

3次元多様体, Fake Surfaces, D-S graphs

神戸大 教養 池田裕司

神戸大 教養 井上善允

1. Fake surface と云うのは

" $\forall x \in P$, $lk(x, P)$ が circle S^1 , θ -curve θ ,
4頂点完全グラフ K_4 のいずれかである "
を満たす2次元 polyhedron の事である。

P を fake surface とする時, 次の記号を用いる。

$S_2(P) = \{ x \in P \mid lk(x, P) = \theta \}$ の closure in P ,

$S_3(P) = \{ x \in P \mid lk(x, P) = K_4 \}$

$M(P) = P - U(P)$ の closure in P , 又はその
connected components の set, 但し $U(P)$ は
 $S_2(P)$ の P に於ける regular neighborhood.

Closed 3-manifold W に対して,

" fake surface P が W の spine である "

と云うのは

$$"\exists 3\text{-ball } B \subset W \rightarrow W - \overset{\circ}{B} \searrow P"$$

を意味する事にして、以下この状況で考える。

更に、 $S_2(P) = \emptyset$ ならば P は必然的に 2-manifold となるし、 $S_3(P) = \emptyset$ の場合も W が何であるか簡単に解けてしまうので、我々は $S_3(P) \neq \emptyset$ を仮定する。

Prop. 1. $M(P)$ は 2-ball を含む。

Prop. 2. $H_1(P)$ が直和因子として $\mathbb{Z}_2$ を含まない
 $\Rightarrow M(P)$ の element は punctured 2-ball.

以後、" $M(P)$ の element は 2-ball" を仮定するが、これは全く不当なものではない。即ち、一般性を損なうものではない。

Prop. 3. $\#M(P) = \#S_3(P) + 1$

今、 $M = W - \overset{\circ}{B}$ とおくと、 $M \searrow P$ だから、 M から P への整形された collapsing map の $\dot{M}$ への restriction
 $f: \dot{M} \rightarrow P$ を考える事が出来る。上の Prop.1. から Prop.3.

は f の性質から導かれるのであるが、ここでは証明よりも紹介を重視したい。

f の諸々の特徴の中、覚えて置いて欲しいのは次である。

Prop. 4. f は locally homeomorphism である。

即ち, $\forall x \in M, \exists x$ の M に於ける近傍 N

$\rightarrow f|N: N \rightarrow f(N)$ は homeomorphism.

Prop. 5. $W = B/f$

Prop. 6. $f^{-1}(S_2(P))$ は S^2 に embed された 3-regular connected graph で頂点数は $4\#S_3(P)$ である。

2. G は S^2 に embed された graph とする。 G が D-S graph と呼ばれるのは,

$\exists$ fake surface P , $\exists$ locally homeo $f: S^2 \rightarrow P$

$\rightarrow$ (1) f の mapping cylinder C_f は 3-manifold.

(2) $G = f^{-1}(S_2(P))$

(3) $v(G) = f^{-1}(S_3(P))$, 但し $v(G)$ は G の頂点の集合を示す。

を満たす時であると定める。この時, $f \in (S^2, G)$ 又は G の P に関する *identification* と云う。 S^2 の subset X, Y に対して $f(X) = f(Y)$ の時, $X \sim Y$ と書く事もある。

Remark. S^2 を 3-ball B の boundary と考えて

$$W = B \cup C_f$$

と置けば, W は closed 3-manifold で, P は W の spine になっている。

f としては, 元来, 整形された collapsing map の制限を想定している訳だから, G も相応の条件を具えている。

即ち, G は Prop. 6 を満たす所からスタートする。

$S^2 - G$ の connected component X が p 角形であると言うのは次のように考える事にする。

G の S^2 に於ける regular neighborhood を N として, $\varphi: N \rightarrow G$ を整形された collapsing map の N への制限とおく。

- (1) $\varphi^{-1}(\nu(G)) \cap X$ を X の頂点と云って $\nu(X)$ と書く。
- (2) $\varphi^{-1}(e(G)) \cap X$ を X の edge と云って $e(X)$ と書く。
- (3) X が p 角形と言うのは $\#\nu(X) = p$ の事と定める。

Prop. 7. $\exists p$ 角形 $X \rightarrow 1 \leq p \leq 5$.

この証明は殆ど明らかなのであるが、後々結構役に立つ事がある。

Prop. 8. $\forall p$ 角形 $X, \exists \perp p$ 角形 X'
 $\rightarrow X \sim X', X \cap X' = \emptyset$.

$S_2(P)$ を、頂点 $S_3(P)$, edge は頂点によって自然に定まる 4-regular oriented graph と考える。それに伴って G の orientation は、常に、 f によって $S_2(P)$ の orientation から自然に定まるものと考える事がある。同様に、 $S^2 - G$ の connected component X の edge $e(X)$ にも φ によって G から自然に orientation を定める事が出来る。

$v(G) \cup e(G)$ の element a に対して、 a の "名前" は $f(a)$ であると言って、図には $f(a)$ を書き込んでおけば (S^2, G) の identification の様子を示す事が出来る。

同様に、 $v(X) \cup e(X)$ に対しても φ を用いて名前を付けて置く。

次に、 X の名前 $[X]$ について説明する。

まず、 $\cup e(X)$ にある orientation $\circ$ を与える。 $e(X)$ の

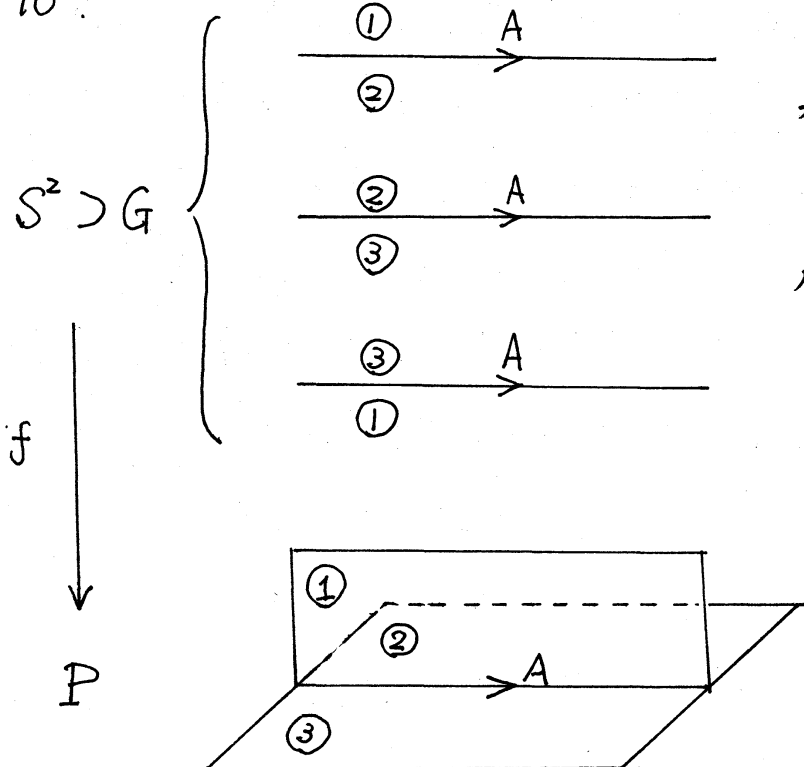
element a の orientation が θ と一致している時には $f(a)$, そうでない時には $(f(a))^{-1}$ を a に対応させる。

X のある edge a から始めて, θ に従って順次 $f(a)$ 又は $(f(a))^{-1}$ を並べたものを $[X]$ で表わす。当然の事であるが, start する edge a 及び θ の選び方による差異は全て identify するものとする。

