

研究談話会記録 No.12 i

周期的外力を加えた自励振動系における振動

上 田 皖 亮

昭和38年12月20日

京都大学工学部電気工学・電子工学
電気工学第二工学教室

目 次

1. 緒 言	1
2. 基本調波振動	1
2.1 同期解と安定条件	2
2.2 数 値 例	5
3. 概周期振動	7
3.1 位相面解析	8
3.2 基本調波振動と概周期振動相互間の移行	10
参 考 文 献	14

周期的外力を加えた自励振動系における振動

1. 緒 言

非線型の振動系においては線型の振動系に見られない特有な現象がいくつかある。たとえば強制振動系においては共振現象、高調波および分数調波振動、概同期振動等があり、また自励振動系に強制外力を加えた場合には同期化（引込）現象、概同期振動等が起る。後者の場合について少し詳しく述べる。一般に自励振動系に周期的外力を加えると、外力周波数の或る巾にわたって自励振動周波数が外力の周波数、その整数倍または整数分の一に同期化して基本調波振動、高調波振動、または分数調波振動を発生する場合がある [1], [2]。また、外力の振巾と周波数がこれらの同期振動を発生するような値をとらない場合には系に発生する振動は概同期振動となる [3], [4]。ここに述べる概同期振動とは十分時間が経過した後、すなわち定常状態に落ち着いた後に発生した振動の振巾および位相が時間的に周期的に変化し、その周期が外力の周期と一般に無理数の比になっているような非周期的な振動である。またこのような概同期振動は最初に述べたように単なる強制振動系においても発生する場合がある [5], [6]。

ここでは非線型復原力を有する自励振動系に周期的外力を加えた場合に、同期化現象を起す外力の振巾および周波数の領域を求め、特に外力の振巾または周波数をこれらの領域の境界線を越えて変化させたときに、系に発生する同期振動と概同期振動の間の移行の様子について考察を行った。

2. 基本調波振動

以下に述べる解析では次のような微分方程式で表わされる振動系につ

いて考察することとする。

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \mu \left[1 - \gamma \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right] \frac{dv}{dt} + v^3 = B \cos \nu t \quad (2.1)$$

ここに μ は 1 に比べて十分小さい正数で、 v^3 は非線型復原力を表わし、 $B \cos \nu t$ は外力を表わす。

2.1 周期解と安定条件

先ず最初に (2.1) 式で $B=0$ とおいた系すなわち

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \mu \left[1 - \gamma \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right] \frac{dv}{dt} + v^3 = 0 \quad (2.2)$$

で表わされる系の自励振動について考察する。そのためにこの自励振動を

$$v(t) = a_0 \cos \omega_0 t \quad (2.3)$$

とおき、これを (2.2) 式に代入して $\sin \omega_0 t$ および $\cos \omega_0 t$ の係数をそれぞれゼロとおくと次式を得る。

$$\mu \omega_0 a_0 \left(1 - \frac{3}{4} \gamma a_0^2 \omega_0^2 \right) = 0, \quad a_0 \left(\frac{3}{4} a_0^2 - \omega_0^2 \right) = 0 \quad (2.4)$$

これより自励振動の振幅および周波数は近似的に次のように表わすことが出来る。

$$a_0^2 = \frac{4}{3\sqrt{\gamma}}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad (2.5)$$

外力周波数 ν が系の自励振動周波数 ω_0 に近い値をとる場合の (2.1) 式の近似解として次の形を仮定する。

$$v(t) = b_1(t) \sin \nu t + b_2(t) \cos \nu t \quad (2.6)$$

ここに $b_1(t)$, $b_2(t)$ は引込状態では定数となり、引込が外れた場合の概周期振動の場合には時間的に変化する周期函数となる。(2.6) 式を (2.1) 式に代入して両辺における $\cos \nu t$ および $\sin \nu t$ の係数をそれぞれ等しいとおく。この場合次の仮定が成立するものとする。

(1) $b_1(t)$, $b_2(t)$ は共に時間 t に対して十分ゆるやかに変化する量

であると考え $\frac{db_1}{dt}$, $\frac{db_2}{dt}$ の2次以上の項および $\frac{d^2b_1}{dt^2}$, $\frac{d^2b_2}{dt^2}$ は共に微小量であるとして無視する。

(2) μ が1に比べて十分小さい正数であることを考慮し, $\mu \frac{db_1}{dt}$, $\mu \frac{db_2}{dt}$ もまた微小量として無視する。

