

Boltzmann 及び Schrödinger 作用素の固有値問題

京大 理学部 内山 淳

次のような形の積分作用素のスペクトルを調べよう。

$$(1) \quad (Hf)(x) = V(x) \cdot f(x) + \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy \equiv (Vf)(x) + (Kf)(x)$$

ここで次の仮定を置く。

仮定 1 $V(x)$ は実数値函数で、かつ $V(x) \in C^0(\Omega)$ である。さらに $L^2(\Omega)$ における乗法作用素 V の domain は、 $\mathcal{D}(V) = \{f \in L^2(\Omega), V(x)f(x) \in L^2(\Omega)\}$ とする。(Ω は R^m の domain である。)

$$\text{仮定 2} \quad \lim_{x \in \Omega} V(x) = 0$$

仮定 3 $\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}(V)$ とすると、 K は $L^2(\Omega)$ の対称作用素である。

仮定 4 集合 $\{x \in \Omega: V(x) = 0\}$ の Lebesgue measure は 0 である。

仮定 5 $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(V)$ とするとき、 H は $L^2(\Omega)$ の自己共役な作用素である。

(1) のような形の作用素で、これらの仮定をみたす作用素は、応用に際して、かなりしばしば現れる。たとえば、linearized Boltzmann operator 及び Schrödinger 作用素を Fourier 変換して得られる作用素もこの type に属する。またいわゆる Friedrichs model もそうである。この種の作用素の連続スペクトルに関しては、Friedrichs [3] や Faddeev [2] などにより、調べられているが、その離散固有値に対しては、系統的に調べたものがないように思われるので、それを少し調べよう。

次の定理は, Birman [1] によ, て得られしものと, 類似であるが, Birman [1] は, Hermitian form を用いて述べたところから, 我々は, 作用素を用いて述べよう.

定理 1

$$(2) \quad (Hf)(x) = \int_{\Omega} \frac{K(x,y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}} f(y) dy$$

で定義された作用素 H_0 は, $L^2(\Omega)$ の有界自己共役作用素であるならば,

$$(2) \quad S(H; -\infty, 0) = S(G_0; -\infty, -1) \text{ である.}$$

ただし, A を自己共役作用素としたとき, $S(A; a, b) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{E_A(b+\epsilon) - E_A(a)\} L^2(\Omega)$ である.

(証明) $S(G_0; -\infty, -1) = n < +\infty$ とある. すると

$$\exists \{g_i\}_{i=1, \dots, n} \subset L^2(\Omega), \quad G_0 g_i = \lambda_i g_i, \quad \lambda_i < -1.$$

である. ところで, $V^{\frac{1}{2}}|_{\mathcal{D}(V)}$ は essentially selfadjoint であるから $V^{\frac{1}{2}} > 0$ より, $V^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}(V)$ は $L^2(\Omega)$ で dense である. よ, $\mathcal{C}$.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \{f_i\}_{i=1, \dots, n} \subset \mathcal{D}(V), \quad \|V^{\frac{1}{2}}f_i - g_i\| < \epsilon,$$

が成り立つ. すると

$$\begin{aligned} & |((G_0 + I)V^{\frac{1}{2}}f_i, V^{\frac{1}{2}}f_j) - ((G_0 + I)g_i, g_j)| \\ & \leq (\|G_0\| + 1)(2 + \epsilon)\epsilon \end{aligned}$$

を得る. いま, $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i \in \mathcal{D}(V)$, $\sum_{i=1}^n |a_i| \neq 0$ とおくと, $G_0 \supset V^{-\frac{1}{2}} K V^{-\frac{1}{2}} \subset \mathcal{D}(V^{-\frac{1}{2}} K V^{-\frac{1}{2}}) = V^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}(V)$ であるから,

$$\begin{aligned} (Hf, f) &= (Vf, f) + (Kf, f) = ((G_0 + I)V^{\frac{1}{2}}f, V^{\frac{1}{2}}f) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \{ \lambda_i + 1 + (n+1)(\|G_0\| + 1)(2 + \epsilon)\epsilon \} \end{aligned}$$