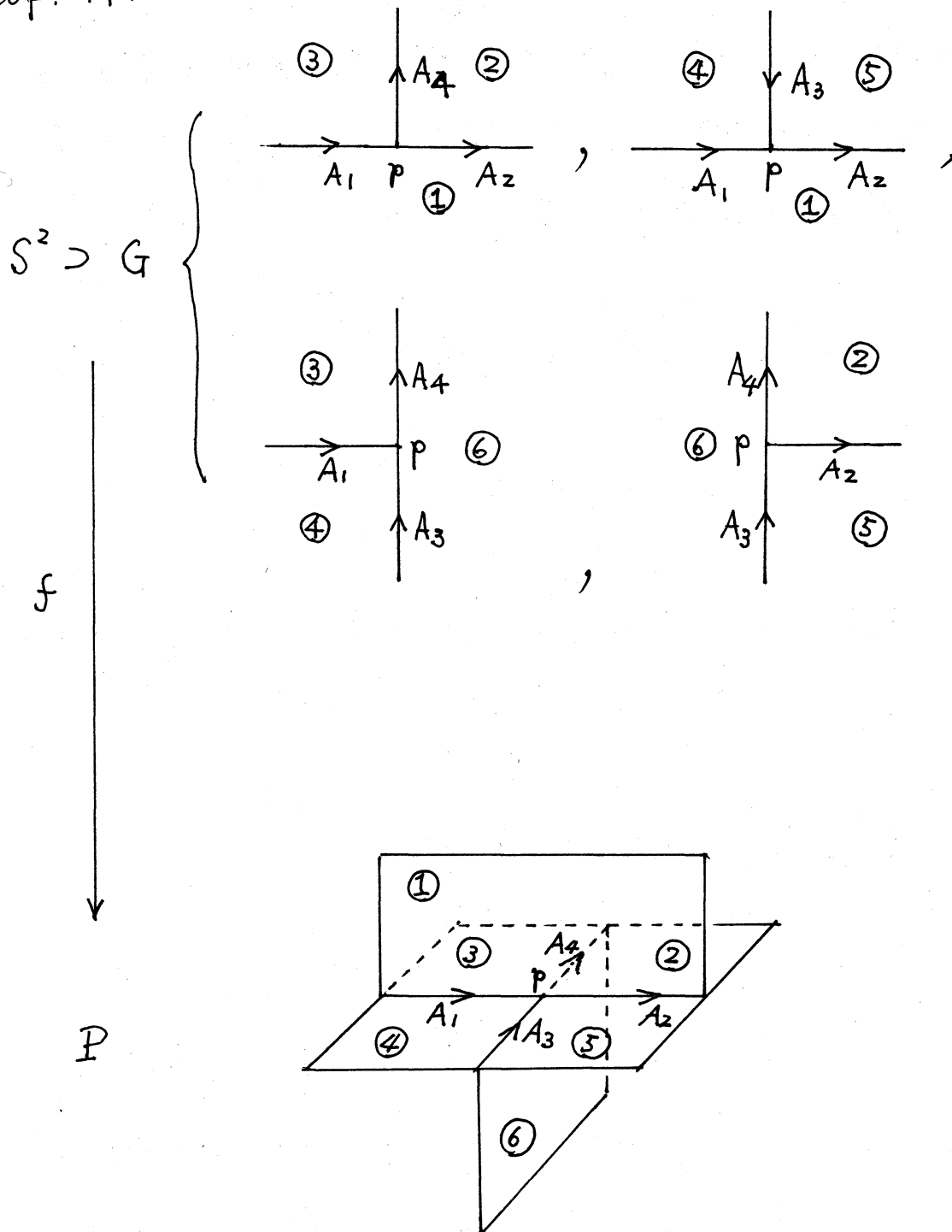
$$\text{Prop. 9. } X \sim X' \iff [X] = [X']$$

これを示すには色々調べておく必要がある。

Prop. 10.



Prop. 11.



G には、同じ名前の頂点が丁度 4 個、又、同じ名前の辺は丁度 3 本ある。

3. A と云う名前を持つ edge の (S^2, G) に於ける位置の問題を考える。 $S^2 - G$ の同じ名前を持つ disks を X^+ , X^- , その名前を $[X]$ と書く。又 $\bar{X}$ は X の S^2 に於ける closure を表わすものとする。

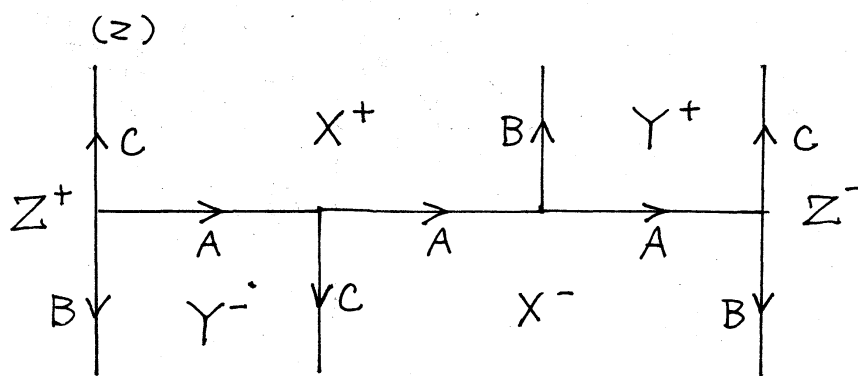
Prop. 12. $[X] \neq AA^{-1} \dots$

Prop. 13. $[X] \neq A^3 \dots$

Prop. 14 $\exists X \ni [X] = A^2 \dots$ 又は $[X] = A$
 $\Leftrightarrow A$ は $S_2(P)$ の loop.

Prop. 15. $[X] = A^2 w$

$\Rightarrow$ (1) $w \neq \emptyset$



orientation を調整して, $B=C$ となる事もあるが, その場合は後述の通り完全な分類

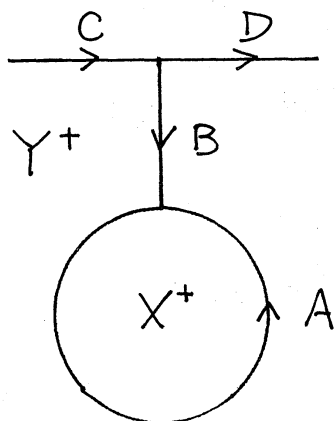
が出来る。

(3) w に A が現われる時 $X^+ = Y^+$, $X^- = Y^-$

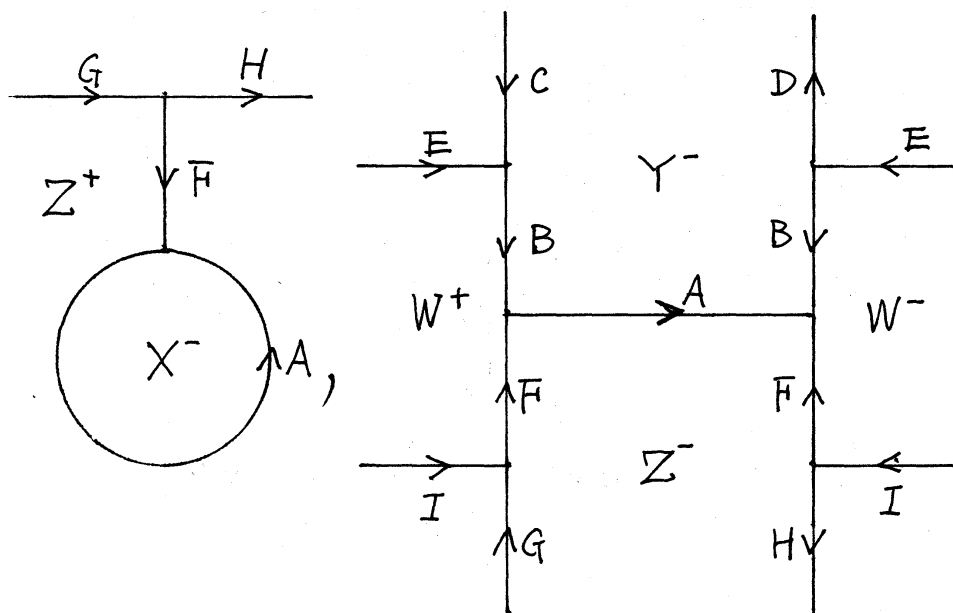
(4) w に A が現われないうち $X^+ \neq Y^+$, $X^- \neq Y^-$

Prop. 16. $[X] = A$

即ち,



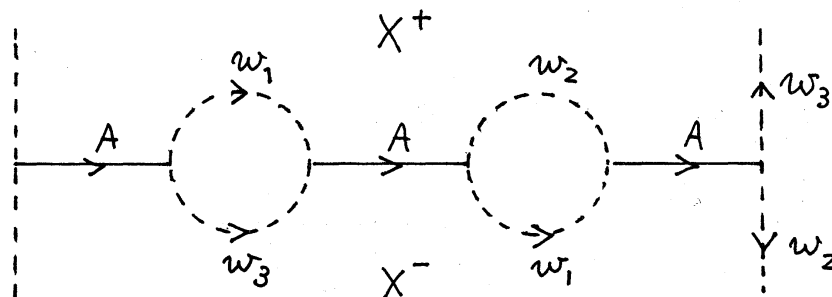
$\Rightarrow$



Prop. 17. A は $[X]$ に 3 回現われて, $[X] \neq A^2 \dots$.

