

離散群の素元の分解密度, および, ‘部分’セルバー グゼータ関数

橋本康史 (九州大学)

Yasushi Hashimoto, Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1 Introduction

$\mathbb{H}$ を複素上半平面 $\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$ とし, Γ を $X_\Gamma := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ の面積が有限になるような $SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群とする. そして, $\text{Prim}(\Gamma)$ を Γ の素な双曲的共役類のなす集合とし, $\gamma \in \text{Prim}(\Gamma)$ のノルム $N(\gamma)$ を γ の固有値の大きいほうの 2 乗とする. このとき, 以下の素元定理とよばれる漸近公式がよく知られている.

$$\pi_\Gamma(x) := \#\{\gamma \in \text{Prim}(\Gamma) | N(\gamma) < x\} = \text{li}(x) + O(x^\delta) \quad \text{as } x \rightarrow \infty.$$

ここで, $\text{li}(x) := \int_2^x 1/\log t dt$, δ は Γ によって定まる $0 < \delta < 1$ なる定数である. 本稿の目的は, 「素元の分解密度」という, 素元定理のひとつの精密化というべき漸近公式を得ることにある. 以下で, 具体的に「素元の分解」といった言葉の定義や, 問題の定式化を行う.

まず, $\tilde{\Gamma}$ を Γ の指数有限な部分群とし, その指数を n と書く. そして, X_Γ を $X_{\tilde{\Gamma}}$ の有限被覆になっているとし, ϕ を $X_{\tilde{\Gamma}}$ から X_Γ への自然な射影とする. また, C_γ を $\gamma \in \text{Prim}(\Gamma)$ に対応する X_Γ の素な測地線とし, $l(\gamma)$ を C_γ の長さ ($N(\gamma) = \exp l(\gamma)$) とする. このとき, 与えられた $\gamma \in \text{Prim}(\Gamma)$ に対して, ある $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \text{Prim}(\tilde{\Gamma})$ と n の k 個の分割 $(m_1, \dots, m_k)$ が存在し (ただし, $m_1 \geq \dots \geq m_k \geq 1$),

$$\phi(C_{\gamma_j}) = C_\gamma, \quad l(\gamma_j) = m_j l(\gamma) \quad (N(\gamma_j) = N(\gamma)^{m_j})$$

が成り立つ. このとき, γ を $\tilde{\Gamma}$ 上 $(m_1, \dots, m_k)$ 型に分解する Γ の素元 (または, C_γ を $X_{\tilde{\Gamma}}$ 上 $(m_1, \dots, m_k)$ 型に分解する X_Γ の素測地線) とよぶことにする. このとき, 次の問題が考えられる.

Problem 1.1. 与えられた $\lambda \vdash n$ に対して, 次の漸近評価を求めよ.

$$\pi_{\tilde{\Gamma}\backslash\Gamma}^\lambda(x) := \#\{\gamma \in \text{Prim}(\Gamma) | \gamma \text{ は } \tilde{\Gamma} \text{ 上 } \lambda \text{ 型}, N(\gamma) < x\}.$$

これが、本稿における主目的となる問題であり、実際に Section 2 では、一般論によるこの問題へのアプローチ、Section 3 では、合同部分群の場合の具体的な計算を行う。また、関連問題として、Section 4 において、部分セルバーグゼータ関数とよばれる関数の解析性に関する考察も記す。

なお、本稿の内容は若山正人氏（九州大学）との共同研究 [HW] の結果に基くものである。

2 一般論からわかること

まず、いくつか記号を定義する。

Γ' : $\tilde{\Gamma}$ に含まれる Γ の極大な正規部分群,

$\Xi := \Gamma/\Gamma'$, $\Psi := \tilde{\Gamma}/\Gamma'$,

$M(\gamma) := \min\{m \geq 1 | \gamma^m \in \Gamma'\}$,

$A_{\Gamma' \uparrow \Gamma} := \{M(\gamma) | \gamma \in \Gamma\} \subset \mathbb{N}$.