を得る. よ, $\mathcal{C}$. $\lambda_i + 1 + (n+1)(\|G_0\| + 1)(2 + \epsilon)\epsilon < 0$ となるように

と十分小さくとれば, $(Hf, f) < 0$ と得る。よ, $S(H; -\infty, 0) \geq S(G_0; -\infty, -1)$ と得る。ゆ, $S(H; -\infty, 0) > S(G_0; -\infty, -1)$ とする。

2. $\exists f_0 \in \mathcal{D}(V)$, $f_0 \neq 0$, $V^{\frac{1}{2}} f_0 \perp E_{G_0}(-1-0)L^2(\Omega)$, $(Hf_0, f_0) < 0$

と得る。といるで,

$$(Hf_0, f_0) = \|V^{\frac{1}{2}} f_0\|^2 + \int_{-1-0}^{\|G_0\|} \lambda d\|E_{G_0}(\lambda) f_0\|^2 \geq 0$$

であるが矛盾である。よ, $S(H; -\infty, 0) = S(G_0; -\infty, -1)$ が示され。 $S(G_0; -\infty, -1) = \infty$ のときにも, 同様にして, 示すことができる。(q.e.d.)

これより, 容易に次の表が成り立つことが分かる。

系 特に G_0 が完全連続作用素ならば, H は F に有界で, $\sigma_e(H) = \sigma_e(V)$ 且, $(-\infty, 0)$ には, H は高々有限個の discrete eigenvalue をもつのみである。

さて, 次に, これを用いないで, $S(H; -\infty, 0) = +\infty$ となるための一つの十分条件を与えよう。(但し, $\sigma_e(H) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$ である。) そのために, 次の lemma を与えておこう。それは, 容易に証明することができる。

lemma. $\omega \subset \Omega$ とする。

$$(4) \quad (H_\omega f)(x) = V(x) \cdot f(x) + \int_\omega K(x, y) f(y) dy \quad (x \in \omega)$$

とし, $\mathcal{D}(H_\omega) = \{f(x) \in L^2(\omega); V(x)f(x) \in L^2(\omega)\}$ とすると, H_ω は $L^2(\omega)$ の自己共役作用素であるとする。すると,

$$(5) \quad S(H; -\infty, 0) \geq S(H_\omega; -\infty, 0).$$

この lemma により, H の $(-\infty, 0)$ における discrete eigenvalue の無限個存在することと示すためには, H_ω のそれと示せば十分である.

定理 2: ある点 $x_0 \in \Omega$ と, ある領域 $\omega = \{x: |x-x_0| < r_0\}$ じ, x は $x_0 \in \bar{\Omega}$ と頂点とするある円錐に属する $\} \subset \Omega$ が存在して次の条件が成り立つとする.

$$(6) \quad 0 \leq V(x) \leq C|x-x_0|^\nu \quad C \geq 0, \nu > 0.$$

$$(7) \quad K(x, y) = M(x, y) + N(x, y), \quad M(x, y) = \overline{M(y, x)}, \\ N(x, y) = \overline{N(y, x)} \quad \text{で.}$$

$$\operatorname{Re}(M(x, y)) \leq - \sum_{i=1}^N d_i |x-y|^{\beta_i} |x-x_0|^{\delta_i} |y-x_0|^{\delta_i} \\ \operatorname{Re}(N(x, y)) \leq \operatorname{const} \sum_{i=1}^{N'} |x-y|^{\beta'_i} |x-x_0|^{\delta'_i} |y-x_0|^{\delta'_i}$$

が, $|x-x_0| \leq |y-x_0|$, $x, y \in \omega$ で成り立つ. ここで

$$(8) \quad \beta_i + \delta_i + \delta_i = \nu - m, \quad \min_{1 \leq i \leq N} \beta_i + \delta_i + \delta_i = \nu - m + \varepsilon', \quad (\varepsilon' > 0).$$

$$(9) \quad \inf_{g \in W(\tilde{\omega})} \left\{ C \int_{\tilde{\omega}} |x|^\nu |g(x)|^2 dx - 2 \sum_{i=1}^N d_i \int_{\tilde{\omega}} \int_{\tilde{\omega}} |x-y|^{\beta_i} |x|^{\delta_i} |y|^{\delta_i} g(x) g(y) dx dy \right\} < 0$$