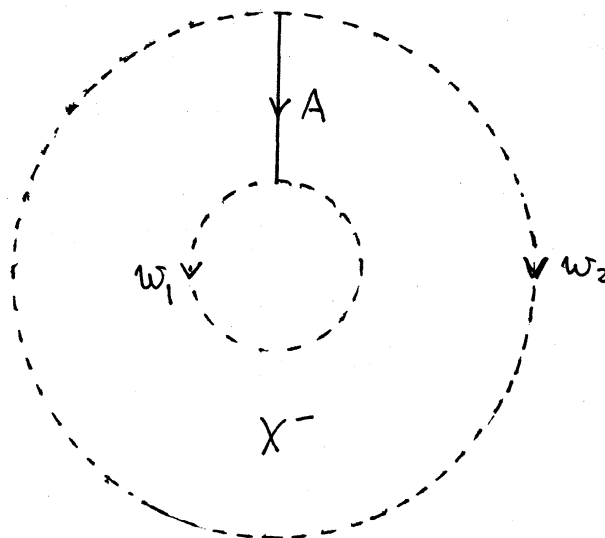
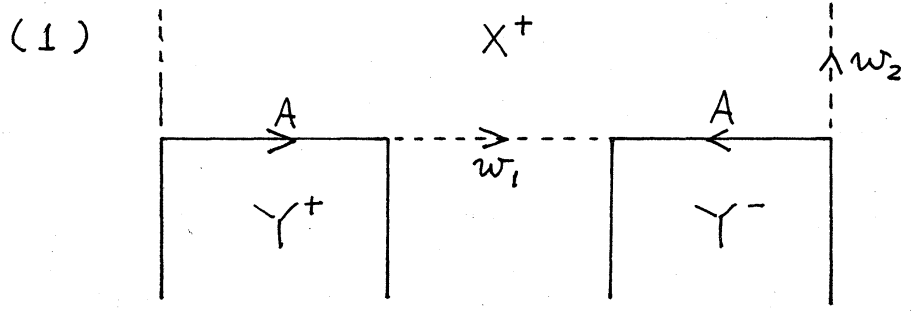
$$\Rightarrow [X] = A w_1 A w_2 A w_3, \quad w_i \neq \emptyset.$$

かつ,

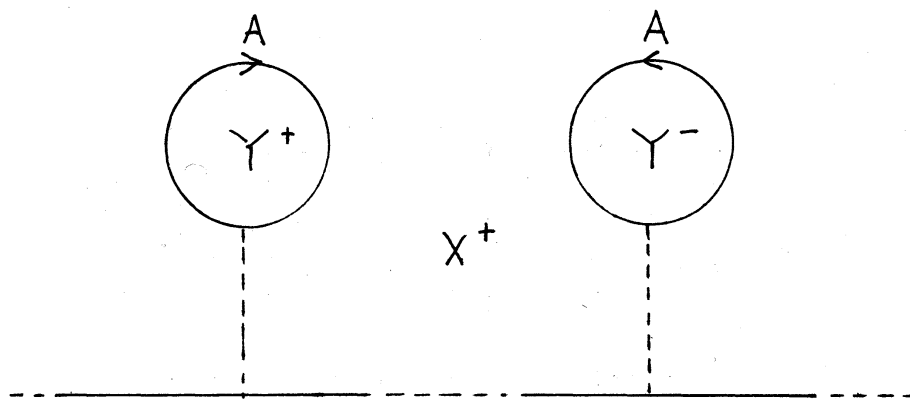


Prop. 18. $[X] = A w_1 A^{-1} w_2$

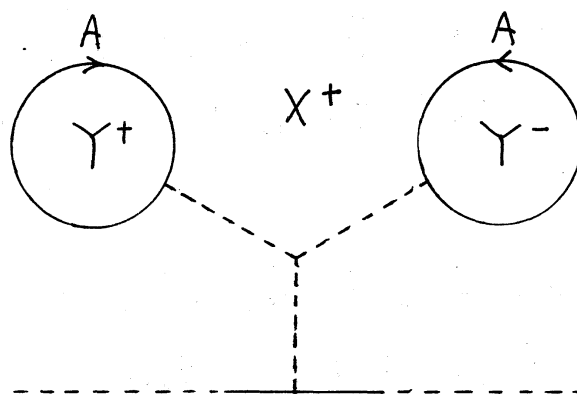
$\Rightarrow$



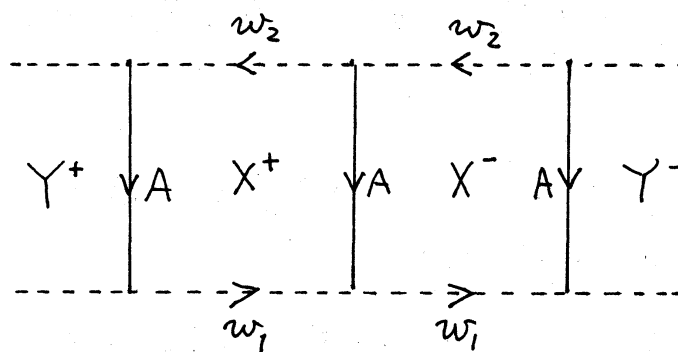
(2) X^- に於ける A の状態は (1) と同じ,



(3) X^- に於ける A の状態は (1) と同じ,

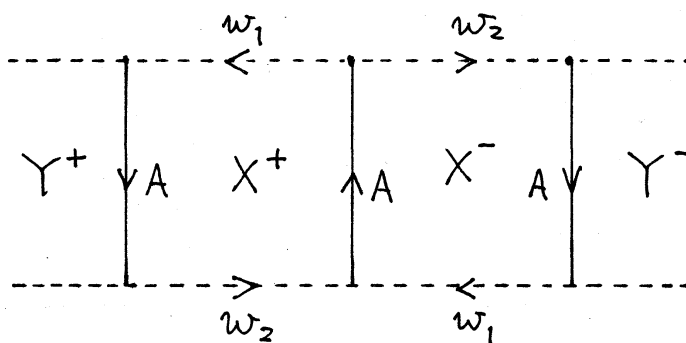


(4)



Prop. 19. $[X] = A w_1 A w_2$, $w_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow$



Prop. 20. $[X]$ には同じ名前の edge は 2 度現れない。

$\Leftrightarrow$ (1) $\bar{X}^+$, $\bar{X}^-$ は共に 2-ball

(2) $\bar{X}^+ \cap \bar{X}^- = \emptyset$

Prop. 21. $[X] = A w_1 A^{-1} w_2$ となる A が存在しない。

$\Rightarrow \bar{X}^+, \bar{X}^-$ は共に 2-ball。

次の Proposition は本当は最初の方に書くべきであった。

Prop. 22. $\bar{X}^+ \cap \bar{X}^- \neq \emptyset$ のとき。 A を $\bar{X}^+ \cap \bar{X}^-$ に含まれる edge とする。

