

ある種の退化した劣微分型の
発展方程式について

阪大理 四ッ谷 晶二
丸尾 健二

§ 0. 序

実ヒルベルト空間 H において次の非線型発展方程式 :

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial(c(t)\varphi^t + I_{\overline{D}})u(t) \ni f(t) \quad u(0) = u_0 \quad (*)$$

の弱解^{*)}について考える。以下、記号および仮定について述べる。 $\{\varphi^t\}_{t \in [0, T]}$ は、各 $t \in [0, T]$ ごとに $\varphi^t: H \rightarrow]-\infty, \infty]$ で、凸、下半連続(l.s.c.)、 $+\infty$ として、次の仮定をおく。

$$(A-1) \quad D(\varphi^t) \equiv D$$

$$(A-2) \quad \forall r > 0, \exists Q_r \geq 0, \exists Q_r(\cdot) \in C([0, T]);$$

$$|\varphi^t u - \varphi^s u| \leq |Q_r(t) - Q_r(s)| [\varphi^s u + Q_r]$$

$$\text{for } \forall u \in D, |u| \leq r, \forall s, t \in [0, T]$$

$$(A-3) \quad c(\cdot) \in C([0, T]); \quad c(t) \geq 0,$$

$$\text{measure}(\{t \in]0, T[; c(t) = 0\} - \text{int}\{t \in]0, T[; c(t) = 0\}) = 0$$

$$\text{ただし } I_{\overline{D}}(u) = 0 \text{ if } u \in \overline{D}, +\infty \text{ if } u \notin \overline{D}.$$

注意したいことは、 $c(t)$ は 0 になるかもしれないので (*)

は退化した方程式と考えられること、および (A-2) において $Q_r(\cdot)$ は単に連続 (絶対連続とはかぎらない) という事である。

定義 $u \in C([0, T]; \bar{D})$ が (*) の「弱い解」である

$\iff u(0) = u_0, \quad (c(t)\varphi^t + I_{\bar{D}})u(t) \in L^1(0, T) \quad \text{かつ}$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} (c(s)\varphi^s + I_{\bar{D}})v(s)ds - \int_{t_1}^{t_2} (c(s)\varphi^s + I_{\bar{D}})u(s)ds \\ & \geq \int_{t_1}^{t_2} (f(s) - \frac{dv}{ds}(s), v(s) - u(s))ds + \frac{1}{2}|v(t_2) - u(t_2)|^2 - \frac{1}{2}|v(t_1) - u(t_1)|^2 \\ & \quad \forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \quad \forall v \in W^{1,1}(t_1, t_2; \bar{D}) \end{aligned}$$

定理 (A-1), (A-2), (A-3) を仮定すれば、任意の $f \in L^1(0, T; H)$ と任意の $u_0 \in \bar{D}$ に対して (*) の「弱い解」が一意的に存在する。

注意 (A-2) だけでなく $Q_r(\cdot) \in C([0, T]) \cap VB([0, T])$ として仮定を (A-2)', (A-3) で単に $c(t) \geq 0, c(t) \in C([0, T])$ としてものを (A-3)' とする。このとき、§2 の補題 2.1. の証明の方法と K. Memo [4] の証明の方法を組合せると、次のことがわかる。
「(A-1), (A-2)', (A-3)' を仮定すれば、 $f(t)/\sqrt{c(t)} \in L^2(0, T; H)$ となる任意の f および、任意の $u_0 \in \bar{D}$ に対して、正分的に強い解が一意的に存在する。」これは作用素が線型の場合の A. Friedman and Shuss [6] の定理 7.3. の場合に当てはまる。

§ 1. 定義と基本的な補題

(*) の strong solution (str. sol) および weak solution (weak sol) を H. Brézis [1] に従って定義する。次に piecewise strong solution (p. str. sol.) および piecewise weak solution (p. weak. sol.) をそれぞれ区分的には str. sol. および weak sol となっていて $u(0) = u_0$ をみたす $C([0, T]; H)$ の元として定義する。

注意 § 0. で定義した“弱い解”と weak sol は別のものである。

補題 1.1. 次の図式が成立する。

$$\begin{array}{ccc} \text{str. sol} & \implies & \text{p. str. sol.} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{weak sol} & \implies & \text{p. weak. sol.} \implies \text{“弱い解”} \end{array}$$

証明 u が str. sol. のときには、 $\forall v \in D$ に対して

$$c(t) \varphi^t v - c(t) \varphi^t u(t) \geq (f(t) - \frac{d}{dt} u(t), v - u(t)) = (f(t), v - u(t)) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - v\|^2$$