但し, $\tilde{\omega} = \{x: x = x' - x_0, x' \in \omega\}$ であり, $|x| \leq |y|$

$$W(\tilde{\omega}) = \{g(x) \in L^2(\tilde{\omega}); \|g\|_{\tilde{\omega}} \equiv \|g\|_{L^2(\tilde{\omega})} = 1, g(x) \geq 0 \text{ for } x \in \tilde{\omega}\}$$

である. また

$$(10) \quad \min_{\mu \in \sigma_e(H_\omega)} \mu = \min_{u \in \mathcal{D}(H)} u = 0,$$

$$(11) \quad K_\omega^{(2)}(x, y) = \int_{\omega} |K(x, z) K(z, y)| dz \text{ は } L^2(\omega) \text{ の有界作用素の kernel である.}$$

$$(12) \quad K_\omega^{(2)}(x, y) \leq \operatorname{const} \sum_{i=1}^{N''} |x-y|^{\beta''_i} |x'-x_0|^{\delta''_i} |y-x_0|^{\delta''_i} \text{ for } |x-x_0| \leq |y-x_0|, \\ x, y \in \omega$$

$$(13) \quad \min_{1 \leq i \leq N''} (\beta''_i + \delta''_i + \delta''_i) = \nu - m + \varepsilon'', \quad (\varepsilon'' > 0)$$

とする. このとき H は $(-\infty, 0)$ に無限個の discrete eigenvalue をもつ.

(証明) (9)の左辺の $\{ \}$ の中が負になるような $\tilde{g}_l(x) \in W(\tilde{\omega})$ を一つとってくる。そして、 $\tilde{\omega}$ の外では0にしておく。今 $\tilde{g}_l(x) = l^{\frac{m}{2}} g_l(lx)$ とおき、 $g_l(x) = \tilde{g}_l(x-a)$ とおくと、(6)~(9)より

$$(H_{\omega} g_l, g_l)_{\omega} = -k_0 l^{-\nu} + \text{const } l^{-\nu-\varepsilon'} \text{ となる。 } (k_0 > 0)$$

よって、 l を十分大きくとれば、 $(H_{\omega} g_l, g_l) < 0$ となり、 H_{ω} は $(-\infty, 0)$ に少くとも一つ、離散固有値をもつことがわかる。今 H_{ω} が $(-\infty, 0)$ に p 個の固有値 $\{\lambda_k\}_{k=1, \dots, p}$ をもち、その正規直交固有函数を $\{\varphi_k\}_{k=1, \dots, p}$ とする。いま、

$$v_l(x) = g_l(x) - \sum_{k=1}^p \beta_l^{(k)} \varphi_k(x), \quad \beta_l^{(k)} = (g_l, \varphi_k)$$

とおくと、 $(v_l, \varphi_k)_{\omega} = 0$ ($k=1, \dots, p$) である。といて

$$|\lambda_k \beta_l^{(k)}| = |(g_l, H_{\omega} \varphi_k)_{\omega}| = |(H_{\omega} g_l, \varphi_k)| \leq |(V g_l, \varphi_k)_{\omega}| + |(K g_l, \varphi_k)_{\omega}|$$

であるから、(11)~(13)より、

$$|\beta_l^{(k)}|^2 \leq \text{const } \|V g_l\|_{\omega}^2 + \text{const } \|K g_l\|^2 \leq \text{const } l^{-2\nu} + \text{const } l^{-\nu-2\varepsilon'}$$

を得る。よって

$$(H_{\omega} v_l, v_l)_{\omega} = (H_{\omega} g_l, g_l)_{\omega} - \sum_{k=1}^p \lambda_k |\beta_l^{(k)}|^2 \leq -k_0 l^{-\nu} + \text{const}(l^{-2\nu} + l^{-\nu-2\varepsilon'} + l^{-\nu-2\varepsilon'})$$

となり、 l を十分大とすると、 $(H_{\omega} v_l, v_l)_{\omega} < 0$ となるから、(10)より、

少くとも $(p+1)$ 個は、離散固有値が $(-\infty, 0)$ に存在することがわかる。

よって帰納法により、無限個存在することがわかった。(q.e.d.)