まず、素元の分解の型の表現論的な導き方を挙げる。

Lemma 2.1. ([HW]) σ を Ξ の Ξ/Ψ への置換表現とする ($\sigma \cong \text{Ind}_{\Gamma}^{\Xi} 1$)。ここで、 $\lambda := (m_1, \dots, m_k) \vdash n$, $\gamma \in \text{Prim}(\Gamma)$ に対して、 $\sigma(\gamma)$ が $m_i \times m_i$ 行列

$$S_{m_i} = \begin{cases} 1 & (m_i = 1), \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & (m_i \geq 2). \end{cases}$$

を使って

$$\sigma(\gamma) \sim \begin{pmatrix} S_{m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & S_{m_k} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

とあらわせるとき、 $\sigma(\gamma)$ は λ 型であるということにする。このとき、次は同値である。

(i) $\sigma(\gamma)$ は λ 型.

(ii) $\gamma \in \text{Prim}(\Gamma)$ は $\tilde{\Gamma}$ 上 λ 型. □

また、密度分布に関しては次の重要な公式が知られている。

Proposition 2.2. (Chebotarev型密度分布定理, $[Sa]$, $[Su]$) $\text{Conj}(\Xi)$ を Ξ の共役類のなす集合とする. このとき, 各共役類 $[g] \in \text{Conj}(\Xi)$ に対して次が成り立つ.

$$\#\{\gamma \in \text{Prim}(\Gamma) \mid \gamma\Gamma' = [g], N(\gamma) < x\} = \frac{\#[g]}{|\Xi|} \text{li}(x) + O(x^\delta) \quad \text{as } x \rightarrow \infty.$$

□

Lemma 2.1 と Proposition 2.2 から, 分解密度が次の手順で求められることがわかる.

1. $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ に対して, Γ' を決定する ($\Gamma' = \cap_{\gamma \in \tilde{\Gamma} \setminus \Gamma} \gamma^{-1} \tilde{\Gamma} \gamma$).
2. Ξ の元を共役類で分類する.
3. 各共役類の代表元 γ に対して置換表現 $\sigma(\gamma)$ を計算し, γ の $\tilde{\Gamma}$ での型を決定する.
4. 同じ型をもつ共役類を全て集めて, それらの共役類の個数の総和を求める. この総和と $|\Xi|$ の比が, 素元全体の中で, その型をもつ素元の占める割合に相当する.

以上より, 一般の $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ に対しては次のことがわかる.

Theorem 2.3. $\gamma \in \Gamma$ に対して, $M(\gamma) := \min\{m \geq 1 \mid \gamma^m \in \Gamma'\}$ とする. また, $A_{\Gamma' \uparrow \Gamma} := \{M(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \subset \mathbb{N}$, $\Lambda := \{(m_1, m_2, \dots, m_k) \vdash n \mid \exists M \in A_{\Gamma' \uparrow \Gamma}, \forall m_i \mid M\}$ とする. このとき, $\lambda \in \Lambda$ に対して, 次が成り立つ.

$$\pi_{\tilde{\Gamma} \uparrow \Gamma}^\lambda(x) = \left(\sum_{\substack{[\gamma] \in \text{Conj}(\Xi), \\ [\gamma] \text{ is } \lambda\text{-type in } \tilde{\Gamma}}} \frac{\#[\gamma]}{|\Xi|} \right) \text{li}(x) + O(x^\delta) \quad \text{as } x \rightarrow \infty.$$

また, $\lambda \notin \Lambda$ に対して, $\pi_{\tilde{\Gamma} \uparrow \Gamma}^\lambda(x) = 0$ である.