故に、 $c(t) \varphi^t u(t) \in L^1(0, T)$ 。残りの部分は簡単なので略す。

補題 1.2. u と v をそれぞれ次の方程式の p. weak. sol とする。

$$\frac{d}{dt} u(t) + \partial(c(t) \varphi^t + \mathbb{I}_D) u(t) \ni f(t) \quad (1.1)$$

$$\frac{dv}{dt}(t) + \partial(c(t)\varphi^t + I_D) v(t) \ni g(t) \quad (1.2)$$

ここで $f, g \in L^1(0, T; H)$ 。このとき次の不等式が成立

$$\frac{1}{2} |u(t) - v(t)|^2 \leq \frac{1}{2} |u(s) - v(s)|^2 + \int_s^t (f(\sigma) - g(\sigma), u(\sigma) - v(\sigma)) d\sigma \quad (1.3)$$

$$|u(t) - v(t)| \leq |u(s) - v(s)| + \int_s^t |f(\sigma) - g(\sigma)| d\sigma \quad (1.4)$$

$$\forall 0 \leq s \leq t \leq T.$$

証明 u, v が weak sol のときは [1] p.64. Lemme 3.1. と同様。p. weak. sol. の場合は各区分された区間ごとに不等式を出して加えればよい。

§ 2. いくつかの補題

この § では定理を φ が t に無関係の場合に証明する。

補題 2.1. $\forall f \in L^1(0, T; H), \forall u_0 \in \bar{D}$ に対し、次の方程式の weak. sol. が存在して、この問題の p. weak. sol. として一意。

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial(c(t)\varphi + I_D) u(t) \ni \sqrt{c(t)} f(t), \quad u(0) = u_0. \quad (2.1)$$

とくに $f \in L^2(0, T; H), u_0 \in \bar{D}$ のときは u は一意的弱 p. str. sol. である。

証明 一意性は補題 1.2. による。以下存在について調べる。一般性を失わずに $\min \varphi = 0$ の場合に帰着できる。変数変換して考えるので記号を導入する。 $t \in [0, T], \varepsilon \in [0, T]$ とする。

$$c_\varepsilon(t) = c(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon = c_\varepsilon(t) = \int_0^t c_\varepsilon(\tau) d\tau$$

$$c(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau, \quad g_\varepsilon(\xi) = c_\varepsilon(t)^{-1} \sqrt{c(t)} \cdot f(t)$$

以下 $C_1, C_2, \dots, C_5$ は $\varepsilon, t \in [0, T]$ に対しておさえられる定数
をあらわすものとする。

$$\text{Case [1].} \quad \hat{h} \in L^2(0, T; H), \quad u_0 \in D$$

H. Brézis [1], p. 72, 定理 3.6. により

$$\frac{d}{d\varepsilon} V_\varepsilon(\xi) + \partial \varphi_\varepsilon(\xi) \ni g_\varepsilon(\xi), \quad V_\varepsilon(0) = u_0 \quad (2.2)$$

は $\text{str. } \text{soL.}$ をもち、次の不等式を得る。 $T_\varepsilon = \sigma_\varepsilon(T)$ とする。

$$\left| \frac{d}{d\varepsilon} V_\varepsilon(\xi) \right|^2 + \frac{d}{d\varepsilon} \varphi V_\varepsilon(\xi) = (g_\varepsilon(\xi), \frac{d}{d\varepsilon} V_\varepsilon(\xi)) \quad \text{a.e. on }]0, T_\varepsilon[$$

故に $\forall \xi \in [0, T_\varepsilon]$ に対して、次の不等式を得る。

$$\frac{1}{2} \int_0^\xi \left| \frac{d}{d\sigma} V_\varepsilon(\sigma) \right|^2 d\sigma + \varphi V_\varepsilon(\xi) - \varphi u_0 \leq \frac{1}{2} \int_0^\xi |g_\varepsilon(\sigma)|^2 d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_0^T |\hat{h}(\tau)|^2 d\tau$$

従って、 $\forall \xi \in [0, T_\varepsilon]$ に対して

$$\int_0^\xi \left| \frac{d}{d\sigma} V_\varepsilon(\sigma) \right|^2 d\sigma \leq 2\varphi u_0 + \int_0^T |\hat{h}(\tau)|^2 d\tau \quad (2.3)$$

$$0 \leq \varphi V_\varepsilon(\xi) \leq \varphi u_0 + \frac{1}{2} \int_0^T |\hat{h}(\tau)|^2 d\tau \quad (2.4)$$