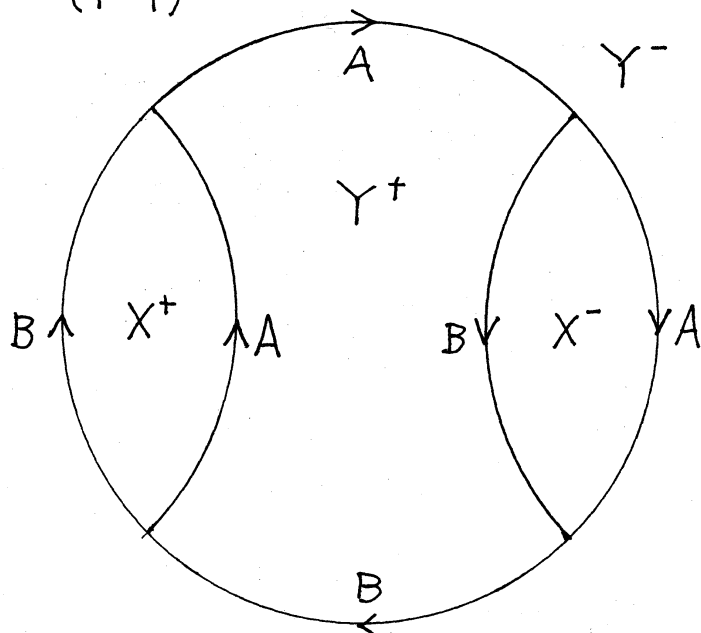
$\Rightarrow A$ は $[X]$ に 2 回以上現れる。

かつ、 A が 1 度 2 本 $\bar{X}^+ \cap \bar{X}^-$ に含まれる状態は起らない。

4. 先述の通り, ここでは具体例を示す。

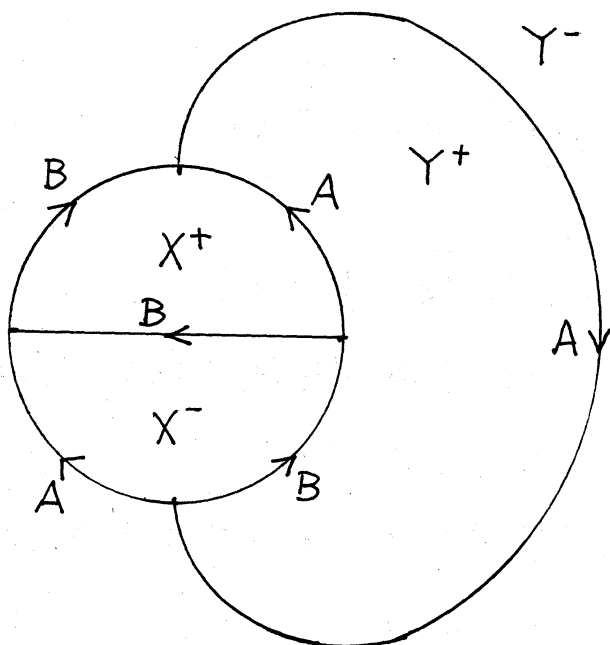
(1) $S_3(P)$ が一点の場合, G は 4 頂点である。

(1-1)



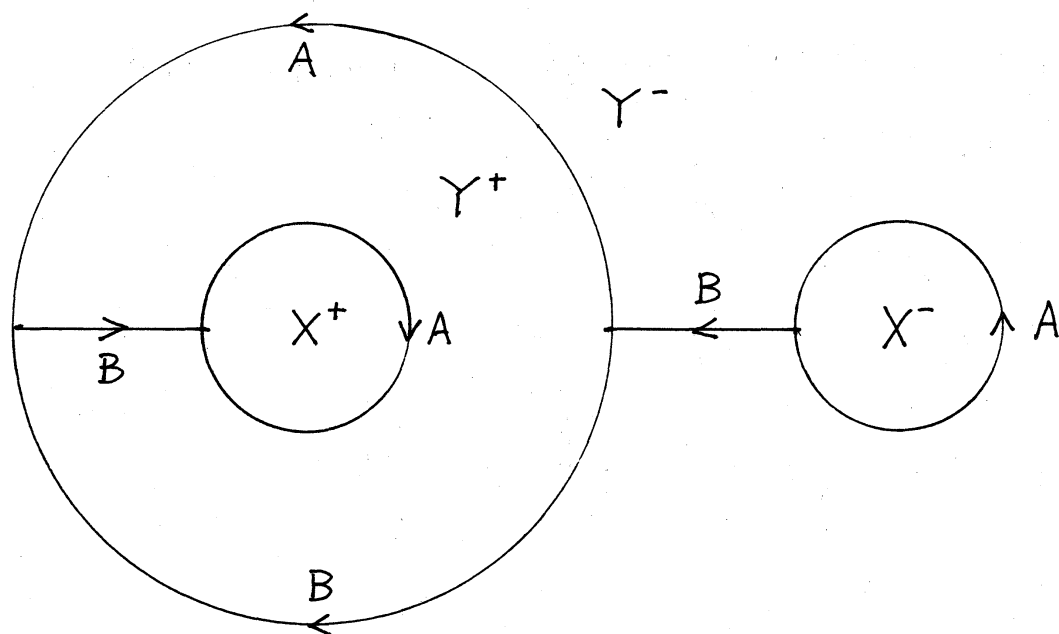
$$\pi_1 = \mathbb{Z}_4$$

(1-2)



$$\pi_1 = \mathbb{Z}_5$$

(1-3)