Proof. $\gamma \in \text{Prim}(\Gamma)$ が $\tilde{\Gamma}$ 上 $(1^{l_1} 2^{l_2} \dots n^{l_n})$ 型であるとする. すると, Lemma 2.1 から, $\sigma(\gamma)$ も $(1^{l_1} 2^{l_2} \dots n^{l_n})$ 型である. $\sigma(\gamma^{M(\gamma)}) = \text{Id}$ なので, $j \nmid M(\gamma)$ に対して $l_j = 0$ である. なので, $\lambda \notin \Lambda$ に対して, $\pi_{\tilde{\Gamma} \uparrow \Gamma}^\lambda(x) = 0$ である. $\lambda \notin \Lambda$ の場合の結果については, Proposition 2.2 から容易に得られる. □

Theorem 2.3 の結果において, $\lambda \notin \Lambda$ のときは必ず $\pi_{\tilde{\Gamma} \uparrow \Gamma}^\lambda(x) = 0$ であることはわかったが, $\lambda \in \Lambda$ のときに, 必ずしも, $\pi_{\tilde{\Gamma} \uparrow \Gamma}^\lambda(x)$ が正になるとは限らない (実際に, 零になる場合も多くある). ただし, どの $\lambda \in \Lambda$ に対して正になるか零になるか, といったことは, 今のところは, 以下の $\tilde{\Gamma}$ が Γ の正規部分群であるとき ($\tilde{\Gamma} = \Gamma'$) を除いては詳しくわかっていない.

Theorem 2.4. $\tilde{\Gamma}$ が Γ の正規部分群であるとき, $\lambda = \lambda(m) = (m^{n/m})$ ($m \in A_{\Gamma' \uparrow \Gamma}$) に対して

$$\pi_{\tilde{\Gamma} \uparrow \Gamma}^\lambda(x) = \left(\sum_{\substack{[g] \in \text{Conj}(\Xi), \\ M([g])=m}} \frac{\#[g]}{|\Xi|} \right) \text{li}(x) + O(x^\delta) \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

である. それ以外の $\lambda \vdash n$ に対しては $\pi_{\tilde{\Gamma} \uparrow \Gamma}^\lambda(x) = 0$ である.

Proof. $\tilde{\Gamma} = \Gamma'$ なので, $\Xi/\Psi = \Xi/\{e\} = \Xi$ である. 今, $\gamma \in \Xi$ に対して, $\gamma^l g = g$ なる $g \in \Xi$ と $l < M(\gamma)$ が存在すると仮定すると, $\gamma^l = e$ なので, $M(\gamma)$ の最小性に矛盾する. ということは, 任意の g に対して, $\sigma(g) = (m^{n/m})$ ($m \in A_{\Gamma' \uparrow \Gamma}$) しか現れない. なので, あとは Proposition 2.2 を適用するとよい. $\square$

3 $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群の場合

この節では, Γ が $SL_2(\mathbb{Z})$, $\tilde{\Gamma}$ が以下で定義される合同部分群である場合について考える.

$$\Gamma_0(N) := \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma_{21} \equiv 0 \pmod{N}\},$$

$$\Gamma_1(N) := \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma_{11} \equiv \gamma_{22} \equiv \pm 1, \gamma_{21} \equiv 0 \pmod{N}\},$$

$$\Gamma(N) := \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma_{11} \equiv \gamma_{22} \equiv \pm 1, \gamma_{12} \equiv \gamma_{21} \equiv 0 \pmod{N}\}.$$

ここで, N は自然数である. 簡単のため, 本稿では $N = p$ (奇素数) の場合のみを扱うことにする (一般の N については [HW] を参照). このとき, $\Xi = SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $|\Xi| = p(p^2-1)/2$, $A_{\Gamma(p) \uparrow SL_2(\mathbb{Z})} = \{p, (p \pm 1)/2 \text{ の約数}\}$, そして,

$$n = \begin{cases} (p+1) & (\tilde{\Gamma} = \Gamma_0(p^r)), \\ (p^2-1)/2 & (\tilde{\Gamma} = \Gamma_1(p^r)), \\ |\Xi| & (\tilde{\Gamma} = \Gamma(p^r)) \end{cases}$$

である. この場合には, 次の結果が得られている.