この結果振動系を表わす方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= (1 - \sqrt{\gamma} \nu^2 r^2) x - \sigma y + \frac{B}{\mu \nu a_0} \equiv X(x, y) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \sigma x + (1 - \sqrt{\gamma} \nu^2 r^2) y \equiv Y(x, y)\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$\text{ここに } x = \frac{b_1}{a_0}, \quad y = \frac{b_2}{a_0}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$a_0^2 = \frac{4}{3\sqrt{\gamma}}, \quad \tau = \frac{\mu}{2} t, \quad \sigma = \frac{\omega_0^2 r^2 - \nu^2}{\mu \nu} : \text{離調度} \quad (2.8)$$

$$\omega_0^2 = \frac{3}{4} a_0^2 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

(2.7) 式は (2.1) 式で表わされる系に発生する基本調波振動および基本調波引込領域近傍における概周期振動を近似的に表わす autonomous な微分方程式である。

引込現象の起っている定常状態では b_1 , b_2 は定数となる。このような周期解に対しては (2.7) 式で

$$\frac{dx}{d\tau} = X(x, y) = 0, \quad \frac{dy}{d\tau} = Y(x, y) = 0 \quad (2.9)$$

が成立する。(2.9) 式の解すなわち (2.7) 式の特異点が基本調波振動の平衡状態を与える。以下添字0でこれらの平衡状態を表わすことにする。

(2.7) および (2.9) 式より周期振動の振巾特性を表わす関係式は

$$\left[(1 - \sqrt{\gamma} \nu^2 r_0^2)^2 + \sigma^2 \right] r_0^2 = \left(\frac{B}{\mu \nu a_0} \right)^2 \quad (2.10)$$

となり, (2.6) 式の $\sin$ および $\cos$ 成分の振巾は

$$\begin{aligned}x_0 &= -\frac{\mu \nu a_0}{B} (1 - \sqrt{\gamma} \nu^2 r_0^2) r_0^2 \\ y_0 &= \frac{\mu \nu a_0}{B} \sigma r_0^2\end{aligned}\quad (2.11)$$

となる。

(2.10)式を満たす周期解のうち安定なもののみが実際に物理的に存在する。周期解の安定判別を行なうため次式で定義されるような平衡状態 (x_0, y_0) からの変分 ξ, η を考える。

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \end{aligned} \quad (2.12)$$

従って ξ, η が時間の増加に対しゼロに収斂すれば平衡状態は安定である。(2.12)式を(2.7)式に代入し、高次の微小量を無視すれば

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= a_{11}\xi + a_{12}\eta \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= a_{21}\xi + a_{22}\eta \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } a_{11} &= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 = 1 - 2 \frac{\omega_0^2}{\mu\nu} x_0 y_0 - \sqrt{\delta} \nu^2 (3x_0^2 + y_0^2) \\ a_{12} &= \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 = -\sigma - 2 \frac{\omega_0^2}{\mu\nu} y_0^2 - 2\sqrt{\delta} \nu^2 x_0 y_0 \\ a_{21} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = \sigma + 2 \frac{\omega_0^2}{\mu\nu} x_0^2 - 2\sqrt{\delta} \nu^2 x_0 y_0 \\ a_{22} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 = 1 + 2 \frac{\omega_0^2}{\mu\nu} x_0 y_0 - \sqrt{\delta} \nu^2 (x_0^2 + 3y_0^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

(2.14)式において $\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0, \dots, \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0$ は $x = x_0, y = y_0$ 従って $r = r_0$ における $\frac{\partial X}{\partial x}, \dots, \frac{\partial Y}{\partial y}$ の値を表わす。

(2.13)式で表わされる系の特性方程式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

あるいは

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } p &= -(a_{11} + a_{22}) \\ q &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Routh-Hurwitz の安定判別法によれば(2.13)式で表わされる系，
従つて(2.11)式で与えられる平衡状態は $p > 0$ ， $g > 0$ のときに安定
である。(2.14)および(2.17)式より安定条件を求めると次のようになる。

$$p = 2(2\sqrt{\gamma}v^2r_0^2 - 1) > 0$$

および

$$g = (1 - \sqrt{\gamma}v^2r_0^2)(1 - 3\sqrt{\gamma}v^2r_0^2) + \sigma^2 + 2\frac{\omega_0^2}{\mu v}\sigma r_0^2 > 0 \quad (2.18)$$

