

(論文内容の要旨)

本論文は、ゲージ群等の無限次元変換群の作用をもつ古典および量子力学系の具体的なモデルについての研究と、近年注目を集めている量子計算と制御に対する有限次元変換群の立場からの研究をまとめたものであり、5章からなっている。変換群の次元が有限であるか無限であるか、対象とする力学系が古典系であるか量子系であるかで研究対象を分類することができるが、本論文は変換群が無限次元の場合の古典系と量子系、変換群が有限次元の場合の量子系を取り扱っている。

第1章は序論であり、研究の動機、目的、続く各章の概要を述べている。

第2章では、古典力学のハミルトン系における周期軌道をループ群上の作用汎関数の極値として特徴づける変分法的手法を取り扱っている。ハミルトン系の定義されているシンプレクティック多様体のシンプレクティック形式が完全形式の場合には汎関数の定義が容易なのであるが、完全形式でない場合には簡単な定義ができない。申請者は、完全形式でないシンプレクティック形式でも、それが完全形式のシンプレクティック形式をもつ力学系の簡約化の結果として得られるものならば、周期解に対する変分法的手法がうまく機能することを示している。具体的には、簡約化前の力学系に対し、ラグランジュ乗数付きのループ空間上で作用汎関数を定義しておいて、その汎関数は簡約化に付随して定義される無限次元のループ群の作用では不変でないが、汎関数の極値集合は同じループ群の作用で不変となること、したがって、簡約化ハミルトン系の周期解の全体と、作用汎関数の極値集合のループ群による商集合とが同一視できることを示した。この結果、間接的ではあるが、完全形式でないシンプレクティック形式をもつハミルトン力学系にも、周期解に対する変分法的手法が成り立つことを明らかにした。

第3章は、量子計算において重要な概念であるエンタングルメントとその制御の問題を扱っている。変換群の立場からは、有限次元の量子系に有限次元のユニタリー変換群が作用する場合を考えていることになる。対象としている量子系は多重キュービット系で、核磁気共鳴(NMR)をモデルとして、ドリフト項と制御項とからなるハミルトニアンをもつ。多重キュービット系の状態が、部分系の状態のテンソル積に分解するとき分離状態であるといい、そうでないときエンタングル状態であるという。エンタングル状態を不変にする変換群はハミルトニアンを不変にしない。申請者は、制御項がドリフト項と相互作用して、エンタングル状態が増強あるいは減少するようすを研究した。具体的には、一定制御が課されていて、制御とドリフトの結合が弱い場合に、シュレーディンガー方程式の解を結合定数の冪級数の形で書き表し、それを用いて系のエンタングル度を測る指標となる量の変化を調べた。その結果、特に2キュービット系で、系が分離状態にあるとき、制御項の効果の現れるのはゆっくりとしていて、制御を始めてからの経過時間の3次のオーダーであることを示した。また、ここで扱っている多重キュービット系が制御可能であることを交換子積の計算により具体的に証明している。

第4章は2次元トーラス上のアハラノフ・ボーム磁場中の荷電粒子の量子力学を取り扱っている。変換群論的には、波動関数のなすヒルベルト空間への無限次元ゲージ群の作用を考えている。アハラノフ・ボーム磁場とは、有限個（ N 個）の特異点にだけ磁場の集中した（それらの点にだけ磁束をもつ）特異な磁場である。この特異磁場には局所的ベクトルポテンシャルが存在し、それは2次元トーラス上の $U(1)$ バンドルの接続として数学的に定式化される。申請者は、特異点における磁束の和は量子化されて、バンドルを特徴づける整数に等しいことを証明している。さらに、2つの $U(1)$ バンドルがゲージ変換のもとで同値であるための必要十分条件を、1輪体（サイクル）上のベクトルポテンシャルの積分に関する量を使って与えている。この条件を使って、トーラス上の平坦接続全体のなすモジュライ空間が $N+1$ 次元のトーラスと同一視できることを証明している。これだけの幾何学的準備をした上で、 $U(1)$ バンドルに付随する複素直線バンドルにおいてアハラノフ・ホーム量子系を定義し、2つのアハラノフ・ボーム量子系がユニタリー同値であるための必要十分条件を、2つの $U(1)$ バンドルがゲージ同値であるための必要十分条件と同様の形で与えている。さらに、ハミルトン作用素の自己共役拡大を局所化原理により解析的に研究して不足指数を求めている。それは量子化された（整数値をとる）磁束をもつ特異点の個数に依存する。最後に、ゲージ変換群を利用して、ハミルトン作用素をユニタリー同値な標準形に変換し、それに基づいて、すべての磁束が量子化されている場合に固有値問題を解き、固有値を求め、対応する固有関数をヤコビのシグマ関数を用いて表している。