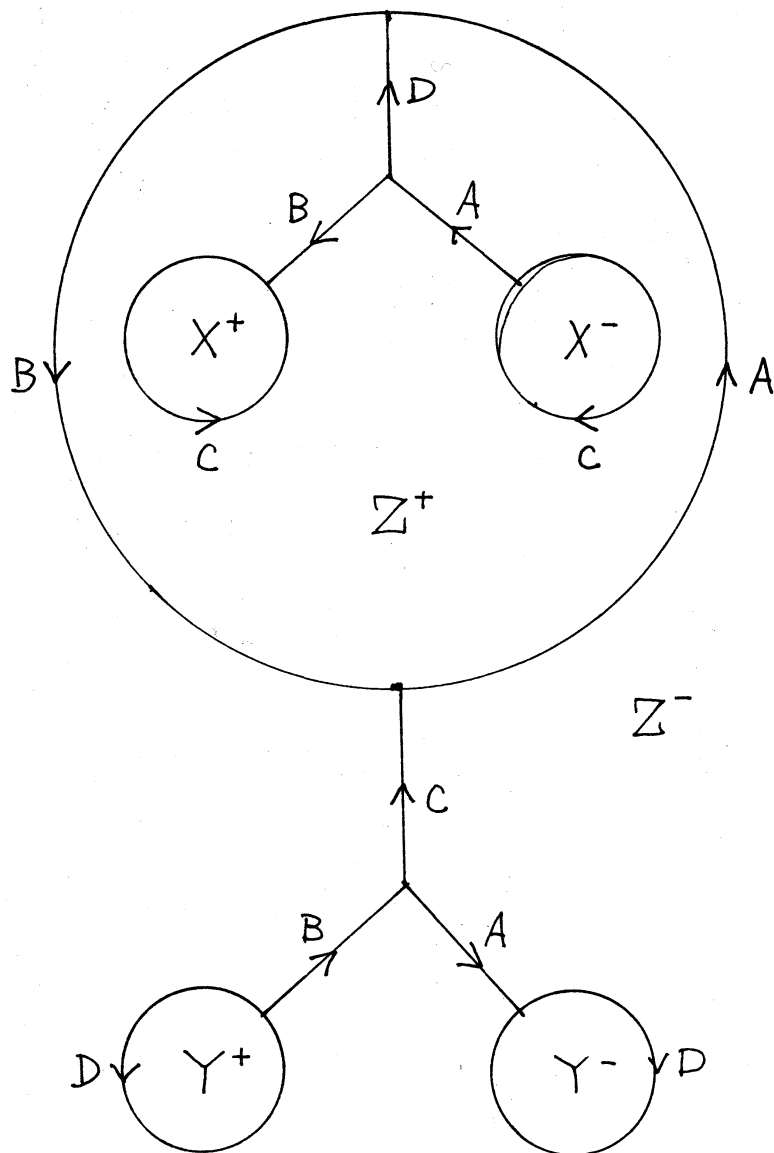


$$\pi_1 = 1$$

以上で, 4頂点 D-S graph 全てが尽されている。

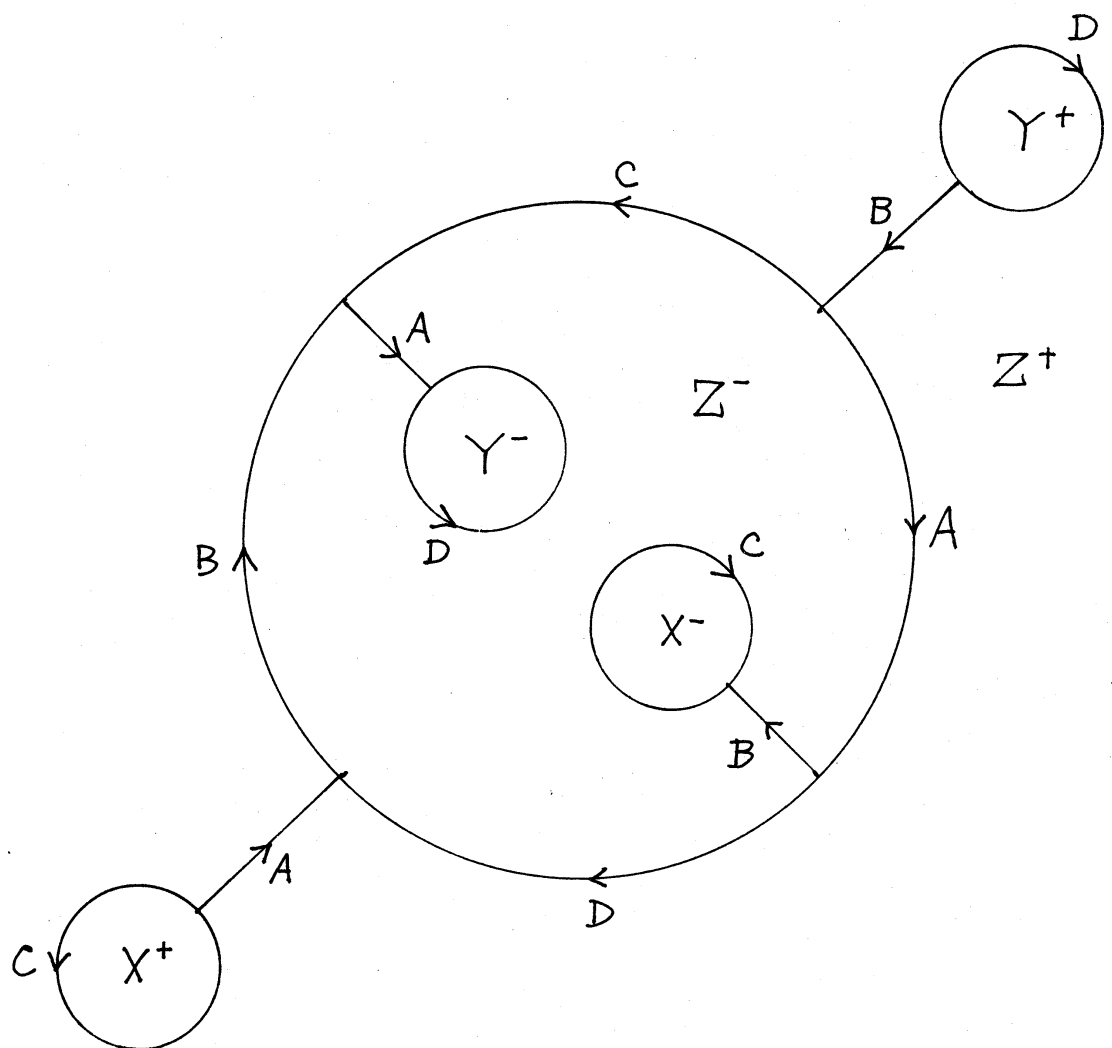
(2) 8頂点 D-S graph を全て挙げる。computer を用いて, 8頂点 3-regular graph の同型類を求め, その中から, connected planar なものを選び出す。加えて, S^2 への embedding で Prop. 8. を満たすものを許容する graph のみを採用する。最後に, その embedding に対して, "名前"をうまく付ける, という作業を行なった結果である。

(2-1)



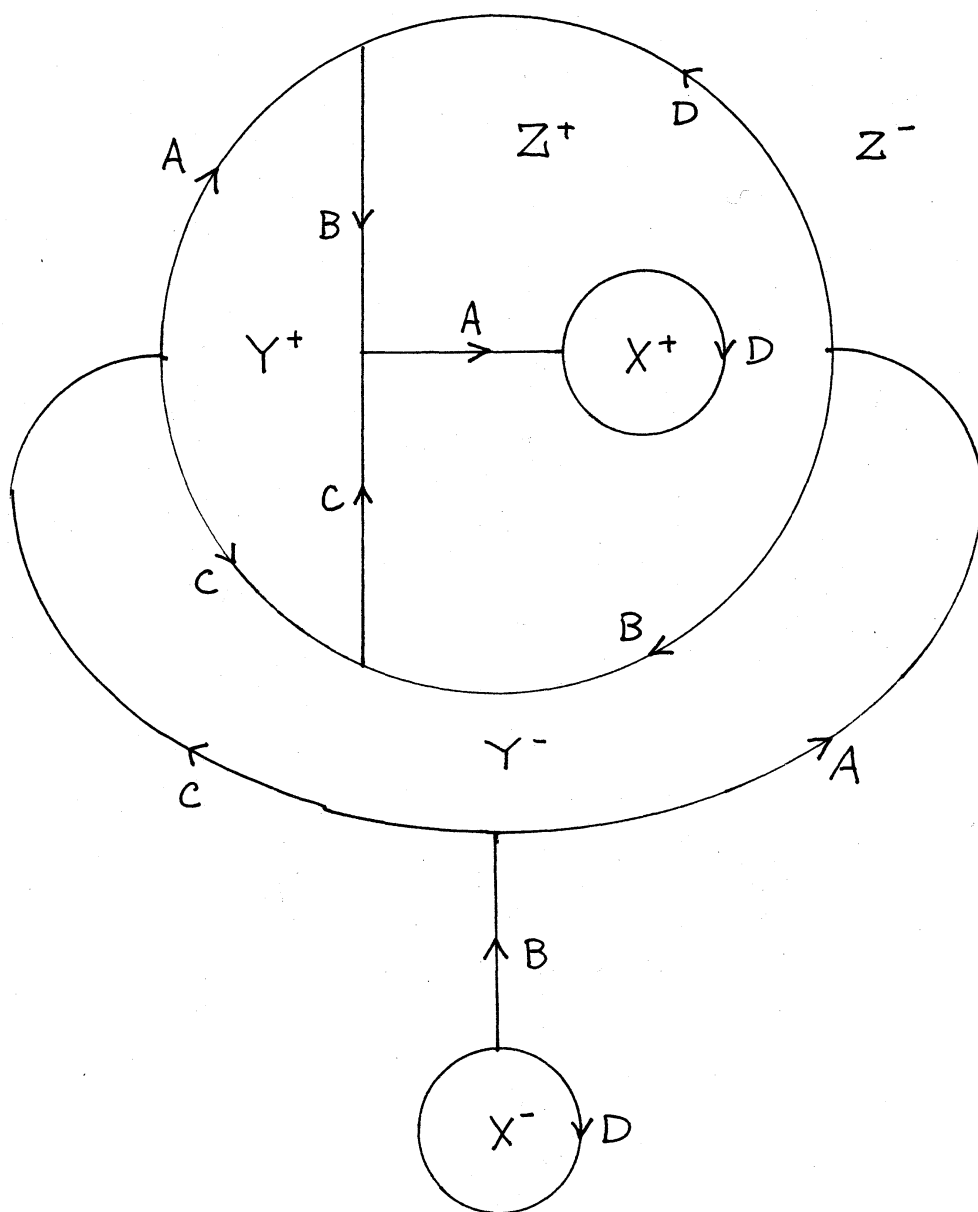
$$\pi_1 = 1$$

(2 - 2)



