

↓
Teichüller Spaces of Seifert Fibered Manifolds with Infinite π_1

東大理 大鹿 健一 (Ken-ichi Ohshika)

Thurston により, 3次元多様体の geometry は本質的に 8種類, $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{E}^3$, S^3 , $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $S^2 \times \mathbb{R}$, $\widehat{SL}_2$, $N\mathbb{L}$, Sol であることが知られている。Closed 或は torus boundary の多様体のみを考えれば, $\mathbb{H}^3$, Sol 以外の geometry をもつ多様体は Seifert fibered manifold である。

Geometric manifold M について, M の Teichmüller space $\mathcal{T}(M)$ を M 上の geometric structure 全体を 恒等写像に isotopic な isometry で移り合うものを同一視してできる空間とする。位相は C^∞ topology の quotient を入れる。Complete hyperbolic structure with finite volume をもつ Haken manifold M については, Mostow の rigidity theorem より $\mathcal{T}(M) \cong \mathbb{R}^n$. ここでは $|\pi_1| = \infty$ の Seifert fibered manifold について $\mathcal{T}(M)$ の位相型を定める。

主結果

以下 M は ^{orientable} Seifert fibered manifold, O はその base orbifold
 X は O の underlying space, k は fibration の singular fiber
 の本数 とす。 $O \neq S^2(2,3,r), S^2(3,3,r)$ と仮定する。

定理 1 M が $H^2 \times \mathbb{R}$ geometry をもつ時, 即ち O は
 hyperbolic で fibration は trivial euler class をもつ時.

$$\chi(M) \equiv \begin{cases} \mathbb{R}^{3-4\chi(X)+2k} & \text{if } X \text{ orientable } \partial X = \emptyset \\ \mathbb{R}^{2-4\chi(X)+2k} & \text{if } X \text{ nonori. か } \partial X \neq \emptyset \text{ の片方} \\ \mathbb{R}^{1-4\chi(X)+2k} & \text{if } X \text{ nonorientable } \partial X \neq \emptyset \end{cases}$$

定理 2 M が $\widetilde{SL}_2$ geometry をもつ時, 即ち O は
 hyperbolic で fibration は nontrivial euler class を
 もつ時

$$\chi(M) \equiv \begin{cases} \mathbb{R}^{2-4\chi(X)+2k} & \text{if } X \text{ orientable} \\ \mathbb{R}^{1-4\chi(X)+2k} & \text{if } X \text{ nonorientable} \end{cases}$$

定理 3 M が E^3 - geometry をもつ時, 即ち O は
 Euclidean で fibration は trivial euler class をもつ時,
 $\chi(M)$ は 次表 のようになる。

O	$\mathcal{I}(M)$
torus	$\mathbb{R}^6$
Klein bottle, $S^2(2,2,2,2)$	$\mathbb{R}^4$
annulus	$\mathbb{R}^4$
$S^2(2,4,4)$	$\mathbb{R}^2$
Möbius band, $D^2(2,2)$	$\mathbb{R}^3$
$P^2(2,2)$	$\mathbb{R}^3$

定理 4 M が Nil geometry をもつ時, 即ち O は Euclidean で fibration は nontrivial euler class をもつ時, $\mathcal{I}(M)$ は次表の通り.

O	$\mathcal{I}(M)$
torus	$\mathbb{R}^5$
Klein bottle	$\mathbb{R}^3$
$S^2(2,2,2,2)$	$\mathbb{R}^3$
$S^2(2,4,4)$	$\mathbb{R}$
$P^2(2,2)$	$\mathbb{R}^2$

定理 1 ~ 4 で扱った 4 つの geometry について 次の定理が成立つ.

定理 5 γ を M 中の loop, arc (properly immersed) の free homotopy class とする. $\mathbb{R}_+^8$ を γ から $\mathbb{R}_+^8$ への関数全体の空間で weak topology をもつとする. $l_\gamma: \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathbb{R}_+^8$ を $m \in \mathcal{T}(M)$ について $l_\gamma(m)$ の S 成分は S の m における geodesic length として定義する.

M が $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{SL}_2$, $\mathbb{E}^3$, $N\mathbb{L}$ のいずれかの geometry をもつなら, $l_\gamma: \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathbb{R}_+^8$ は proper embedding.

最後に $S^2 \times \mathbb{R}$ geometry の場合であるが, この場合, covering $p: S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M$ について $S^2 \times \mathbb{R}$ の foliation $\{S^2 \times \mathbb{R}\}$ は必ずしも M の Seifert fibration に写らない.

M の fixed Seifert invariant (α, β) について $\{S^2 \times \mathbb{R}\}$ が (α, β) Seifert fibration に写されるような geometric structure のつくる $\mathcal{T}(M)$ の部分空間を $\mathcal{T}^*(M)$ と表す.

定理 6 M が $S^2 \times \mathbb{R}$ geometry をもつ時 (即ち $M \cong S^2 \times S^1$, $P^3 \# P^3$, $S^1 \times D^3$) $\mathcal{T}(M)$, $\mathcal{T}^*(M)$ は以下の通り

M	$\mathcal{T}(M)$	$\mathcal{T}^*(M)$
$S^2 \times S^1$	$S^3 \times \mathbb{R}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}$
$P^3 \# P^3$	$S^3 \times \mathbb{R}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}$
$D^3 \times S^1$	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

定理の証明の概略

まず base orbifold O の Teichmüller space を調べる
hyperbolic 及び Euclidean 2-orbifold について次の
定理が成立つ。

定理 O を hyperbolic 2-orbifold, X をその
underlying space, k を cone points の数 とする時,
 $\mathcal{T}(O) \cong \mathbb{R}^{-3X(k)+2k}$

定理 O を Euclidean 2-orbifold とする時, $\mathcal{T}(O)$ は
以下の通り。

O	$\mathcal{T}(O)$
torus, $S^2(2,2,2,2)$	$\mathbb{R}^3$
Klein bottle	$\mathbb{R}^2$
annulus, Möbius band	$\mathbb{R}^2$
$D^2(2,2), P^2(2,2)$	$\mathbb{R}^2$
$S^2(p, q, r)$	$\mathbb{R}$

$\mathcal{T}(M)$ と $\mathcal{T}(O)$ の関係を調べる上で, 次の2つの
補題が基本的である。

補題 1 (Waldhausen, P. Scott) M を Haken manifold が、
base orbifold が $S^2(p, q, r)$ $p, q \geq 4$ の Seifert fibered manifold
とする。 $f: M \rightarrow M$ が 恒等写像に homotopic な homeo
なら、 f は 恒等写像に isotopic.