次に、 $u_\varepsilon(t) = V_\varepsilon(\sigma_\varepsilon(t))$, $t \in [0, T]$ とおくと、 $u_\varepsilon(t)$ は

$$\frac{d}{dt} u_\varepsilon(t) + c_\varepsilon(t) \partial \varphi u_\varepsilon(t) \ni \sqrt{c(t)} \hat{h}(t), \quad u_\varepsilon(0) = u_0, \quad t \in [0, T] \quad (2.5)$$

の一意的な $\text{str. } \text{soL.}$ がある。 (2.3) と (2.4) により

$$\int_0^T \left| \frac{d}{dt} u_\varepsilon(t) \right|^2 dt \leq C_1 \quad (2.6)$$

$$0 \leq \varphi u_\varepsilon(t) \leq C_1 \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.7)$$

一方 (2.5) より

$$c_\varepsilon(t) \varphi u_\varepsilon'(t) - c_\varepsilon(t) \varphi u_\varepsilon(t) \geq (\sqrt{c(t)} \hat{h}(t) - \frac{d}{dt} u_\varepsilon(t), u_\varepsilon'(t) - u_\varepsilon(t)) \quad (2.8)$$

$$c_\varepsilon'(t) \varphi u_\varepsilon(t) - c_\varepsilon(t) \varphi u_\varepsilon'(t) \geq (\sqrt{c(t)} \hat{h}(t) - \frac{d}{dt} u_\varepsilon'(t), u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon'(t)) \quad (2.8')$$

(2.8) と (2.8)' を加える

$$(\varepsilon - \varepsilon') \varphi u_{\varepsilon'}'(t) + (\varepsilon' - \varepsilon) \varphi u_{\varepsilon}(t) \geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_{\varepsilon}(t) - u_{\varepsilon'}(t)|^2$$

これを $[0, t]$ で積分して, (2.7) を使うと.

$$\frac{1}{2} |u_{\varepsilon}(t) - u_{\varepsilon'}(t)|^2 \leq 4TC_1 \cdot \varepsilon \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall 0 < \varepsilon' < \varepsilon \quad (2.9)$$

(2.6) と (2.9) により

$$\exists u \in W^{1,1}(0, T; H) \quad , \quad u_{\varepsilon} \rightarrow u \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{in } C([0, T]; H)$$

$$\frac{d}{dt} u_{\varepsilon} \rightarrow \frac{du}{dt} \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{in } L^2(0, T; H)$$

($\rightrightarrows$ は弱収束, $\rightarrow$ は強収束をあらわす。)

(2.5) により

$$\int_s^t c_{\varepsilon}(\tau) \varphi(v) d\tau - \int_s^t c_{\varepsilon}(\tau) \varphi u_{\varepsilon}(\tau) d\tau \geq \int_s^t (\sqrt{c(\tau)} f(\tau) - \frac{du_{\varepsilon}}{dt}(\tau), v - u_{\varepsilon}(\tau)) d\tau$$

$$\forall v \in D(\varphi) \quad , \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ とすると, $c(t) \varphi u(t) \in L^1(0, T)$ がわかり, 次の式をえる.

$$\int_s^t c(\tau) \varphi(v) d\tau - \int_s^t c(\tau) \varphi u(\tau) d\tau \geq \int_s^t (\sqrt{c(\tau)} f(\tau) - \frac{du}{dt}(\tau), v - u(\tau)) d\tau.$$

$c(t) \varphi u(t)$, $\sqrt{c(t)} f(t)$, $\frac{du}{dt}(t)$ の Lebesgue 点で考えれば,

$$c(t) \varphi(v) - c(t) \varphi u(t) \geq (\sqrt{c(t)} f(t) - \frac{du}{dt}(t), v - u(t)) \quad \forall v \in D(\varphi).$$

故に, $u(t)$ は (2.1) の str. sol. であり, (2.7) により $u(t) \in D$, $\forall t \in [0, T]$.

Case [2] $f(t) \in L^1(0, T; H)$, $u_0 \in \overline{D}$.

$\exists \{u_0^j\}_{j \geq 1} \subset D$; $u_0^j \rightarrow u_0$ as $j \rightarrow \infty$ in H . かつ $\exists \{f^j\}_{j \geq 1}$

$\subset L^2(0, T; H)$; $f^j \rightarrow f$ as $j \rightarrow \infty$ in $L^1(0, T; H)$. このとき,

(2.1) で右辺を f^j , 初期値を u_0^j にとり替えて初期値問題の強い解を u^j とする。補題 1.2 により $\{u^j\}_{j \geq 1}$ が $C([0, T]; H)$ の

Cauchy 列であり, その極限値が求める解となる。

Case [3] $\eta \in L^2(0, T; H)$, $u_0 \in \bar{D}$.