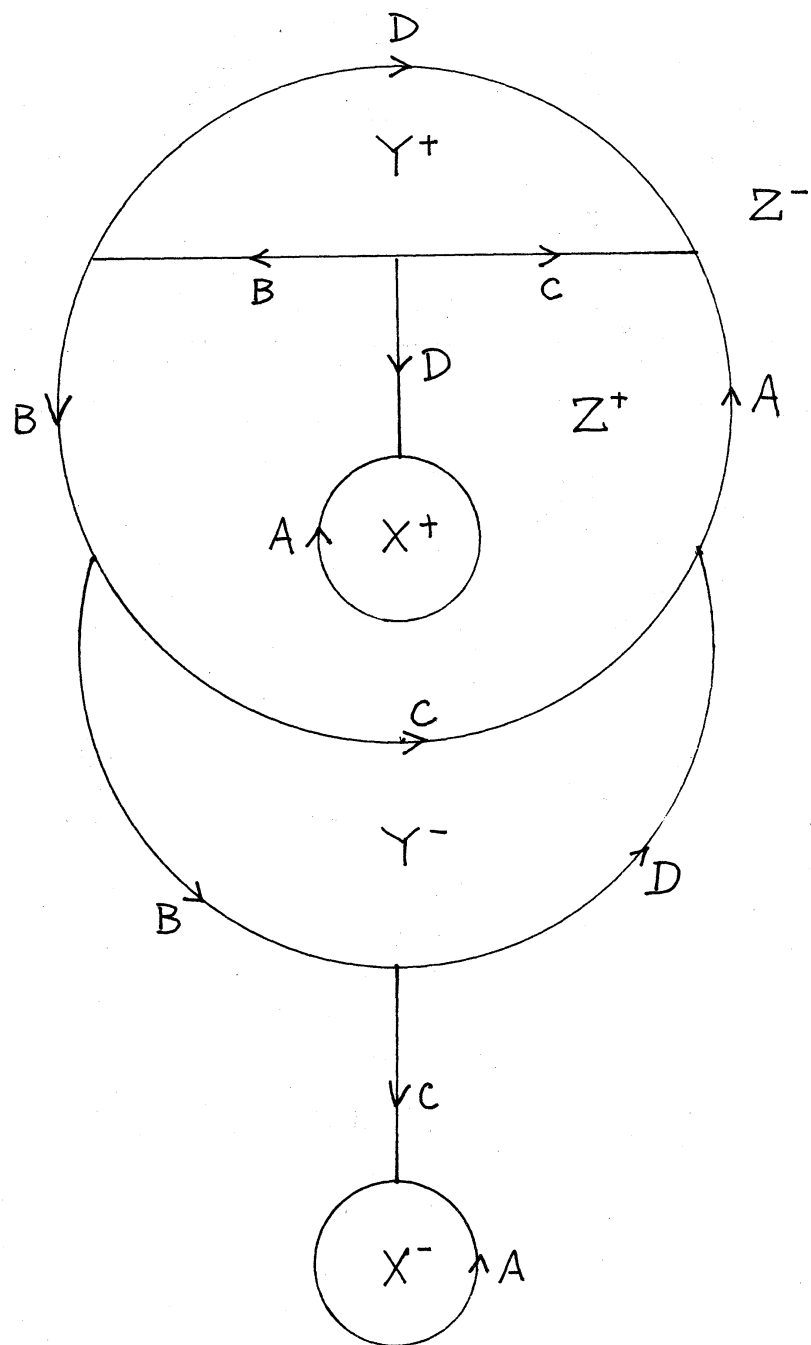
$$\pi_1 = 1$$

(2-3)



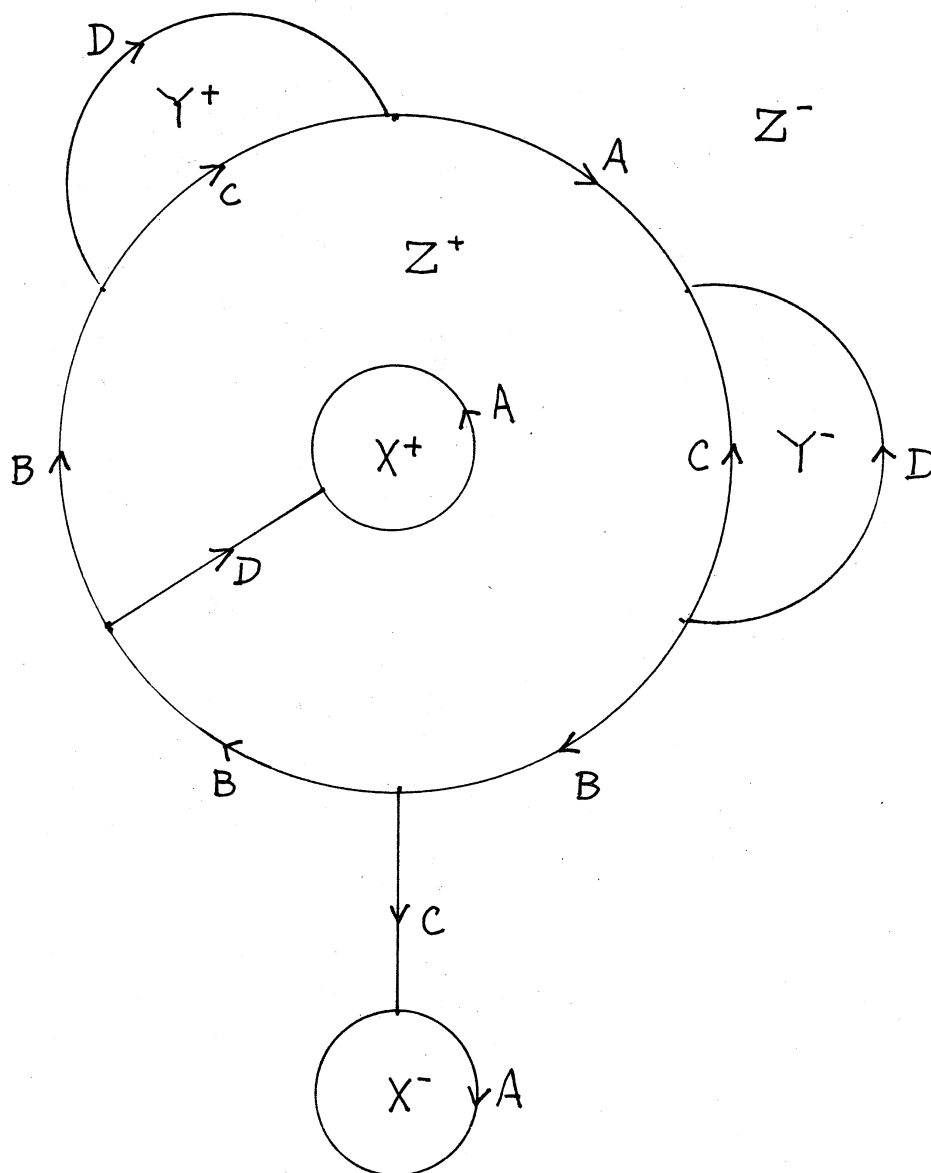
$$\pi_1 = 1$$

(2-4)



