

Equilibrium Limit of the Time Evolution Kernel

慶大・理工 福田 礼次郎、日暮 等

Minkowski 時空において確率過程量子化法を適用するとき問題となるのは equilibrium limit が存在し、それが通常の量子化の場合と一致するかどうかということである。これに関しては様々な文献が出ているが、それらは二つのタイプに分類できる。一つはダイアグラムを使った証明法であり、他方は Fokker-Planck formalism を用いた方法である。今回、我々が行った証明方法は Hüffel と Rumpf* によって使われた方法をより厳密にしたものであり、代数的手法を用いた証明といってもよい。以下、作用が

$$S(\phi) = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) - (m^2 - i\varepsilon) \phi^2(x)) - V(\phi(x)) \right\} \quad (1)$$

で与えられる D 次元時空のスカラ場 ϕ を例にとって説明する。上の作用において、Feynman prescription を採用している。つまり、質量の平方に無限小の負の虚部を付け加えている。この手続きは equilibrium limit が存在するために必要で、かつその結果の causal property を保証していることが以下で理解できる。

Langevin 方程式を

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} &= i \frac{\delta S(\phi)}{\delta \phi(x)} \bigg|_{\phi(x)=\phi(x, t)} + \eta(x, t) \\ &= i(\square + m^2 - i\varepsilon) \phi(x, t) - iV'(\phi(x, t)) + \eta(x, t) \end{aligned} \quad (2)$$

で与える。ここで、 t は fictitious time、 $\eta(x, t)$ は Gaussian white noise で以下の性質を満たす。

$$\langle \eta(x, t) \rangle_\eta = 0, \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle_\eta &= 2\delta^D(x - x') \delta(t - t') \\ &= \frac{\int [d\eta] \eta(x, t) \eta(x', t') \exp(-\frac{1}{4} \int d^D x \int_0^\infty d\tau \eta^2(x, \tau))}{\int [d\eta] \exp(-\frac{1}{4} \int d^D x \int_0^\infty d\tau \eta^2(x, \tau))} \end{aligned} \quad (3b)$$

次に、fictitious time t に関して同時刻の相関関数の母関数を次式で定義する。

* H. Hüffel and H. Rumpf, Phys. Lett. 148B (1984) 104.

$$Z(J;t) \equiv \left\langle \exp(i \int d^D x J(x) \phi(x,t)) \right\rangle_\eta \quad (4)$$

$\phi(x,t)$ は適当な初期条件 $\phi(x,0)$ のもとでの Langevin 方程式 (2) の解である。

証明の手順を列挙すると以下のようになる。

- (i) $Z(J;t)$ の時間発展方程式を作る。
- (ii) その方程式の V についての摂動解を構成し、摂動の各オーダーについて $t \rightarrow \infty$ の limit をとる。
- (iii) (ii) で求めた limit が causal Green 関数の母関数

$$Z_{\text{QFT}}(J) \equiv \frac{\int [d\phi] \exp(iS(\phi) + i \int d^D x J(x) \phi(x))}{\int [d\phi] \exp(iS(\phi))} \quad (5)$$

の V に関する摂動展開の各オーダーと一致することを示す。

最初のステップは、方程式 (4) を t に関して微分し、Langevin 方程式 (2) と関係式

$$\left\langle \eta(x,t) \exp(i \int d^D x J(x) \phi(x,t)) \right\rangle_\eta = iJ(x) Z(J;t) \quad (6)$$

を使うと、 $Z(J;t)$ に関する時間発展方程式

$$\frac{\partial Z(J;t)}{\partial t} = \int d^D x J(x) \left\{ (\square + m^2 - i\varepsilon) \frac{\delta}{i\delta J(x)} + V' \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right) + J(x) \right\} Z(J;t) \quad (7)$$

が導ける。 $J(x)$ と $\delta/\delta J(x)$ の運動量表示

$$\left. \begin{aligned} J(x) &= (2\pi)^{-D/2} \int d^D p e^{-ip \cdot x} J(p) \\ \frac{\delta}{\delta J(x)} &= (2\pi)^{-D/2} \int d^D p e^{ip \cdot x} \frac{\delta}{\delta J(p)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