$\exists \{u_j^0\}_{j \geq 1} \subset D : u_j^0 \rightarrow u_0 \text{ as } j \rightarrow \infty \text{ in } H$.

(i) $\int_0^T c(\tau) d\tau > 0$, $\forall t \in]0, T[$ の場合

$v_\varepsilon^j(\xi)$ を初期値を u_j^0 とする (2.2) の str. sol. とする。[1] の定理 3.6. により, $\forall \delta \in]0, T[$ に対して

$$\int_{\sigma_\varepsilon(\delta)}^{\sigma_\varepsilon(T)} \left| \frac{d}{d\xi} v_\varepsilon^j(\xi) \right|^2 d\xi \leq (\sqrt{2\sigma(\delta)})^{-1} \cdot C_2 + C_3, \quad (2.10)$$

$u_\varepsilon^j(t) = v_\varepsilon^j(\sigma_\varepsilon(t))$, $t \in]0, T[$ とすると, $u_\varepsilon^j(t)$ は初期値を u_j^0 とする (2.1) の一意的な str. sol. なることがわかる。 (2.10)

により次の評価をえる。

$$\int_0^T \left| \frac{d}{dt} u_\varepsilon^j(t) \right|^2 dt \leq (\sqrt{2\sigma(\delta)})^{-1} \cdot C_4 + C_5$$

Case [1] の結果により, u_j^0 を初期値 u_j^0 なる (2.1) の一意的な解とすると, $u_\varepsilon^j \rightarrow u^j$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ in $C([0, T]; H)$ 。Case [1] の最後の方で用いた論法により,

$$\int_0^T \left| \frac{d}{dt} u_j^0(\tau) \right|^2 d\tau \leq (\sqrt{2\sigma(\delta)})^{-1} \cdot C_4 + C_5 \quad (2.11)$$

とこる。Case [2] を思い出すと, u を (2.1) の weak sol. とすれば, $u_j^0 \rightarrow u$ as $j \rightarrow \infty$ in $C([0, T]; H)$ 。さらに (2.11) に注意すれば, 強い解にもなっていることがわかる。

(ii) $\delta_0 = \inf \{ \delta \in]0, T[: \int_0^\delta c(\tau) d\tau > 0 \} > 0$ の場合

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & 0 \leq t \leq \delta_0 \\ \text{(2.1) の weak sol} & \delta_0 \leq t \leq T \end{cases}$$

とおく。(i) の結果により $u(t)$ は (2.1) の p. str. sol. である。

以下の説明を簡単にする為に、 $E(f, u_0)$ により初期値問題

$$\frac{du}{dt} + \partial(c(t)\varphi + I_D)u \ni f, \quad u(0) = u_0$$

をあらわすことにする。

補題 2.2. $\forall f \in L^1(0, T; H), \forall u_0 \in \bar{D}$ に対して $E(f, u_0)$ の “弱い解” が存在する。

証明 $N = \{t \in]0, T[; c(t) = 0\}, P = \{t \in]0, T[; c(t) > 0\},$

$R = P \cup \text{int } N$ とおく。仮定 (A.3) により $\text{measure}([0, T] - R) = 0$

である。R は開集合であるから、R は高々可算の開集合の

disjoint sum としてあらわせる。ie. $\exists \{]a_i, b_i[\}_{i \geq 1},$

$R = \sum_{i \geq 1}]a_i, b_i[$ 。 $\{i\}$ が有限集合なら証明はより簡単になるのだから、 $\{i\}$ は無限集合として考える。 $\{f^i\}_{i \geq 1} \subset L^1(0, T; H)$ を

$$\begin{cases} f^i(t) = f(t) & ; \quad a_j + 2^{-i-1}(b_j - a_j) < t < b_j - 2^{-i-1}(b_j - a_j), j=1, 2, \dots, i \\ f^i(t) = 0 & ; \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.12)$$

で定義する。明らかに

$$f^i \rightarrow f \quad \text{as } i \rightarrow \infty \quad \text{in } L^1(0, T; H) \quad (2.13)$$

また、方程式

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial(c(t)\varphi + I_D)u(t) \ni f^i(t) \quad (2.14)$$