すなわち振り子 r_0 の基本調波振動は(2.18)式の両式が同時に満たされる
とき安定に存在し得ることになる。

また振り子特性(2.10)を v について微分して(2.18)式の g の値を用いる
と

$$\frac{\partial r_0^2}{\partial v} = \frac{-2r_0^2[\mu^2(1 - \sqrt{\gamma}v^2r_0^2)(1 - 3\sqrt{\gamma}v^2r_0^2) - 2\mu v\sigma]}{\mu^2 v g} \quad (2.19)$$

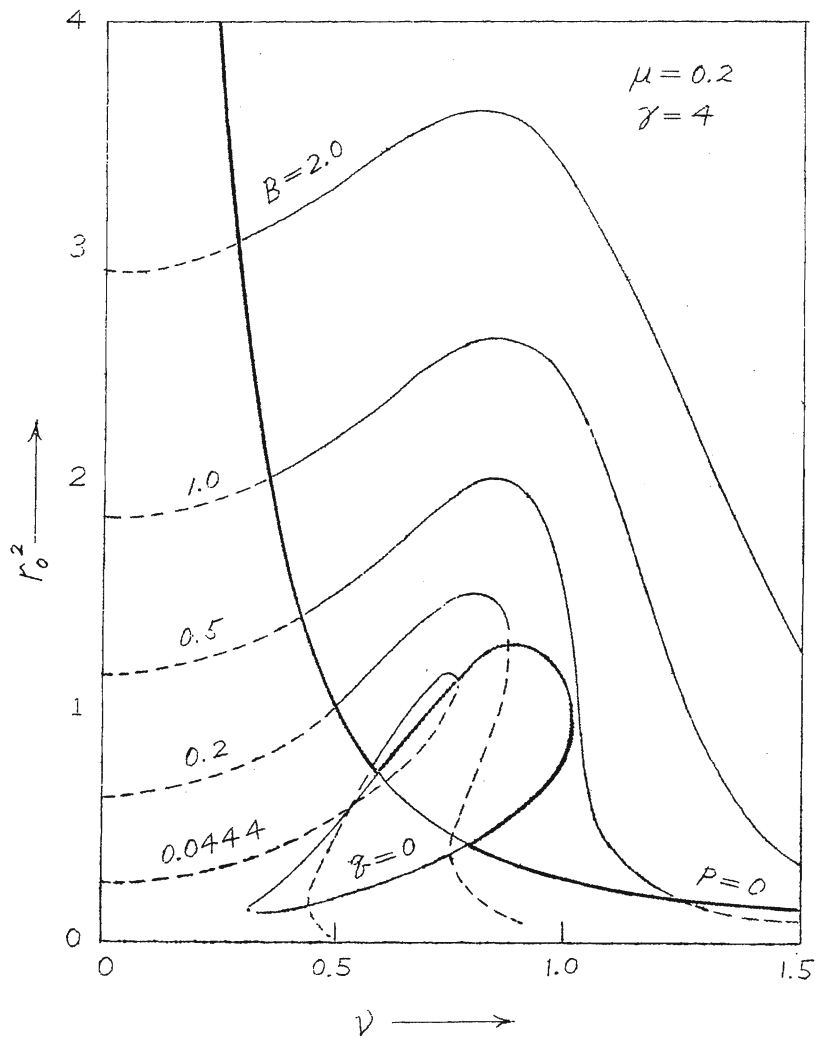
となり振り子特性曲線が垂直接線を有する点は $g = 0$ で与えられる安定限
界と一致することがわかる。

2.2 数 値 例

(2.1)式において系のパラメタを $\mu = 0.2$ ， $\gamma = 4$ とすれば(2.1)式
は

$$\frac{d^2v}{dt^2} - 0.2\left[1 - 4\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]\frac{dv}{dt} + v^3 = B \cos vt \quad (2.20)$$