さて、これらの application を考えてみよう。まず mono-atomic gas model に対する Boltzmann 方程式に関連して、固有値問題は、次の如くなる。

Example 1 $V(x) = b \left[\left(x + \frac{1}{2Mx} \right) I(\sqrt{M} x) + \frac{1}{\sqrt{\pi M}} e^{-Mx^2} \right].$

$$K(x, y) = -\theta^2 \left[e^{-\frac{1}{2}(\theta^2 - x^2)} \{ I(\theta x - \zeta y) \pm I(\theta x + \zeta y) \} + \right. \\ \left. e^{\frac{1}{2}(\theta^2 - x^2)} \{ I(\theta y - \zeta x) \mp I(\theta y + \zeta x) \} \right] \quad (y < x)$$

ここに

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \theta = \frac{M+1}{2\sqrt{M}}, \quad \zeta = \frac{M-1}{2\sqrt{M}}, \quad \theta > 0, \quad M > 0$$

である。すると

(i) H は次の domain を $\mathcal{D}(H) = \{ \varphi : (1+x)\varphi \in L^2(0, \infty) \}$ とするとき、 $L^2(0, \infty)$ の自共役作用素で、

(ii) $\sigma_{\text{ess}}(H) = [u, \infty)$, $(u = V(+0) = \frac{4\theta^2}{16M} > 0)$ であり、

(iii) $(-\infty, u)$ には、無限個の離散固有値と H はもつ。

実際 (i), (ii) は容易に示すことができ、(iii) は

$$V(x) = u + cx^2 + O(x^4), \quad 0 < x < 1, \quad C = \frac{1}{3} \theta \sqrt{M},$$

$$K(x, y) = K(y, x) = -dx + O(x(x^2+y^2)), \quad 1 \geq y \geq x > 0.$$

$$d = \frac{4\theta^2}{16} \theta (\theta - \zeta) = \frac{(M+1)^2}{M^2 \sqrt{M}} \theta$$

が成り立つことより、定理 2 において、 $\tilde{V} = V - uI$ と K は、 $x_0 = 0$,

$$\omega = (0, 1) \subset \Omega = (0, \infty) \subset \mathbb{R}^1, \quad \nu = 2, \quad \beta_i = \beta_i^* = \beta_i^* = \delta_i = 0,$$

$\alpha = 1$, で条件をみたすことより得られる。Kuscer-Corngold [4]

及び Uchi [5] は上記の結果を示した。我々のこの数学的には、厳密

なように思われる。

$$\text{Example 2} \quad (L_0 \tilde{f})(x) = \sum_{k=1}^3 \left(i \frac{\partial}{\partial x_k} + b_k(x) \right)^2 f(x) + g_0(x) f(x)$$

とする。ここに、 $b_k(x) \in \mathcal{B}^1(K)$, $g_0(x) \in L_{\text{loc}}^1(K)$ は実数値函数で、

$b_k(x)$, $\frac{\partial}{\partial x_k} b_k(x)$, $g_0(x)$ は $|x| \rightarrow \infty$ のとき、一様に 0 に近づくとする。

このとき、

(i) $\mathcal{D}(L_0) = \mathcal{D}(\hat{L}(K))$ とすると, L_0 は $\hat{L}(K)$ の自己共役作用素である。

(ii) $\sigma_c(L_0) = L_0, \infty)$,

(iii) ある $\alpha > 0$ に對して, $\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^3 \phi_k^2(x) + \frac{1}{1+\alpha} \phi_0(x) \leq -\frac{1}{|x|^2}$ が $|x| \geq R_0$

で成り立つならば, L_0 は $(-\infty, 0)$ に無数個の discrete eigenvalue をもつ。

但し, $C \geq \inf_{g \in W(\omega)} 4\pi \int_{\omega} |x|^2 |g(x)|^2 dx \left[\int_{\omega} \int_{\omega} \frac{g(x)g(y)}{|x-y|} dx dy \right]^{-1}$, $\omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$ である。

