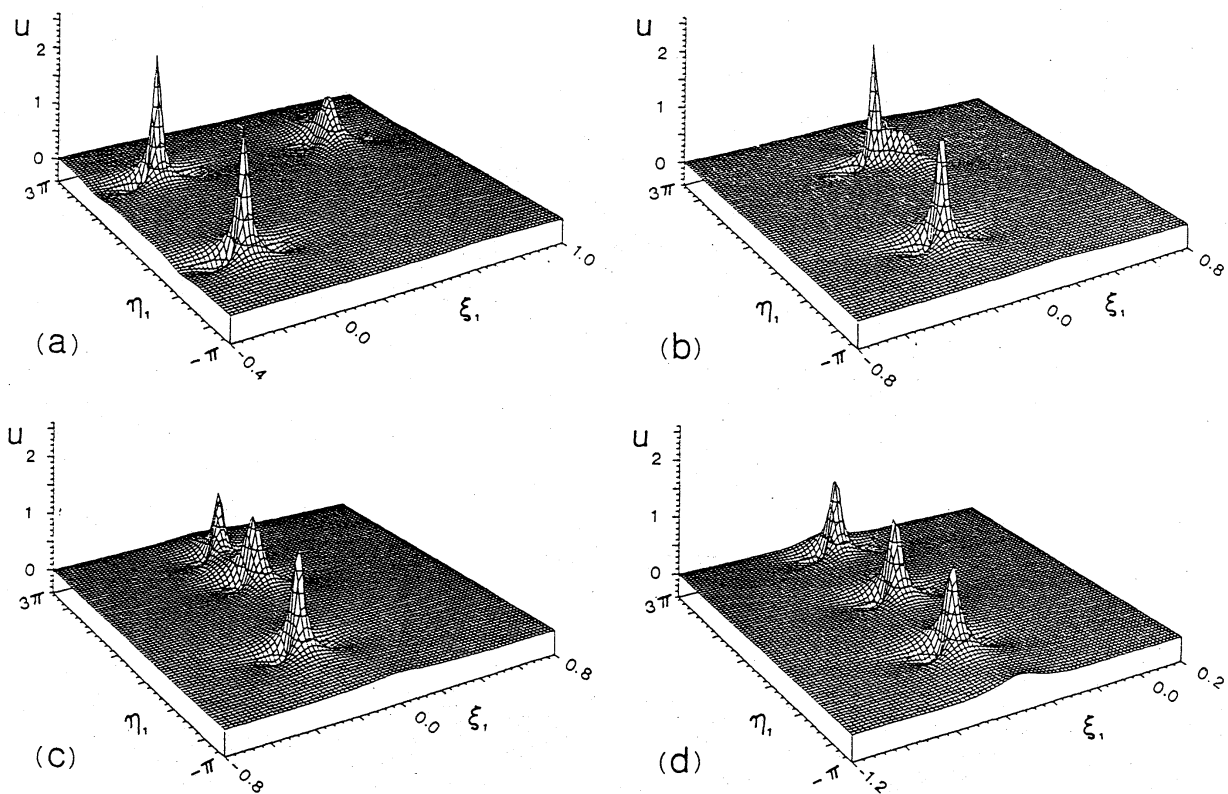


図2 2つの周期ソリトンの共鳴相互作用

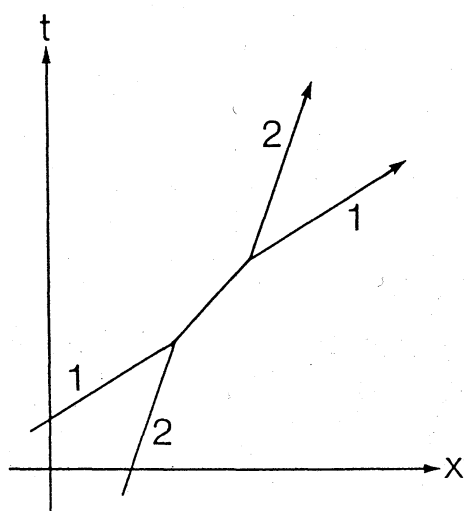
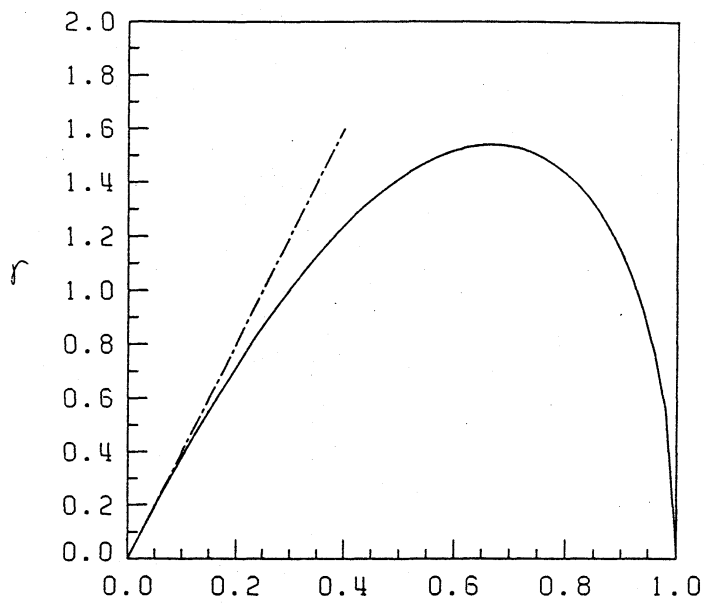
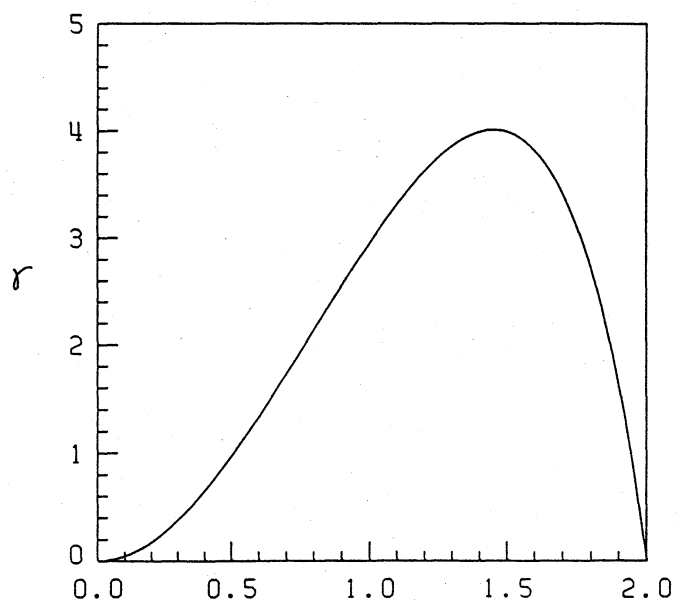


図3 準共鳴相互作用の概念図

1,2 はソリトンのピークを示す。

図4 ソリトンの増幅率 ($\alpha_0 = 2$) δ 図5 周期ソリトンの増幅率 ($\alpha = 1, \delta = 2$) δ