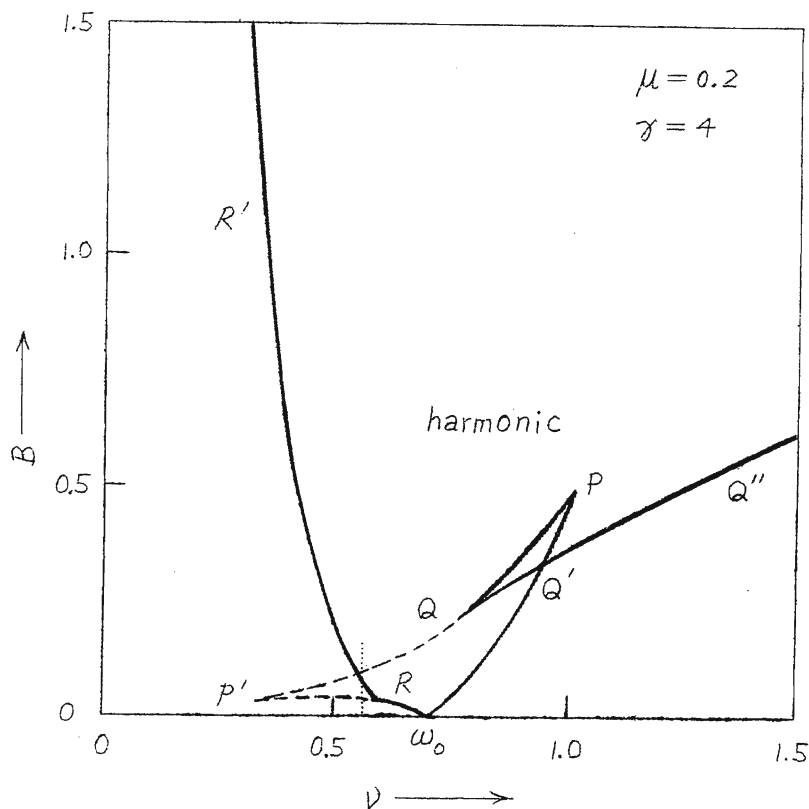
(2.10)式を用いて振り子特性を計算した結果を第1図に示す。図には(2.18)
式で与えられる安定限界 $p = 0$ ， $g = 0$ も併せ示した。また振り子特性の
うち安定な部分を実線で不安定な部分を点線で示した。第2図は引込に
よる基本調波振動を発生する外力の振り子 B ，周波数 v の領域を示したも
のである。図において三角形の領域 $PP'\omega_0$ は安定限界 $g = 0$ を，
 $QQ'Q''$ および RR' は安定限界 $p = 0$ を v ， B 平面上に射影したもの
である。従つて安定な特異点が存在する領域は太い実線で示した境界線



第1図 基本調波振動振幅特性

より上の部分となる。特に領域 PQQ' 内に ν および B が与えられた場合、系には安定な平衡状態が2通り存在する〔第1図参照〕。

系の振動状態を近似的に x, y 位相面上の動作点で表わせば、周期振動は特異点に、過渡状態は積分曲線に、概同期振動はリミット・サイクルにより表わされる。次の章においてはこの様なリミット・サイクルで表わされる概同期振動について考察する。



第2図 基本調波振動引込領域

3. 概周期振動

前章で述べたように系に発生する概周期振動は(2.7)式で表わされる x, y 位相平面上的リミット・サイクルに対応する。従って概周期振動を解析するためには(2.7)式, すなわち

$$\frac{dx}{d\tau} = X(x, y), \quad \frac{dy}{d\tau} = Y(x, y) \quad (3.1)$$

あるいは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)} \quad (3.2)$$

の x, y 位相面上におけるリミット・サイクルを考察することに帰着される。所がリミット・サイクルがはたして存在するか, その個数, 位置

および大きさはどうかと云う問題は一般的には解決されていないので、それぞれの場合に応じて考えて行くより方法がない。

3.1 位相面解析

まず、最初に B および ν が引込領域の外に与えられた場合、従って系には不安定な特異点しか存在しない場合について考える。(3.1) 式に変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (r \geq 0) \quad (3.3)$$

を施せば(3.1) 式は極座標系 (r, θ) において次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= (1 - \sqrt{\gamma} \nu^2 r^2) r + \frac{B}{\mu \nu a_0} \cos \theta \\ r \frac{d\theta}{d\tau} &= \sigma r - \frac{B}{\mu \nu a_0} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

(3.4) 式より十分大きな r に対して

$$\frac{dr}{d\tau} \doteq -\sqrt{\gamma} \nu^2 r^3 < 0 \quad (3.5)$$

このことは原点を中心とする十分大きな半径 r を有する円周上で動作用点が時間での経過と共に常に円の内部へ向って動くことを示している。従って系に不安定な特異点のみが存在するような場合には x, y 位相面上に少なくとも1つのリミット・サイクルが存在すると考えられる。