を考えよう。もし $]a_j, b_j[\subset P$ ならば $f^i(t)$ は a_j, b_j の近くで消えているので、補題 2.1. を適用でき、 $]a_j, b_j[\subset \text{int } N$

のときは (2.14) は、そこで

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial I_{\overline{D}} u(t) \ni f'(t)$$

となる。故に $E(f', u_0)$ の一意的な p. weak. sol が存在する。補題 1.2. により

$$|u^j(t) - u^k(t)| \leq \int_0^T |f^j(t) - f^k(t)| dt, \quad \forall j, k, \quad \forall t \in [0, T],$$

が成立する。したがって

$$\exists u \in C([0, T]; H) : u^i \rightarrow u \quad \text{as } i \rightarrow \infty \quad \text{in } C([0, T]; H), \quad (2.15)$$

補題 1.1. により, $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ に対して

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} (c(\tau) \varphi + I_{\overline{D}}) v(\tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} (c(\tau) \varphi + I_{\overline{D}}) u^i(\tau) d\tau \\ & \geq \int_{t_1}^{t_2} (f^i(\tau) - \frac{dv}{d\tau}(\tau), v(\tau) - u^i(\tau)) d\tau + \frac{1}{2} |v(t_2) - u^i(t_2)|^2 - \frac{1}{2} |v(t_1) - u(t_1)|^2 \\ & \quad \forall v \in W^{1,1}(t_1, t_2; \overline{D}) : (c(\tau) \varphi + I_{\overline{D}}) v(\tau) \in L^1(0, T). \end{aligned}$$

(2.13) と (2.15) により証明を完結する。

次に“弱い解”の一意性を保証する為には一つの補題を示す。

補題 2.3. $u, v \in C([0, T]; H)$ をそれぞれ $E(f, u(0)), E(g, v(0))$ の“弱い解”とすると, (1.3) と (1.4) と同じ不等式が成立する。

証明 $u_0 \in \overline{D}$ を固定して, $L^1(0, T; H)$ から $C([0, T]; H)$ への一価作用素 K_{u_0} を, $\forall f \in L^1(0, T; H)$ に対して, $K_{u_0} f =$ 補題 2.2. で実際に構成した“弱い解”として定義する。 $D(K_{u_0}) = L^1(0, T; H)$ 。今, $u_1 = K_{u_0} f_1$, $u_2 = K_{u_0} f_2$ とする。補題 2.2. の証明により, $\exists \{u_1^i\}_{i \geq 1}$, $\exists \{u_2^i\}_{i \geq 1}$;

u_p^i は $E(f_p^i, u_0)$ の p. weak. sol. である。 $u_p^i \rightarrow u_p$ as $i \rightarrow \infty$ in $C([0, T]; H)$ $p=1, 2$ 。 補題 1.2. により

$$|u_1^i(t) - u_2^i(t)| \leq \int_0^T |f_1^i(\tau) - f_2^i(\tau)| d\tau, \quad (2.16)$$

$i \rightarrow \infty$ とすれば、次の不等式を得る。

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \int_0^T |f_1(\tau) - f_2(\tau)| d\tau \quad \forall t \in [0, T].$$

故に K_{u_0} は $L^1(0, T; H)$ から $C([0, T]; H)$ への連続作用素である。

$\forall f \in L^1(0, T; H)$ に対して $M_{u_0} f$ により $E(f, u_0)$ の '弱い解' の集合をあらわす。このとき、次の関係が明らかに成立する。