Theorem 3.1. p を奇素数とし, 分割 $\lambda_0^p(m), \lambda_1^p(m), \lambda^p(m)$ を

$$\lambda_0^p(m) := \begin{cases} (1^{(p+1)}) & (m=1), \\ (m^{(p-1)/m}, 1^2) & (m \mid \frac{p-1}{2}, m > 1), \\ (p, 1) & (m=p), \\ (m^{(p+1)/m}) & (m \mid \frac{p+1}{2}, m > 1), \end{cases}$$

$$\lambda_1^p(m) := \begin{cases} (1^{(p^2-1)/2}) & (m=1), \\ (p^{(p-1)/2}, 1^{(p-1)/2}) & (m=p), \\ (m^{(p+1)/m}) & (m \mid \frac{p+1}{2}, m > 1), \end{cases}$$

$$\lambda^p(m) = (m^{|\Xi|/m})$$

で定義する. このとき, 次が成り立つ.

$$\mu_{\Gamma_0(p) \uparrow SL_2(\mathbb{Z})}^{\lambda_0(m)} = \mu_{\Gamma_1(p) \uparrow SL_2(\mathbb{Z})}^{\lambda_1(m)} = \mu_{\Gamma(p) \uparrow SL_2(\mathbb{Z})}^{\lambda(m)} = \begin{cases} \frac{2}{p(p^2-1)} & (m=1), \\ \frac{2}{p} & (m=p), \\ \frac{\varphi(m)}{p-1} & (m|\frac{p-1}{2}, m>1), \\ \frac{\varphi(m)}{p+1} & (m|\frac{p+1}{2}, m>1). \end{cases}$$

ここで, $\mu_{\Gamma \uparrow \Gamma}^{\lambda} := \lim_{x \rightarrow \infty} \pi_{\Gamma \uparrow \Gamma}^{\lambda}(x) / \pi_{\Gamma}(x)$, $\varphi(m) := \#\{1 \leq l \leq m-1 \mid \gcd(l, m) = 1\}$ はオイラー関数である. このほかの $\lambda \vdash n$ に関しては, $\pi_{\Gamma \uparrow SL_2(\mathbb{Z})}^{\lambda}(x) = 0$ である.

定理 3.1 の証明のために, まず, Ξ の共役類を決定しなくてはならないが, $\Xi = SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ に関しては, 次のような共役類の分類が得られている ([Di] の第 7 章参照).

Lemma 3.2. $SL_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) - \{I\}$ の元は次のいずれかの元と共役である.

γ	$\text{ord } \gamma$	$\#[\gamma]$
$\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}^{s(p-1)/l}$	$l \mid \frac{p-1}{2} (l > 1), s \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*$,	$l \quad \frac{1}{2}p(p+1)$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	---	$p \quad \frac{1}{2}(p^2-1)$
$\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	---	$p \quad \frac{1}{2}(p^2-1)$
$J^{-1} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}^{s(p+1)/l}$	$J \quad l \mid \frac{p+1}{2} (l > 1), s \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*$,	$l \quad \frac{1}{2}p(p-1).$

ここで, δ は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ の生成元, ν は p の平方非剰余, ω は $\omega^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$ をみたす数 ($\omega \neq 1$), J は

$$J^{-1} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} J \in SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

をみたす二次正方行列である. □

ここで、次の Ξ の部分集合を定義する.

$$\begin{aligned} A_l &:= \bigcup_{s \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*} \left[\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}^{s(p-1)/l} \right] \quad (l \mid \frac{p-1}{2}, l > 1), \\ B &:= \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cup \left[\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \\ C_l &:= \bigcup_{s \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*} \left[J^{-1} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}^{s(p+1)/l} J \right] \quad (l \mid \frac{p+1}{2}, l > 1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

このとき、以下の Lemma が成り立つ.