を導入すれば (7) は

$$\frac{\partial Z(J;t)}{\partial t} = (L_1 + L_2 + L_I) Z(J;t) \quad (9)$$

と書き直せる。ここで、演算子 L_1 、 L_2 、 L_I は次式で定義される。

$$L_1 \equiv - \int d^D p G(p)^{-1} J(p) \delta/\delta J(p), \quad (10a)$$

$$G(p) \equiv \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (10b)$$

$$L_2 \equiv \int d^D p J(p) J(-p), \quad (10c)$$

$$L_I \equiv -i \int d^D p J(p) [J(-p), \tilde{V}(\delta/i\delta J)], \quad (10d)$$

$$\tilde{V}(\delta/i\delta J) \equiv \int d^D x V((2\pi)^{-D/2} \int d^D q e^{-ix \cdot q} \delta/i\delta J(q)) \quad (10e)$$

ところで、方程式(9)の形式解は

$$Z(J; t) = \exp\{t(L_1 + L_2 + L_I)\} F(J) \quad (11)$$

とかける。 $F(J)$ はLangevin方程式(2)に対する初期条件 $\phi(x, 0)$ を与えることによってきまる。すなわち

$$Z(J; 0) = F(J) = \exp(i \int d^D p J(-p) \phi(p, 0)) \quad (12)$$

である。(11)において時間発展演算子 $\exp\{t(L_1 + L_2 + L_I)\}$ を以下のように相互作用による部分とfreeな部分とに分ける。

$$\exp\{t(L_1 + L_2 + L_I)\} = g(t) \exp\{t(L_1 + L_2)\}, \quad (13a)$$

$$g(t) \equiv T_- \exp\left(\int_0^t d\tau e^{\tau(L_1 + L_2)} L_I e^{-\tau(L_1 + L_2)}\right) \quad (13b)$$

ここで、 $g(t)$ が相互作用による効果で、 T_- は反時間順序積を表している。 L_1 と $J(p)$ がclosed algebra

$$[L_1, J(p)] = i(p^2 - m^2 + i\epsilon) J(p) \quad (14)$$

を作ることに注意すれば

$$\begin{aligned} \exp\{t(L_1 + L_2)\} &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \int d^D p G(p) J(p) J(-p)\right\} \exp(tL_1) \exp\left\{\frac{1}{2} \int d^D p G(p) J(p) J(-p)\right\} \\ &\equiv W(J) \exp(tL_1) W^{-1}(J) \end{aligned}$$

となることが分かるので、結局 $g(t)$ は

$$g(t) = W(J) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_n L_I(t_n) \int_{t_n}^t dt_{n-1} L_I(t_{n-1}) \cdots \int_{t_2}^t dt_1 L_I(t_1) W^{-1}(J) \quad (15)$$

$$L_I(t) \equiv e^{tL_1} W^{-1}(J) L_I W(J) e^{-tL_1} \quad (16a)$$

と展開できる。 L_I の定義(10)、及び関係式 $\delta W(J)/\delta J(p) = -G(p) J(-p) W(J)$ を使って(16a)を書きなおせば

$$\begin{aligned} L_I(t) &= iL_1 \exp(tL_1) W^{-1}(J) \tilde{V}\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right) W(J) \exp(-tL_1) \\ &\quad + i \int d^D p J_t(p) G^{-1}(p) W^{-1}(J_t) \tilde{V}\left(\frac{\delta}{i\delta J_t}\right) W(J_t) \frac{\delta}{\delta J_t(p)} \end{aligned} \quad (16b)$$

と表せる。但し、 $J_t(p)$ は次のスケール変換で定義される。

$$J_t(p) \equiv \exp(tL_1)J(p)\exp(-tL_1) = e^{it(p^2-m^2+i\epsilon)}J(p) \quad (17)$$

方程式(13)、(15)を(11)に代入すれば方程式(9)の摂動解

$$Z(J;t) = W(J) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{(n)}(J;t,0) \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{(0)}(J;t,\tau) &= \exp(tL_1)W^{-1}(J)F(J) = W^{-1}(J_t)F(J_t) \\ \Delta^{(n)}(J;t,\tau) &= \int_{\tau}^t ds L_I(s) \Delta^{(n-1)}(J;t,s), \quad \text{for } n=1,2,\dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