第5章は結論で、本論文のまとめと、今後の課題について述べている。

氏 名	藪 義郎
-----	------

(論文審査の結果の要旨)

変換群が力学系を不変にすること、すなわち対称性については長い研究がある。しかし、幾何学的には、必ずしも力学系を不変にしないが、力学系の定義されている空間に変換群が作用する状況が、より一般的である。本論文はそのような状況で無限次元ゲージ群の作用する古典系と量子系、そして有限次元ユニタリー変換群の作用する多重キュービット系について研究している。

古典力学系において無限次元ゲージ変換群の作用が問題となるテーマとして、申請者はハミルトン系の周期軌道に対する変分学的手法を取り上げている。ハミルトン系のシンプレクティック形式が完全形式である場合には、ループ群上で作用汎関数がうまく定義できるが、簡約化ハミルトン系のシンプレクティック形式は必ずしも完全形式ではないので、対応する作用汎関数は簡単には定義できない。申請者は簡約化の手法をうまく取りいれて、簡約化前の作用汎関数をラグランジュ乗数付きのループ空間上で定義して、この作用汎関数は簡約化に付随する無限次元ループ群で不変ではないが、その極値集合は不変となることを示した。さらに、簡約化ハミルトン系の周期解の全体と作用汎関数の極値集合のループ群による商集合とが同一視できることを示した。これは、力学系の簡約化の理論と周期解に対する変分学的手法との結合をうまく結合させた有意義な結果である。

無限次元ゲージ群が作用する量子力学系の具体例として、申請者は2次元トラス上のアハラノフ・ボーム量子系を取り扱っている。この量子系は、有限個の点にだけ磁束の集中した磁場中の荷電粒子の運動を記述するもので、数学的には2次元トラス上の複素直線バンドルに、この特異磁場を曲率とする接続が定義されていて、それに付随するラプラス・ベルトラミ作用素をハミルトニアンとする量子力学系である。ハミルトン作用素の自己共役拡大に伴う不足指数を求め、それが量子化されていない磁束の個数に依存することを示した。さらに、この直線バンドルの切断のなすヒルベルト空間には無限次元ゲージ群が作用するのであるが、このゲージ群の作用をうまく使って、アハラノフ・ボームハミルトニアンをユニタリー同値な標準形に変換し、各磁束が量子化されている場合に、固有値と固有関数をヤコビのシグマ関数を用いて求めている。

有限次元量子系ではあるが、多重キュービット系にはエンタングルメントに関連する変換群が作用している。多重キュービット系のハミルトニアンはこの変換群のもとで不変ではないが、エンタングルメントは不変である。申請者は一定制御が課せられた状況でシュレーディンガー方程式を解いて、制御のエンタングルメント増強への効果をうまく計算している。

以上、本論文は力学系における変換群の作用を、対称性に捉われない観点から研究・活用したものであり、学術上、實際上寄与するところが大である。よって、本論文は博士(情報学)の学位論文として価値あるものと認める。また、平成21年2月26日実施した論文内容とそれに関連した試問の結果、合格と認めた。