$$D(K_{u_0}) = D(M_{u_0}) = L^1(0, T; H), \quad K_{u_0} \subset M_{u_0}.$$

ところが $M_{u_0} \subset K_{u_0}$ も成立する。実際、 $\forall [f, u_i] \in M_{u_0}, \forall [f, u] \in K_{u_0}$ をとって置く。 $\exists \{f_k\}_{k \geq 1} \subset L^2(0, T; H); f_k \rightarrow f$ as $k \rightarrow \infty$ in $L^2(0, T; H)$ 。 f^i を (2.12) と同じものとし、 f_k^i を (2.12) で f の代りに f_k とおいてつくられるものと定義する。補題 2.2. の証明によつて、 $\exists \{u_i^i\}_{i \geq 1}; u_i^i$ は $E(f^i, u_0)$ の p. weak. sol. かつ $u_i^i \rightarrow u$ as $i \rightarrow \infty$ in $C([0, T]; H)$ 。 しかも、 $\exists \{u_k^i\}_{i \geq 1, k \geq 1}; u_k^i$ は区間 $0 = t_0^{i,k} < t_1^{i,k} < \dots < t_{N_{i,k}}^{i,k} = T$ 上の $E(f_k^i, u_0)$ の p. str. sol. かつ $u_k^i \rightarrow u_i^i$ as $k \rightarrow \infty$ in $C([0, T]; H)$ 。 i, k を固定して、 p を $0 < p < 2^{-1} \min \{t_j^{i,k} - t_{j-1}^{i,k}; j=1, 2, \dots, N_{i,k}\}$ と取るようにとる。簡単の為に $t_j^{i,k}$ を t_j とかくと、次の不等式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{t_j+p}^{t_{j+1}-p} (C(\omega)\varphi + I\bar{b}) u_i(\sigma) d\sigma - \int_{t_j+p}^{t_{j+1}-p} (C(\omega)\varphi + I\bar{b}) u_k^i(\sigma) d\sigma \\ & \geq \int_{t_j+p}^{t_{j+1}-p} (f_k^i - \frac{d}{d\sigma} u_k^i, u_i - u_k^i) d\sigma, \quad j=0, 1, \dots, N_{i,k} \end{aligned} \quad (2.17)$$

一方 $[f_k^i, u_1] \in M_{u_0}$ であるから

$$\begin{aligned} & \int_{t_j+p}^{t_{j+1}-p} (c(\sigma)\varphi + I\overline{b}) u_k^i(\sigma) d\sigma - \int_{t_j+p}^{t_{j+1}-p} (c(\sigma)\varphi + I\overline{b}) u_1(\sigma) d\sigma \\ & \geq \int_{t_j+p}^{t_{j+1}-p} (f_1 - \frac{d}{d\sigma} u_k^i, u_k^i - u_1) d\sigma + \frac{1}{2} |u_k^i(t_{j+1}-p) - u_1(t_{j+1}-p)|^2 \\ & \quad - \frac{1}{2} |u_k^i(t_j+p) - u_1(t_j+p)|^2, \quad j=0, 1, \dots, N_{i,k}-1. \quad (2.18) \end{aligned}$$

(2.17) と (2.18) を加えて $\phi \rightarrow 0$ とすると

$$0 \geq \int_0^T (f_1 - f_k^i, u_k^i - u_1) dt + \frac{1}{2} |u_k^i(T) - u_1(T)|^2 - \frac{1}{2} |u_k^i(0) - u_1(0)|^2$$

となるので、 $i \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$ とすると

$$\int_0^T (f - f_1, u - u_1) dt \geq 0 \quad \forall [f, u] \in K_{u_0}, \forall [f_1, u_1] \in M_{u_0}. \quad (2.19)$$

を得る。ここで特に $f = (1-\theta)f_1 + \theta h, 0 < \theta < 1, h \in L^1(0, T; H)$

とおいて、 $\theta \rightarrow 0$ とすると、 K_{u_0} の連続性により、

$$\int_0^T (h - f_1, K_{u_0} f_1 - u_1) dt \geq 0, \quad \forall h \in L^1(0, T; H).$$

故に $K_{u_0} f_1 = u_1$ 、よって $M_{u_0} \subset K_{u_0}$ が示された。故

に $K_{u_0} = M_{u_0}$ 。 $[f, u] \in K_{u_0}, [g, v] \in K_{v_0}$ に対して (1.3),

(1.4) と同じ不等式が成立することは容易に分るので証明終。

§3. 定理の証明

補題 3.1. $\forall f \in L^1(0, T; H), \forall u_0 \in \overline{D}$ に対して (0.1) の“弱い解”が一意的に存在する。

証明 $\exists \{f_k\}_{k \geq 1} \subset L^2(0, T; H); f_k \rightarrow f$ as $k \rightarrow \infty$ in $L^1(0, T; H)$
 $\{f_k^i\}_{k \geq 1, i \geq 1}$ を (2.12) で f の代りに f_k とおいたものとして定義
 する。 $\{t_p^n\}_{p=0, 1, \dots, 2^n}$ を $[0, T]$ の分割で $t_p^n = 2^{-n} p \cdot T$ なるもので

$$\varphi_n^t(u) = \varphi_p^t(u) \quad \text{for } t_p^n \leq t < t_{p+1} \quad p=0,1,\dots,2^n-1.$$

として $\varphi_n^t(\cdot)$ を定義する。 $u_n(t)$, $t_p^n \leq t < t_{p+1}$, $p=0,1,\dots,2^n-1$ を

$$\frac{d}{dt} u_n(t) + \partial(c(t)\varphi_n^t + I_D) u_n(t) \ni f(t)$$

$$u_n(t_p^n) = \begin{cases} u_0 & \text{if } p=0 \\ u_n(t) (t_{p-1}^n \leq t \leq t_p^n) \text{ の } t=t_p^n \text{ での値, if } p=1,\dots,2^n-1 \end{cases}$$