次に $B=0$ ，すなわち外力が存在しない場合には(3.4)式は容易に積分される，すなわち

$$r^2 = \frac{\omega_0^2 r_1^2}{(\omega_0^2 - \nu^2 r_1^2) e^{-2\tau} + \nu^2 r_1^2} \quad (3.6)$$

ただし $\tau=0$ における r の値を r_1 とする。

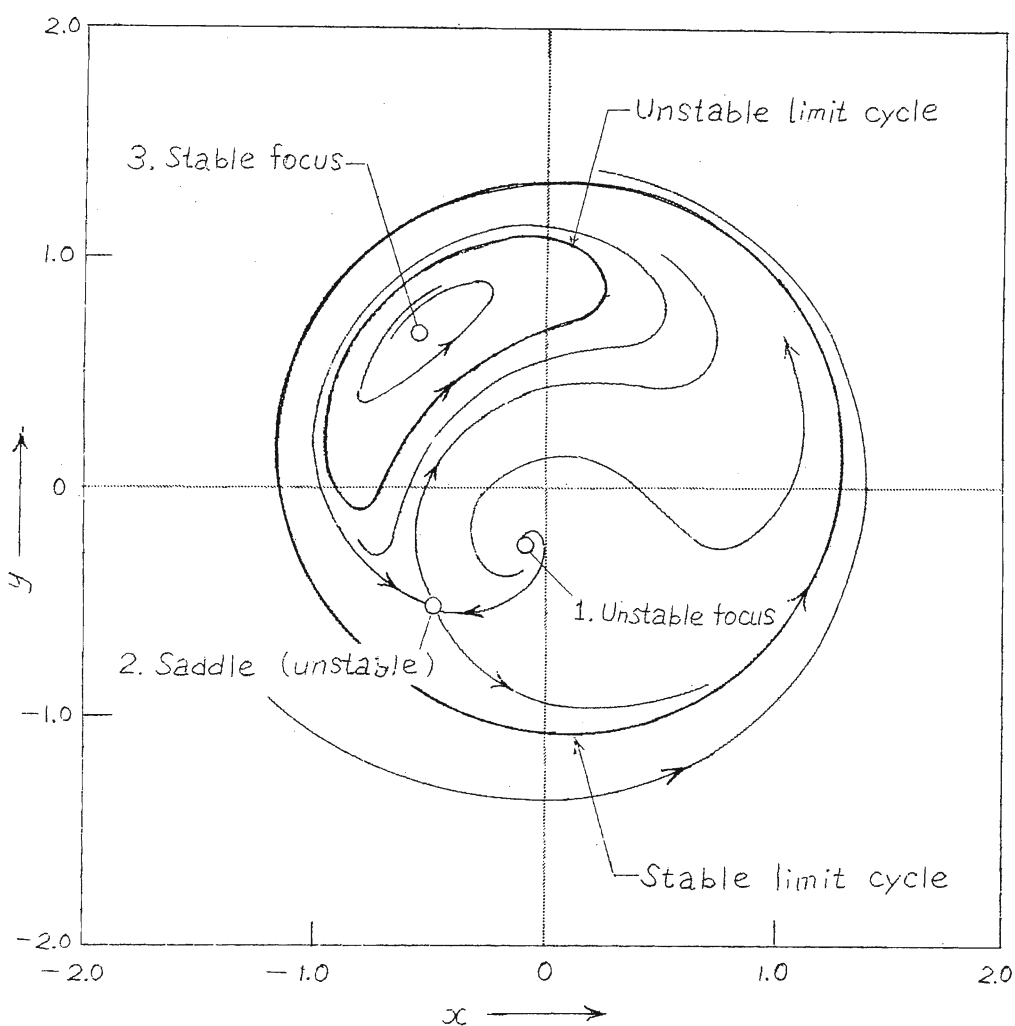
これより $\tau \rightarrow +\infty$ のとき $r^2 \rightarrow \omega_0^2 / \nu^2$ となり，半径が $r^2 = \omega_0^2 / \nu^2$ で与えられる安定な円形リミット・サイクルが存在することがわかる。

一般に与えられた B および ν に対して(3.1)あるいは(3.2)式の x, y 位相面上の積分曲線の模様を知る方法としては，等傾曲線を作図することによって求めるか，種々の初期値を与えて数値積分を行なうことによ