Lemma 3.3. $([H])$ p を奇素数, $\sigma(\gamma, \Gamma) := \left(\text{Ind}_{\Gamma}^{SL_2(\mathbb{Z})} 1 \right)(\gamma)$ とする. このとき、次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \text{tr} \sigma(\gamma, \Gamma_0(p)) &= \begin{cases} (p+1) & (\gamma \in \Gamma(p)), \\ 2 & (\gamma \in A_l), \\ 1 & (\gamma \in B), \\ 0 & (\gamma \in C_l), \end{cases} \\ \text{tr} \sigma(\gamma, \Gamma_1(p)) &= \begin{cases} \frac{1}{2}(p^2-1) & (\gamma \in \Gamma(p)), \\ \frac{1}{2}(p-1) & (\gamma \in B), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \\ \text{tr} \sigma(\gamma, \Gamma(p)) &= \begin{cases} \frac{1}{2}p(p^2-1) & (\gamma \in \Gamma(p)), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \end{aligned}$$

□

Lemma 3.3 を用いると、次の Lemma を証明することができる.

Lemma 3.4. $m = 1, p$, または, $(p \pm 1)/2$ の約数とする. このとき、以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\gamma \text{ は } \Gamma_0(p) \text{ 上 } \lambda_0^p(m) \text{ 型} \Leftrightarrow \gamma \text{ は } \Gamma_1(p) \text{ 上 } \lambda_1^p(m) \text{ 型} \Leftrightarrow \gamma \text{ は } \Gamma(p) \text{ 上 } \lambda^p(m) \text{ 型} \\ &\Leftrightarrow M(\gamma) = m \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma \in \Gamma(p) & (m = 1), \\ \gamma \in A_m & (m \mid (p-1)/2, m > 1), \\ \gamma \in B & (m = p), \\ \gamma \in C_m & (m \mid (p+1)/2, m > 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Proof. Lemma 2.1 より, γ が $\tilde{\Gamma}$ 上 $(1^{l_1} 2^{l_2} \dots n^{l_n})$ 型 のとき, $\text{tr} \sigma(\gamma^m) = \sum_{j|m} j l_j$ なので, l_j たちは次のように計算される.

$$j l_j = \text{tr} \sigma(\gamma^j, \tilde{\Gamma}) - \sum_{p|j} \text{tr} \sigma(\gamma^{j/p}, \tilde{\Gamma}). \quad (3.2)$$

$j_1 = \text{tr} \sigma(\gamma, \tilde{\Gamma})$ なので, Lemma 3.3 と (3.2) を使って実際に計算すると, Lemma 3.4 の結果を得ることができる. $\square$

あとは, Lemma 3.4 を第 2 節の結果に適用してやると, Theorem 3.1 を導くことができる.

Remark 3.5. 合同部分群の階数が素数ではなく, もっと一般の, とくに平方因子を含む場合には, Ξ の群構造が複雑になるため, Lemma 3.4 のような同値関係は成り立たない. 本稿では, 素数の場合以外は省略するが, 詳しい計算結果に関しては [HW] を参照していただきたい.

4 部分セルバーグゼータ関数の解析性

セルバーグゼータ関数 $\zeta_{\Gamma}(s)$ を次で定義する.

$$\zeta_{\Gamma}(s) := \prod_{\gamma \in \text{Prim}(\Gamma)} (1 - N(\gamma)^{-s})^{-1} \quad \Re s > 1.$$

ここで, $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ とすると, Venkov-Zograf の公式 ([VZ]) から, $\tilde{\Gamma}$ に関するセルバーグゼータ関数は次のようにあらわすことができる.

$$\begin{aligned} \zeta_{\tilde{\Gamma}}(s) &= \prod_{\gamma \in \text{Prim}(\Gamma)} \det (\text{Id} - \sigma(\gamma, \tilde{\Gamma}) N(\gamma)^{-s})^{-1} \\ &= \prod_{\lambda \vdash n} \prod_{\substack{\gamma \in \text{Prim}(\Gamma) \\ \gamma \text{ は } \tilde{\Gamma} \text{ 上 } \lambda \text{ 型}}} \det (\text{Id} - \sigma(\gamma, \tilde{\Gamma}) N(\gamma)^{-s})^{-1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