$$\pi_1 = \mathbb{Z}_2$$

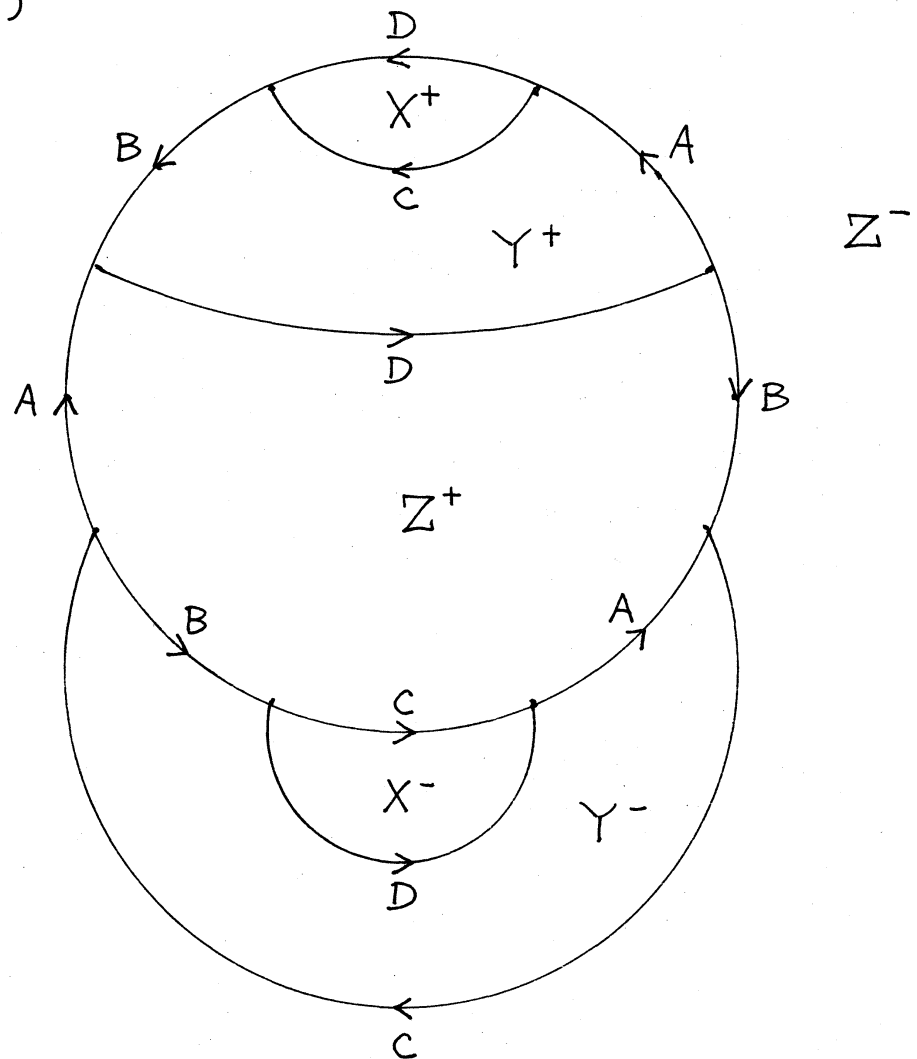
(2-5)



$$\pi_1 = \mathbb{Z}_3$$

$$H_2 = 0$$

(2-6)

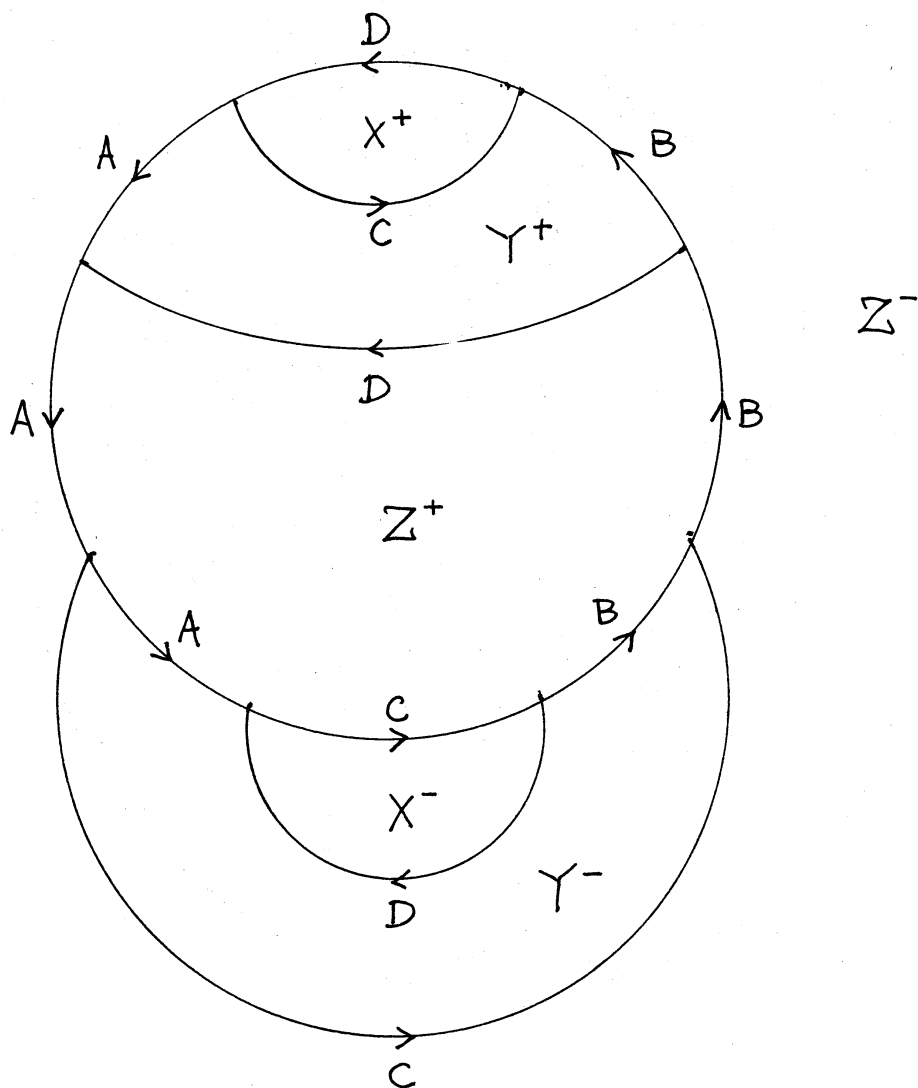


$$\pi_1 = \mathbb{Z}$$

non-orientable

$$H_2(W) = \mathbb{Z}_2$$

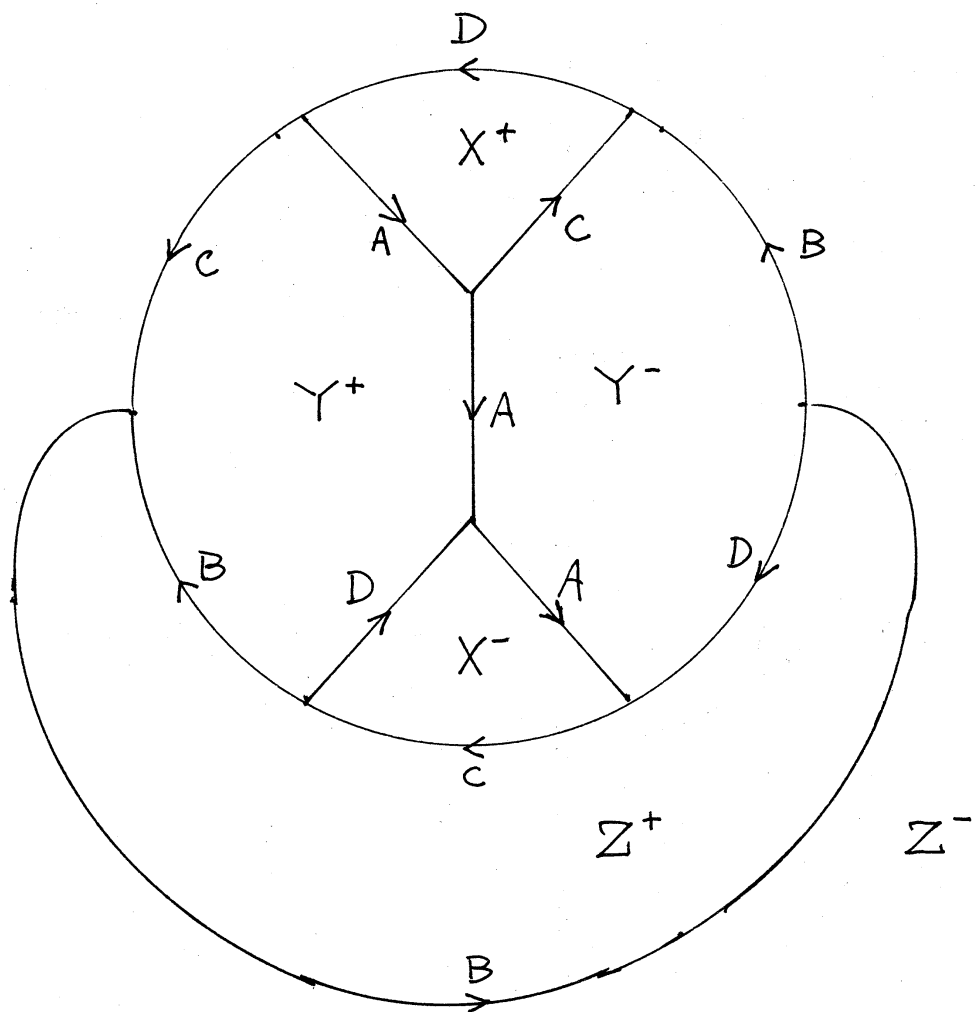
(2-7)