(b) ある $1 > \alpha > 0$ に對して, $|x| \geq R_0$ で: $\frac{1}{1-\alpha} \phi_0(x) - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^3 \phi_k^2(x) \geq -\frac{\text{const}}{|x|^{2+\varepsilon}}$

ならば, L_0 は $(-\infty, 0)$ に高々有限個の discrete eigenvalue をもつ。 (より得られ)

実際 (i), (ii) はよく知られており, (iii) は定理 1, 2 を応用すること

$$\text{実際 } g_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^3 \phi_k^2(x) + \frac{1}{1+\alpha} \phi_0(x) & : |x| \leq R_0 \\ -\frac{1}{|x|^2} & : |x| > R_0 \end{cases} \quad L_1 = -\Delta + g_1(x)$$

$$g_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \phi_0(x) - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^3 \phi_k^2(x) & : |x| \leq R_0 \\ -\frac{\text{const}}{|x|^{2+\varepsilon}} & : |x| > R_0 \end{cases} \quad L_2 = -\Delta + g_2(x)$$

とおくと, $L_0 \leq (1+\alpha) L_1$, $L_0 \geq (1-\alpha) L_2$, である。とすると,

$$(H_1 \hat{f})(\xi) = \mathcal{F}(L_1 f)(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi) + \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}_1(\xi-\eta) \hat{f}(\eta) d\eta.$$

$$(H_2 \hat{f})(\xi) = \mathcal{F}(L_2 f)(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi) + \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}_2(\xi-\eta) \hat{f}(\eta) d\eta.$$

である。そこで, $|\xi-\eta| \leq 2$ に對して,

$$\hat{g}_1(\xi-\eta) = -\frac{C\pi}{|\xi-\eta|} + O(1), \quad |\hat{g}_2(\xi-\eta)| \leq \frac{\text{const}}{|\xi-\eta|^{1-\varepsilon}}$$

を得るから, H_1 に對しては定理 2 において, $\nu=2$, $\rho_0=-1$, $\alpha_1=\alpha_2=0$ とお

いて, 条件がみたされしており, H_2 に對しては, G_0 の Hilbert-Schmidt 型

にたつことがわかる。よって, 求める結果が得られた。

Example 3. $(Hf)(x) = x \cdot f(x) + \int_0^\infty K(x, y) f(y) dy$ で,
 $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, $|K(x, y)| \leq \text{const} (1+x+y)^{-\theta} (\theta > \frac{1}{2})$, $|K(x, y)| \leq$
 $\text{const} |y|^\mu (\mu > 0) (0 \leq x, y \leq 1)$.

に対しては, $\sigma_e(H) = [0, \infty)$ で, $(-\infty, 0)$ には, H は高々有限個の離散
 固有値しかもたない。実際, 定理 1 の G_0 はこの場合, Hilbert-Schmidt に
 なる。(これは Faddeev [2] の Friedrichs model である。)

Example 4. $(Hf)(x) = |x|^2 \cdot f(x) + \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy$ ($n \geq 3$) で,
 $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, $|K(x, y)| \leq \text{const} (1+|x-y|)^{-n-2} (2 > 0)$ に対して
 は, $\sigma_e(H) = [0, \infty)$ で, $(-\infty, 0)$ には高々有限個の discrete eigen-
 value しかもたない。実際 G_0 は, Hilbert-Schmidt になるとは限らない
 が, 完全連続作用素になることを示すことができるからである。(これは,
 Ushijima [6] が, 研究した model であるが, 彼は $\sigma_e(H) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$ しか
 示していない。)

References:

- [1] Birman, M. Š; Mat. Sb. 55 (97) (1961), 125-174.
- [2] Faddeev, L. D.; Trudy. Inst. in. V. A. Steklova, 73 (1964) 292-313.
- [3] Friedrichs, K. O.; Math. Ann. 115 (1938), 249-272.
- [4] Kuščer-Corngold; Phys. Rev. 139 (1965), 981-990.
- [5] Ukai, S.; Jour. Nucl. Energy. 19 (1965) 833-848.
- [6] Ushijima, T.; Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 16, (1966) 127-133.