とくに, $\lambda \vdash n$ に関するセルバーグ型のゼータ関数を

$$\zeta_{\tilde{\Gamma} \uparrow \Gamma}^{\lambda}(s) := \prod_{\substack{\gamma \in \text{Prim}(\Gamma) \\ \gamma \text{ は } \tilde{\Gamma} \text{ 上 } \lambda \text{ 型}}} (1 - N(\gamma)^{-s})^{-1} \quad \Re s > 1$$

と定義しておくと, Lemma 2.1 より

$$\zeta_{\tilde{\Gamma}}(s) = \prod_{\lambda = (m_1, \dots, m_k) \vdash n} \zeta_{\tilde{\Gamma} \uparrow \Gamma}^{\lambda}(m_1 s) \cdots \zeta_{\tilde{\Gamma} \uparrow \Gamma}^{\lambda}(m_k s) \quad (4.2)$$

と書けることがわかる. この素元の部分積によって定義される $\zeta_{\tilde{\Gamma}\uparrow\Gamma}^{\lambda}(s)$ の性質に関しては, 今のところ一般的なことは詳しくわかっていないが, $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma_1(p), \Gamma(p)$ の場合には以下の結果を得ることができた.

まず, Lemma 3.4 より,

$$\zeta_{\Gamma_1(p)\uparrow SL_2(\mathbb{Z})}^{\lambda_1^p(m)}(s) = \zeta_{\Gamma(p)\uparrow SL_2(\mathbb{Z})}^{\lambda^p(m)}(s) = \prod_{\substack{\gamma \in \text{Prim}(\Gamma) \\ M(\gamma)=m}} (1 - N(\gamma)^{-s})^{-1}$$

が成り立つので, 簡単のため, ここでは上の関数を $\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,m)}(s)$ と書くことにする. このとき, $\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(s)$ は次の性質をみたす.

Proposition 4.1. p を奇素数とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\left\{ \frac{(\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(s))^p}{\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(ps)} \right\}^{\frac{p-1}{2}} = \frac{(\zeta_{\Gamma_1(p)}(s))^p}{\zeta_{\Gamma(p)}(s)}. \quad (4.3)$$

さらに, $r \geq 1$ に対して, $(\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(s))^{p^r(p-1)/2}$ は $\Re s > 1/p^r$ 上で有理関数として解析接続される. また, $\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(s)$ は $s = 0$ の近くで, 無限個の特異点をもつ.

Proof. (4.2) と Lemma 3.4 から, 次がわかる.

$$\begin{aligned} \zeta_{\Gamma(p)}(s) &= \left(\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,1)}(s) \right)^{\frac{1}{2}p(p^2-1)} \left(\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(ps) \right)^{\frac{1}{2}(p^2-1)} \\ &\quad \times \prod_{m|\frac{p^2-1}{2}, m>1} \left(\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,m)}(ms) \right)^{\frac{p(p^2-1)}{2m}}, \\ \zeta_{\Gamma_1(p)}(s) &= \left(\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,1)}(s) \right)^{\frac{1}{2}(p^2-1)} \left(\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(s) \times \zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(ps) \right)^{\frac{1}{2}(p-1)} \\ &\quad \times \prod_{m|\frac{p^2-1}{2}, m>1} \left(\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,m)}(ms) \right)^{\frac{(p^2-1)}{2m}}. \end{aligned}$$

なので, 実際に比をとることで(4.3)は容易に証明される.