$$\pi_1 = \mathbb{Z}$$

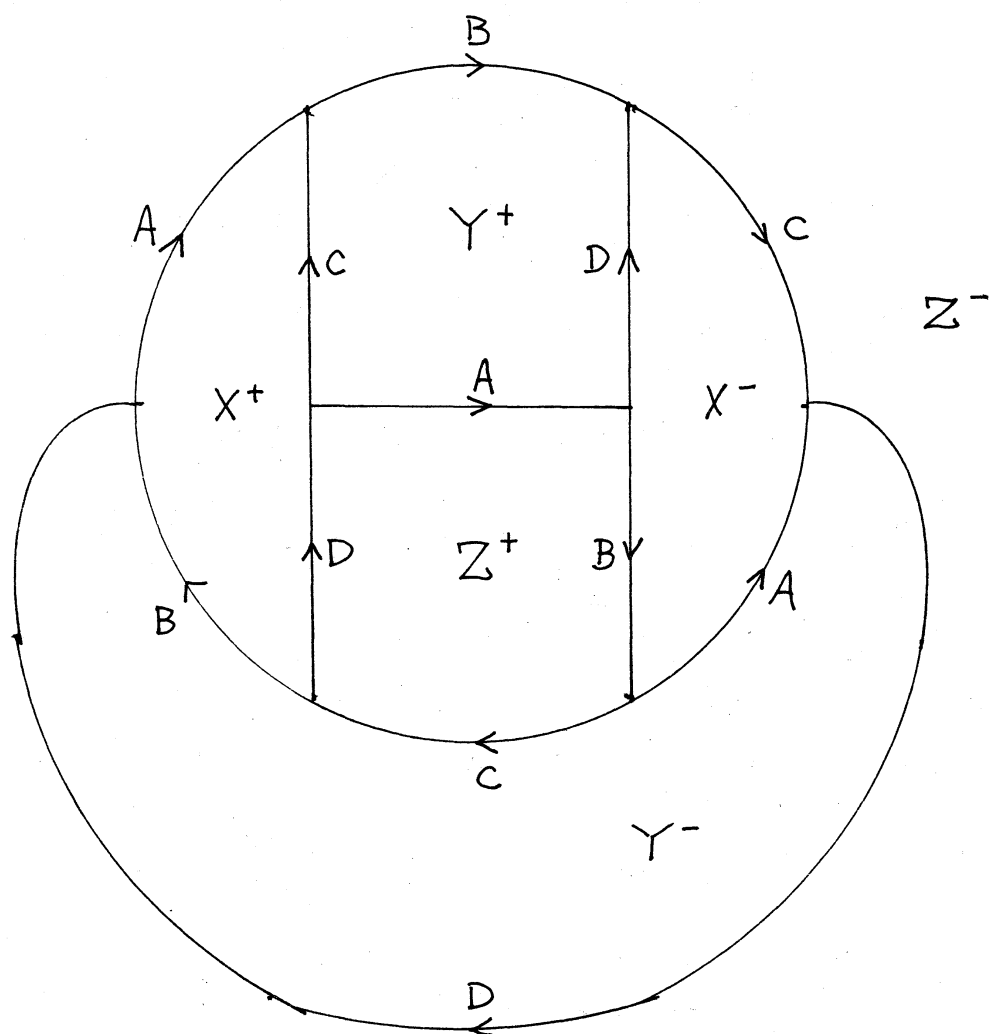
$$H_2(W) = \mathbb{Z}$$

(2-8)



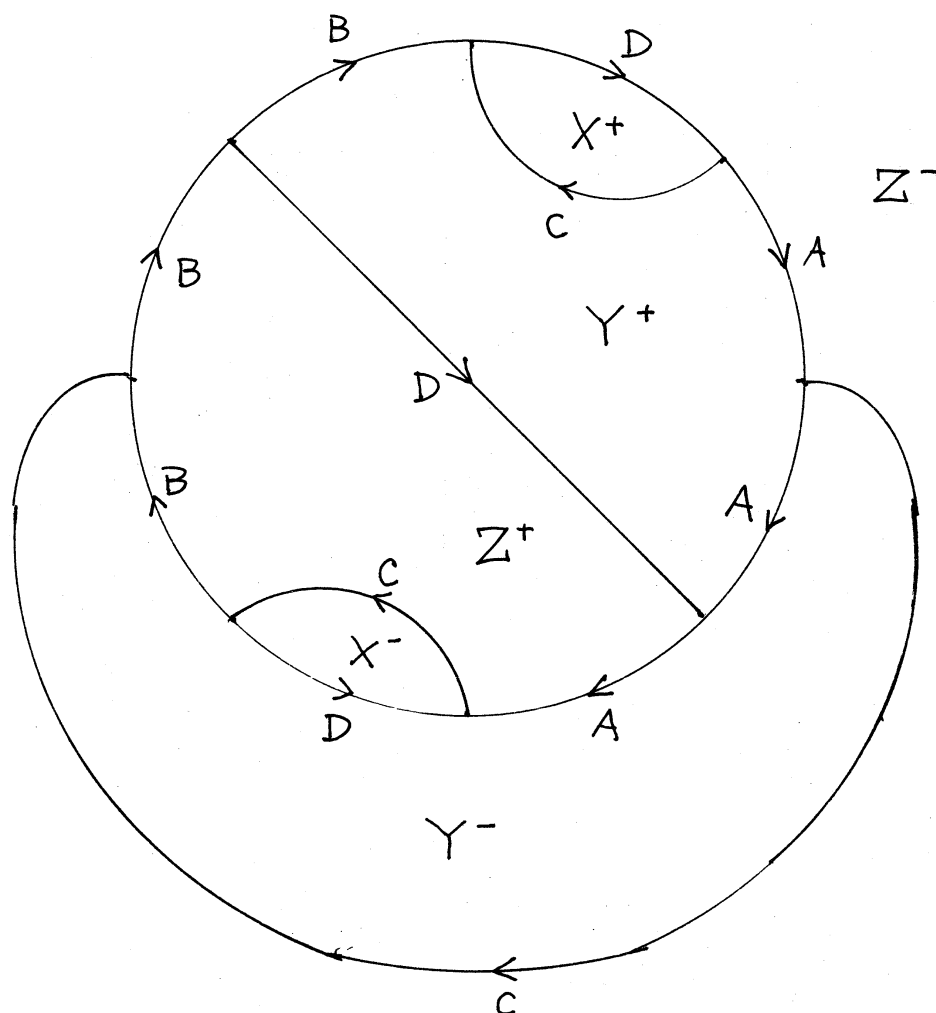
$$\pi_1 = \mathbb{Z}_7$$

(2-9)



$$\pi_1 = \{g_1, g_2; g_1 g_2 g_1 g_2^{-1}, g_2 g_1 g_2 g_1^{-1}\}$$

(2-10)



$$\pi_1 = \mathbb{Z}_3$$

$$H_2 = 0$$

(注) 3-manifold は (2-5) と homeo. 証明は
山下, 横山両氏の手法で出来る。

以上で、8頂点 $D-S$ graphs を全て公開した。ここから先、道は幾通りもあると思われる。その中、一つのメインストリートであろうと思われる、同じ manifold を与える $D-S$ graphs の相互関係については、山下正勝(東洋大・工)、横山和夫(上智大・理工)の両氏が本巻で述べている。

そろそろ紙にも見放されそうなので、昨年度の事件を記して置く。石井一平氏(慶応大・理工)による "Flow から来た Spine" である。そこでもたらされる fake surfaces は注目に値する良質のものである。本稿との関連に限って見ても、氏の言う normal pair は $D-S$ graphs と異常接近しているので、その情報を旨く引き出せば、 $D-S$ graphs を相当程度に決定してしまう可能性を秘めている。3次元多様体の標準形は new type の fake surfaces で与えられるかも知れない。石井氏の idea は不老不死かしら？