が求まる。次のステップは(18)の各項において $t \rightarrow \infty$ の limitを計算することである。このためには(19)の漸化式が役にたつ。 $J_t(p)$ はdamping factor $e^{-\epsilon t}$ がかかっているので $t \rightarrow \infty$ でゼロになる。それ故、 $n=0$ の free partは

$$\Delta^{(0)}(J;\infty,\tau) = W(0)F(0) = 1 \quad (20a)$$

となる。この結果は自由場($V=0$)の時のequilibrium limitの証明を与えている。というのは $W(J)$ が自由なスカラー場のcausal Green函数の母函数になっているからである。 $n=1$ の場合は(19)と(16b)を使って

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(J;\infty,\tau) &= i \int_{\tau}^{\infty} ds L_1 \exp(sL_1) W^{-1}(J) \tilde{V}(\delta/i\delta J) W(J) \\ &= - \int_{\tau}^{\infty} ds \frac{\partial H^{(1)}(J_s)}{\partial s} \\ &= H^{(1)}(J_{\tau}) - H^{(1)}(0) \end{aligned} \quad (20b)$$

となる。ここで $H^{(n)}(J)$ は次式で定義される J の多項式である。

$$H^{(n)}(J) \equiv W^{-1}(J) \frac{1}{n!} \{i \tilde{V}(\delta/i\delta J)\}^n W(J), \quad \text{for } n=0,1,2,\dots \quad (21)$$

一般に摂動の n 次は

$$\Delta^{(n)}(J;\infty,\tau) = H^{(n)}(J_{\tau}) - \sum_{l=0}^{n-1} \Delta^{(l)}(J;\infty,\tau) H^{(n-l)}(0) \quad (22)$$

であることが、数学的帰納法を使って証明することができる。

最後のステップは(5)の摂動展開の第 n 次項と $\lim_{t \rightarrow \infty} W(J) \Delta^{(n)}(J;t,0)$ が一致すること
を示せばよい。 Z_{QFT} の摂動展開は次のようになる。

$$\begin{aligned}
Z_{\text{QFT}}(J) &= \frac{\exp\{-i\tilde{V}(\delta/i\delta J)\} W(J)}{[\exp\{-i\tilde{V}(\delta/i\delta J)\} W(J)]_{J=0}} = \frac{W(J) \sum_{n=0}^{\infty} H^{(n)}(J)}{\sum_{n=0}^{\infty} H^{(n)}(0)} \\
&\equiv W(J) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{\text{QFT}}^{(n)}(J)
\end{aligned} \tag{23}$$

これから、第 n オーター $\Delta_{\text{QFT}}^{(n)}$ に関しての、次の漸化式が導ける。

$$\begin{cases} \Delta_{\text{QFT}}^{(0)}(J) = 1 \\ \Delta_{\text{QFT}}^{(n)}(J) = H^{(n)}(J) - \sum_{l=0}^{n-1} \Delta_{\text{QFT}}^{(l)}(J) H^{(n-l)}(0) \end{cases} \tag{24}$$

これは、 $\Delta^{(n)}(J; \infty, 0)$ が満たす漸化式と同一である。それ故、任意の $n (\geq 0)$ に対して

$$\Delta^{(n)}(J; \infty, 0) = \Delta_{\text{QFT}}^{(n)}(J)$$

が成立し、従って(18)、(23)により摂動論の意味で

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(J; t) = Z_{\text{QFT}}(J)$$

であることが証明できた。

詳しくは、“Equilibrium Limit of the Stochastic Quantization in Minkowski Space”, R. Fukuda and H. Higurashi, (to be published in Phys. Lett. B) をご参照下さい。

Wigner 関数, 伏見関数 — 量子力学における位相空間分布関数 —

明治大学・和泉 中 村 孔 一

量子力学的な状態を特徴づける分布関数を座標と運動量の組 — 位相空間の点 — の関数として表わす試みは、1932年に E. Wigner によって提唱された¹⁾。その後、伏見によって、やや異なる形の同様な分