補題 2 (Waldhausen, P. Scott) M を Seifert fibered manifold
with infinite π_1 で $M \neq S^1 \times S^1 \times S^1, S^1 \times S^1 \times I$, Klein bottle との twisted
 I -bundle, その double, solid torus, であつ base orbifold は
 $S^2(2, 3, r)$ $S^2(3, 3, r)$ でないとする。このとき M の Seifert fibration は
up to isotopy で unique.

補題 1 より $\mathcal{G}(M)$ は $\pi_1(M)$ の $\text{Isom}^+(E)$ (E は model
space; $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \widetilde{\text{SL}}_2, \mathbb{E}^3, \mathbb{M}^4$) への表現の 共役類に対応する。
(但表現は discrete faithful)

以下簡単の為、 M は補題 2 の仮定をみたし、 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
geometry をもつ場合を考えよう。

M の fibration は unique だから、 M の fibration は $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
の $\mathbb{R}$ -factor の image としてよい。従つて $\mathcal{G}: \mathcal{G}(M) \rightarrow \mathcal{G}(0)$
が well-defined. $\mathcal{G}^{-1}(pt)$ の次元を調べる。実は $\mathcal{G}$ は
fibre bundle になっているので、 $\mathcal{G}(M) \cong \mathcal{G}(0) \times \mathcal{G}^{-1}(pt)$
となる。

$\pi_1(M) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_e, h \rangle$
 (0, orient. の場合) $[a_i, h], [b_i, h], [c_i, h], [c_i^{\alpha_i} h^{\beta_i}],$
 $[a_1, c_1] \dots [a_g, b_g] c_1 \dots c_k d_1 \dots d_e \rangle$
 但し (α_i, β_i) は $\sum \frac{\beta_i}{\alpha_i} = 0$ となるようなものをと

てある。

$$\pi_1(M) / \langle h \rangle \cong \pi_1^{orb}(O)$$

$\mathcal{O}(O)$ の元を1つ定めることは, $\pi_1^{orb}(O)$ から $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ への faithful discrete representation を定めることに等しい。
 従って $g \in \mathcal{O}(O)$ に対して $\tilde{g}(g)$ は、左の図式を可換にするような faithful discrete representation $\hat{\rho}$ 全体に

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\rho}: \pi_1(M) & \longrightarrow & \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho_g: \pi_1^{orb}(O) & \longrightarrow & \text{Isom}(\mathbb{H}^2) \end{array}$$
 対応している。

$\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ の kernel は $\mathbb{R}$ であるから,
 $\pi_1(M)$ の各 generator について $\tilde{\rho}$ での image には $\mathbb{R}$ だけの自由度があるが, それらが $\pi_1(M)$ の relation を保って
 なくてはならない。これより $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ の image は
 自由に lift でき, $h, d_1, \dots, d_{e-1}$ の lift を決めれば, あとは
 一意的に決まる。従って $\tilde{g}(g) \cong \mathbb{R}^{2g + \max\{0, e-1\} + 1}$

次に O が nonorientable の場合を考える。この場合,

$$\begin{aligned} \pi_1(M) \cong & \langle a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_e, h; \\ & a_i h a_i^{-1} h^{-1}, [c_i, h], [d_i, h], c_i^{d_i} h^{d_i}, \\ & a_1^2 \dots a_g^2 c_1 \dots c_k d_1 \dots d_e \rangle \end{aligned}$$

0 が orientable の場合と同様に考えれば $a_1, \dots, a_g$ の image はそれぞれ $\mathbb{R}$ だけ自由に動かせることがわかる。しかし a_i の $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ への action は水平な軸をもつ π の rotation なので、全ての lift は互いに conjugate. 従ってこれらの相対的な“高さ”の差だけが geometric structure をかえることになるので、 $(g-1)$ の独立な変数が生じる。あとは orientable の時と同様にして $\mathfrak{g}(g) \cong \mathbb{R}^{g + \max\{0, e-4\}}$.

他の geometry についても同様に考えればよい。euler class がある時は $c_1 \dots c_e$ の関係が一意的にこれらの lift を決めてしまうので次元が1つへる。

定理5の証明の概略

問題は $\mathfrak{g}_*$ が injective であることを示すことにある。 $\mathfrak{g}$ の各元について長さが同じなら $\mathfrak{g}(M)$ で同じ元であることをいえばよいのだが、 $\mathfrak{g}(M)$ で同じ元になることと、 $\mathfrak{g}(pt)$ 上

で一致することを見る。 $\pi(0)$ の各元は 0 の closed curve, proper arc の length で決定される。 0 での length はその M への lift の minimal length. これは closed curve で attain されるとは限らないが, closed な lift の長さ全体がわかれば一意的に求まる。(2次元数の極小値)。よって $\pi(0)$ の元は 1 つに定まる。lift の長さは 0 での長さとそれ自身の長さにより決まる、よって $\pi(M)$ の元が 1 つ定まる。