の一意的な“弱い解”として定義する。補題2.2, 2.3. により

$\{u_n\}_{n \geq 1}$ は矛盾なく定義できる。簡単の爲に $u_n = S_n(f, u_0)$ と

かく。 $\{u_{n,k}\}_{n \geq 1, k \geq 1}$, $\{u_{n,k}^i\}_{n \geq 1, k \geq 1, i \geq 1}$ をそれぞれ $u_{n,k}$

$= S_n(f_k, u_0)$, $u_{n,k}^i = S_n(f_k^i, u_0)$ として定義する。補題2.1. により,

$u_{n,k}^i$, $t_p^n \leq t \leq t_{p+1}^n$, は

$$\frac{d}{dt} u_{n,k}^i(t) + \partial(c(t)\varphi_n^t + I_D) u_{n,k}^i(t) \ni f_k^i(t)$$

の p. str. sol. となる。補題2.3. により,

$$|u_{n,k}^i(t) - u_{n,k}(t)| \leq \int_0^T |f_k^i - f_k| d\sigma, \quad \forall t \in [0, T]$$

なるから, $u_{n,k}^i \rightarrow u_{n,k}$ as $i \rightarrow \infty$ in $C([0, T]; H)$ となる。

同様にして, $u_{n,k} \rightarrow u_n$ as $k \rightarrow \infty$ in $C([0, T]; H)$ となる。

$v \in D$ にとると

$$\begin{aligned} & (c(t)\varphi_n^t + I_D)v - (c(t)\varphi_n^t + I_D)u_{n,k}^i \\ & \geq (f_k^i - \frac{d}{dt} u_{n,k}, v - u_{n,k}^i) = (f_k^i, v - u_{n,k}^i) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v - u_{n,k}^i|^2 \\ & \quad \text{a.e. on }]0, T[. \quad (3.1) \end{aligned}$$

$u_{n,k}^i$ は連続かつ、区分的に絶対連続であることと,

$$\exists a_1 > 0, \exists a_2 > 0 \quad ; \quad \varphi^t u \geq -a_1 |u| - a_2, \quad \forall u \in H, \forall t \in [0, T]$$

であること ([2] を参照) により, (3.1) から次の不等式を得る。ただし, 以下現れる定数 C_1, C_2, C_3 は n, k, i, m, t_1, t_2, T , などには依存しない定数であらわす。

$$|u_{n,k}^i(t)| \leq C_1. \quad (3.2)$$

(3.1) と (3.2) により,

$$\int_{t_1}^{t_2} (c(\sigma) \varphi_n^\sigma + I_D) u_{n,k}^i(\sigma) d\sigma \leq C_2. \quad (3.3)$$

$u_{m,k}^i, u_{n,k}^i$ ($m \geq n$) は p. str. sol であるから

$$\begin{aligned} & (c(\sigma) \varphi_n^\sigma + I_D) u_{m,k}^i - (c(\sigma) \varphi_n^\sigma + I_D) u_{n,k}^i \\ & \geq (f_k^i - \frac{d}{d\sigma} u_{n,k}^i, u_{m,k}^i - u_{n,k}^i) \\ & (c(\sigma) \varphi_m^\sigma + I_D) u_{n,k}^i - (c(\sigma) \varphi_m^\sigma + I_D) u_{m,k}^i \\ & \geq (f_k^i - \frac{d}{d\sigma} u_{m,k}^i, u_{n,k}^i - u_{m,k}^i) \quad \text{a.e on }]0, T[. \end{aligned}$$

これら 2 つの不等式を加えて, $[0, t]$ 上で積分すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \{ (c(\sigma) \varphi_n^\sigma + I_D) u_{m,k}^i(\sigma) - (c(\sigma) \varphi_m^\sigma + I_D) u_{m,k}^i(\sigma) \} d\sigma \\ & + \int_0^t \{ (c(\sigma) \varphi_m^\sigma + I_D) u_{n,k}^i(\sigma) - (c(\sigma) \varphi_n^\sigma + I_D) u_{n,k}^i(\sigma) \} d\sigma \\ & \geq \frac{1}{2} |u_{m,k}^i(t) - u_{n,k}^i(t)|^2, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.4)$$

