

$u_t = \Delta u + F(u)$ に対する.
Galerkin 法 について

名大 理 田村 英男

簡単のために 以下の 2 つの例について説明する。

$$(I) \quad u_t = \Delta u - u^3 = Au$$

$$(II) \quad u_t = \Delta u - u^2 = Au$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ($\partial\Omega$ 境界). 有界な 凸多角形とし
て, 初期値, 境界値として.

$$u(x, 0) = v(x) \quad (v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

$$u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0$$

を考える。ここで, $H^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ ($\subset H^1(\Omega)$)
は 通常の Sobolev 空間の記号である。そして
この norm を $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ と表わす。

(I) についての説明。

今 次のような近似 step について考える。

k を 時間 mesh とする。

$$(1) \quad \begin{cases} (u^{n+1/2} - u^n)/k = -(u^n)^2 u^{n+1/2} \\ (u^{n+1} - u^{n+1/2})/k = \Delta u^{n+1} \end{cases}$$

$$\text{即ち} \quad u^{n+1} = (1 - k\Delta)^{-1} \frac{u^n}{(1 + k(u^n)^2)} \\ = R_k \cdot P u^n = L_k u^n$$

$$R_k = (1 - k\Delta)^{-1}, \quad P u = \frac{u}{1 + k u^2}, \quad L_k = R_k \cdot P$$

R_k, P は $L^2(\Omega)$ 上の contraction operator, 従って L_k も そうである。

次に $R_k = (1 - k\Delta)^{-1}$ に対する Galerkin 近似 (有限要素近似) について考える。

今, S_h を, parameter h に対し, 三角分割された Γ 上の 2 次元多角形領域 Ω 上で定義され, 各三角形上で, 線形な連続関数のつく空間で, Ω 上の 0 に値をとるものとする。明らかに $S_h \subset H_0^1(\Omega)$ 。

$$J(u) = (u, u) + k(\text{grad } u, \text{grad } u) - 2(f, u)$$

$(\cdot, \cdot)$ は $L^2(\Omega)$ における内積を表す。

$u_h \in \text{minimum element of } J(u) \text{ on } S_h$ と定義し, 作用素 $T_h f = u_h$ を定義する。

補題 1;

任意の $\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対し $\zeta = R_h \varphi - F_{R_h} \varphi$ と定義すれば,

$$\|\zeta\|_0 \leq C h^2 (1 + h R^{-\frac{1}{2}})^2 \|\varphi\|_2$$

ここで定数 C は ζ, φ, h, R に対し一様関係にとりこまれない。

証明は、有限要素の通常の方法と Nitsche の trick により容易に導かれる。

補題 2;

(I) の解 $u(x, t) = e^{tA} v$ と表示する。

ここで e^{tA} は $L^2(\Omega)$ に於ける contraction 作用素。

$$(i) \quad \|\Delta u\|_0 \leq C \|v\|_2.$$

$$(ii) \quad \|(-\Delta)^\alpha u\|_0 \leq C t^{1-\alpha} \|v\|_2 + C/2-\alpha \|v\|_2, \quad (0 < \alpha < 2)$$

(iii) 任意の $w \in \mathcal{D}((-\Delta)^\alpha)$ に対し

$$\|e^{R_h A} w - L_h w\|_0 \leq C R_h^\alpha \|(-\Delta)^\alpha w\|_0 + R_h^2 C \|w\|_2$$

以上 (i), (ii), (iii) の estimate が成立する。

補題 3;

$a \in \mathcal{D}((-\Delta)^\alpha)$ ($0 < \alpha < 2$), $\varphi \in L^2(\Omega)$ に対し作用素 $L_{R_h} = F_{R_h} \circ P$ と定義すれば,

$$\begin{aligned} & \|e^{kA}a - L_k b\|_0 \\ & \leq C k^\alpha \|(-\Delta)^\alpha a\|_0 + C k^2 \|a\|_2 + C h^2 (1 + h k^{-\frac{1}{2}})^2 \|a\|_2 \\ & \quad + \|a - b\|_0. \end{aligned}$$

C は, k, h に依らず定数である.

定理 1.3

problem (I) に対して, 初期値 $v_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に属すると仮定して, 領域 Ω も上の仮定を満足するものとする. 任意に固定された時間 T に対して, $T = nk$ とおいて, 近似解 $u_n = (L_{k,h})^n v$ と定義すると,

$$\begin{aligned} & \|u(T) - u_n\|_0 \\ & \leq C_{2-\alpha} \cdot h^{\frac{2}{\alpha}(\alpha-1)} \quad 1 < \alpha < 2 \quad (k = h^{\frac{2}{\alpha}}); \end{aligned}$$

証明は, 補題 3.5.

$$\begin{aligned} & \|u(nk) - u_n\|_0 = \|u(n-1)k - u_{n-1}\|_0 \\ & \leq C k^\alpha ((n-1)k)^{1-\alpha} \|v\|_2 + k^\alpha \cdot \frac{C}{2-\alpha} \|v\|_2 \\ & \quad + k^2 C \|v\|_2 + C h^2 (1 + h k^{-\frac{1}{2}})^2 \|v\|_2. \end{aligned}$$

が成立する. これを n 回加えると $k \sum_{i=1}^n (ik)^{1-\alpha} < C$ に注意すれば定理の主張が従う.

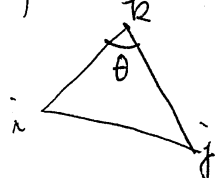
problem (II) について, (I) と異なる点は, 近似 step に於いて,

$\frac{1}{1+ku_m}$ が定義されるければならない。

(I) に於いては $\frac{1}{1+ku_m^2}$ であつたのと同じく配らなければならない。

そのためには, $(1-k\Delta)^{-1}$ の近似解の正値性 (近似解の最大値原理) が保証されなければならない。

補題 4; φ_j ; 節点 j に 1, i, k に於いて 0 とする piecewise linear 函数。



φ_i ; について同様。

このとき $(\text{grad } \varphi_i, \text{grad } \varphi_j) < 0$ かつ $\theta < \pi/2$ 。

補題 4 によって, k, h を適当にとれば,

$$(\varphi_i, \varphi_j) + k(\text{grad } \varphi_i, \text{grad } \varphi_j) \leq 0, (i \neq j).$$

このことより, 有限要素行列の対角線外上の要素は non-positive なる故に, 近似解の正値性が保証される。

定理 2; problem (II) について, 初期値 $v(x)$ を non-negative な函数で, $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ に属すると仮定するとし, 後の仮定は定理 1 と同様にすれば, 同じ結論が得られる。