次に, $\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(s)$ の解析性についてみていこう. セルバーグゼータ関数 $\zeta_{\Gamma}(s)$ は $\Re s > 1$ で絶対収束しており, また, 全複素平面で有理型に解析接続される. とくに, $\Re s = 1$ では 1 位の零点 $s = 1$ を除いて特異点をもたないことが知られている ([He]). なので, (4.3) と $\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(ps)$ が $\Re s > 1/p$ 上で絶対収束していることから, $(\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(s))^{p(p-1)/2}$ は $\Re s > 1/p$

上で有理型に解析接続される. また, (4.3) の両辺の p^{r-1} 乗をとると,

$$\begin{aligned}
 (\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(s))^{p^r(p-1)/2} &= (\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(ps))^{p^{r-1}(p-1)/2} \left\{ \frac{(\zeta_{\Gamma_1(p)}(s))^p}{\zeta_{\Gamma(p)}(s)} \right\}^{p^{r-1}} \\
 &= (\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(p^2s))^{p^{r-2}(p-1)/2} \left\{ \frac{(\zeta_{\Gamma_1(p)}(ps))^p}{\zeta_{\Gamma(p)}(ps)} \right\}^{p^{r-2}} \left\{ \frac{(\zeta_{\Gamma_1(p)}(s))^p}{\zeta_{\Gamma(p)}(s)} \right\}^{p^{r-1}} \\
 &= \dots \\
 &= (\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(p^r s))^{(p-1)/2} \prod_{k=1}^r \left\{ \frac{(\zeta_{\Gamma_1(p)}(p^k s))^p}{\zeta_{\Gamma(p)}(p^k s)} \right\}^{p^{r-k}}. \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

となる. $\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(p^r s)$ は $\Re s > 1/p^r$ 上で絶対収束しているので, $(\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(s))^{p^r(p-1)/2}$ の $\Re s > 1/p^r$ 上での解析接続が得られる.

$\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(s)$ が $s = 0$ の近くで, 無限個の特異点をもつことも, 本質的に(4.4) から証明することができる. $\square$

Remark 4.2. Proposition 4.1 では, $\zeta_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(p,p)}(s)$ の右半平面 $\Re s > 0$ での解析接続が得られた. 左半平面 $\Re s \leq 0$ へ解析接続の可能性に関しては, $\Re s = 0$ で自然境界をもつ (つまり, 解析接続は不可能) と思われる. ただし, 証明には, 非自明零点の分布に関するある程度詳しい情報が必要であるため, 今の段階では「わからない」と言わざるを得ない状況にある.

参考文献

- [Di] L. E. Dickson, *Linear Groups: With an Exposition of the Galois Field Theory*, Dover Phoenix Editions, Dover Publications, Inc., New York (1955).
- [G] C. F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Fleischer, Leipzig, (1801).
- [H] Y. Hashimoto, *Arithmetic expressions of Selberg's zeta functions for congruence subgroups*, math.RT/0409101.
- [HW] Y. Hashimoto and M. Wakayama, *Splitting density for lifting about discrete groups*, math.NT/0501284.
- [He] D. Hejhal, *The Selberg trace formula of $PSL(2, \mathbb{R})$ I, II*, Springer Lec. Notes in Math. **548**, 1001 Springer-Verlag, (1976, 1983).
- [Sa] P. Sarnak, *Class numbers of indefinite binary quadratic forms*, J. Number Theory **15**(1982), 229–247.

- [Se] A. Selberg, *Collected Papers I*, Springer-Verlag (1989).
- [Su] T. Sunada, *L-functions in geometry and some applications*, Curvature and topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985), 266–284, Lecture Notes in Math., **1201**, Springer, Berlin (1986).
- [VZ] A. B. Venkov and P. G. Zograf, *Analogues of Artin's factorization formulas in the spectral theory of automorphic functions associated with induced representations of Fuchsian groups.*, Math. USSR Izvestiya, **21**(1983), 435–443.

橋本康史

〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

九州大学大学院数理学府数理学専攻

092-641-3131 (内線 8405)

e-mail:hasimoto@math.kyushu-u.ac.jp