(3.2), (3.3), (3.4). と (A-2) により, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, n_0 を十分大にとれば, 次の不等式をえる。

$$|u_{m,k}^i(t) - u_{n,k}^i(t)| \leq \sqrt{\varepsilon} C_3, \quad \forall m \geq n \geq n_0, \quad \forall t \in [0, T],$$

故に, $i \rightarrow \infty, K \rightarrow \infty$ として

$$|u_m(t) - u_n(t)| \leq \sqrt{\varepsilon} C_3, \quad \forall m \geq n \geq n_0, \quad \forall t \in [0, T]$$

故に, $\exists u \in C([0, T]; H)$;

$$u_n \rightarrow u \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{in } C([0, T]; H) \quad (3.6)$$

(3.2) と (3.3) により

$$|u_n(t)| \leq C_1, \quad \forall n, t \in [0, T] \quad (3.7)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (c(\sigma) \varphi_n^\sigma + I_{\bar{D}}) u_n(\sigma) d\sigma \leq C_2, \quad \forall n, \forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T. \quad (3.8)$$

したがって, $u_n(t) \in C([0, T]; \bar{D})$, $(c(t) \varphi_n^t + I_{\bar{D}}) u_n(t) \in L^1(0, T)$

であり, 任意の $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ に対して

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} (c(\sigma) \varphi_n^\sigma + I_{\bar{D}}) v(\sigma) d\sigma - \int_{t_1}^{t_2} (c(\sigma) \varphi_n^\sigma + I_{\bar{D}}) u_n(\sigma) d\sigma \\ & \geq \int_{t_1}^{t_2} (f(\sigma) - \frac{dv}{d\sigma}(\sigma), v(\sigma) - u_n(\sigma)) d\sigma + \frac{1}{2} |v(t_2) - u_n(t_2)|^2 - \frac{1}{2} |v(t_1) - u_n(t_1)|^2 \\ & \quad \forall v \in W^{1,1}([t_1, t_2]; \bar{D}) : (c(t) \varphi^t + I_{\bar{D}}) v(t) \in L^1(t_1, t_2; H). \end{aligned}$$

(3.6), (3.7), (3.8) と (A-2) を使って, $n \rightarrow \infty$ としてみれば
“弱い解”の存在がわかる。

“弱い解”の一意性は次の補題からわかる。

補題 3.2. $f, g \in L^1(0, T; H)$ とし, u, v をそれぞれ (1.1), (1.2) の“弱い解”とすると, (1.4), (1.5) と同じ不等式が成立する。

証明 $u_0 \in \bar{D}$ を固定して, $L^1(0, T; H)$ から $C([0, T]; H) \wedge$ の一価作用素 K_{u_0} を, $\forall f \in L^1(0, T; H)$ に対して, $K_{u_0} f =$ 補題 3.1. で実際に構成した“弱い解”として定義する。 $D(K_{u_0}) = L^1(0, T; H)$ 。
補題 2.3. により, 補題 2.3. の証明と同様にして, K_{u_0} が連続作用素なることがわかる。 $\forall f \in L^1(0, T; H)$ に対して, $M_{u_0} f$

により (*) の "弱い解" の集合をあらわすことにする。このとき,

$$D(K_{u_0}) = D(M_{u_0}) = L^1(0, T; H), \quad K_{u_0} \subset M_{u_0}.$$

補題 2.3. の証明と同様に, 補題 3.1. で実際に構成された "弱い解" は φ , str. sol. で近似されるということと, (A-2) を使えば,

$$\int_0^T (f - f_1, u - u_1) d\sigma \geq 0, \quad \forall [f, u] \in K_{u_0}, \forall [f_1, u_1] \in M_{u_0}$$

がわかる。以下補題 2.3. の最後の部分と同様にして結論をうる。

文 献

- [1] H. Brézis : Opérateurs maximaux monotone, North-Holland (1973).
- [2] H. Attouch et Damlamian : Problèmes d'évolution dans Les Hilbert et application, J. Math. pure. et appl., 54 (1975) 53-74.
- [3] N. Kenmochi and T. Nagai : Weak solutions for certain nonlinear time-dependent parabolic variational inequalities, Hiroshima Math. J., 5, (1975), 525-535.
- [4] K. Maruo : On some evolution equations of sub-differential operators, Proc. Japan Acad., 51 (1975) 304-307.

- [5] J. Watanabe : On certain nonlinear evolution equations,
J. Math. Soc. Japan., 25 (1973), 446-463.
- [6] A. Friedman and Skuss : Degenerate evolution
equations in Hilbert space, Trans. Amer. Math.
Soc., 161 (1971), 401-427.