り求めるかしか方法がない。ここでは系のパラメタをオ2.2節の数値例において与えたと同じ値に選び、外力の振巾 B および周波数 ν を引込領域内境界近傍に与えた場合、すなわち

$$B = 0.065, \quad \nu = 0.57$$

とした場合の x, y 位相面上の積分曲線を種々の初期値より Runge-Kutta-Gill の方法で数値積分を行なって求めた結果を第3図に示す。第1表にこの場合の特異点に関する数値を示した。図において特異点1



第3図 x, y -位相面上の積分曲線 ($B = 0.065, \nu = 0.57$)

第 1 表 第 3 図 の 特 異 点

特異点	x_0	y_0	λ_1, λ_2	μ_1, μ_2	分 類
1	-0.0892	-0.2390	$0.9154 \pm 2.2609i$	—	不安定渦状点
2	-0.4742	-0.5074	$2.0062, -1.2598$	$-0.2486, -2.0272$	鞍 形 点
3	-0.5505	0.6981	$-0.0272 \pm 2.0843i$	—	安定渦状点

λ_1, λ_2 : 特性根, μ_1, μ_2 : 特異点に入り出る積分曲線の勾配*。

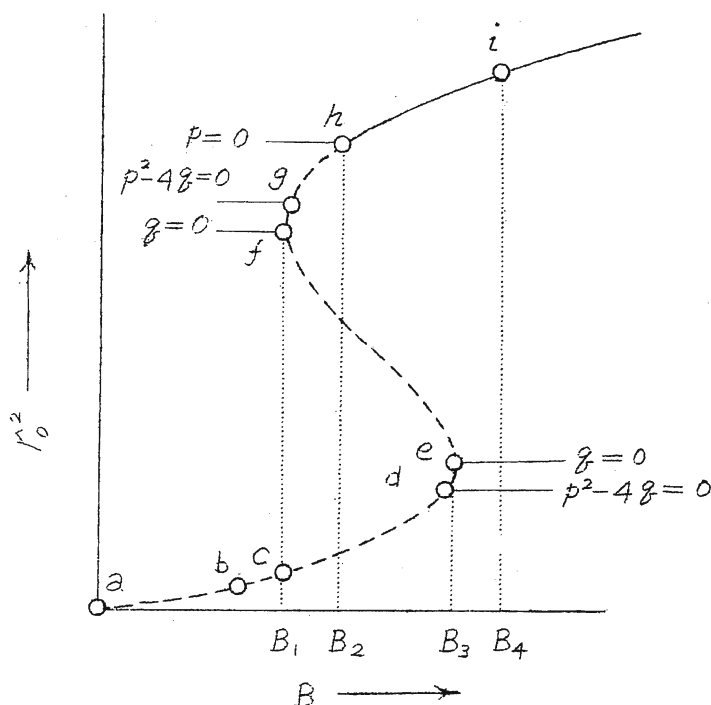
1 は不安定渦状点, 2 は鞍形点, 3 は安定渦状点である。特異点 3 のまわりには 1 つのリミット・サイクルが存在する。図からわかるようにリミット・サイクル近傍の積分曲線は時間の経過と共に遠ざかるのでこれは不安定なリミット・サイクルである。また特異点 1, 2, 3 の全てをかこむリミット・サイクルが存在し図からわかるようにこれは安定である。不安定なリミット・サイクルは位相面全体を 2 つの領域に分ける。このリミット・サイクルの中に初期値を与えれば時間の経過と共に動作点は安定特異点 3 へ収斂する。これに対応して系には周期振動が発生する。このリミット・サイクルの外に初期値を与えれば動作点は外側の安定なリミット・サイクルへ収斂し系には概周期振動が発生する。従って系にはこのパラメタに対して基本調波振動と概周期振動が共に定常状態として存し、その何れが発生するかは初期値による。そして不安定なリミット・サイクルがこのような初期値の領域の境界を形作っていることがわかる。

3.2 基本調波振動と概周期振動相互間の移行

外力の振巾 B , 周波数 ν を基本調波振動引込領域の境界を横切るように変化させると基本調波振動と概周期振動間の移行が起る。ここではこのような移行について系の振動状態を位相面上の積分曲線に対応させながら考察することにする。振巾特性の一例として外力周波数 ν に自由振

* 詳細は文献 [5] pp. 143-147 参照。

動の周波数 ω より小さいある値 ($\nu = 0.57$, 第2図において点線で示した) を与えた場合の特性を定性的にわかりやすく書直したものが第4図である。第2表はこの特性に対応する特異点の種類を示したものであ



第4図 外力の周波数 ν を一定とした場合の振り特性の一例

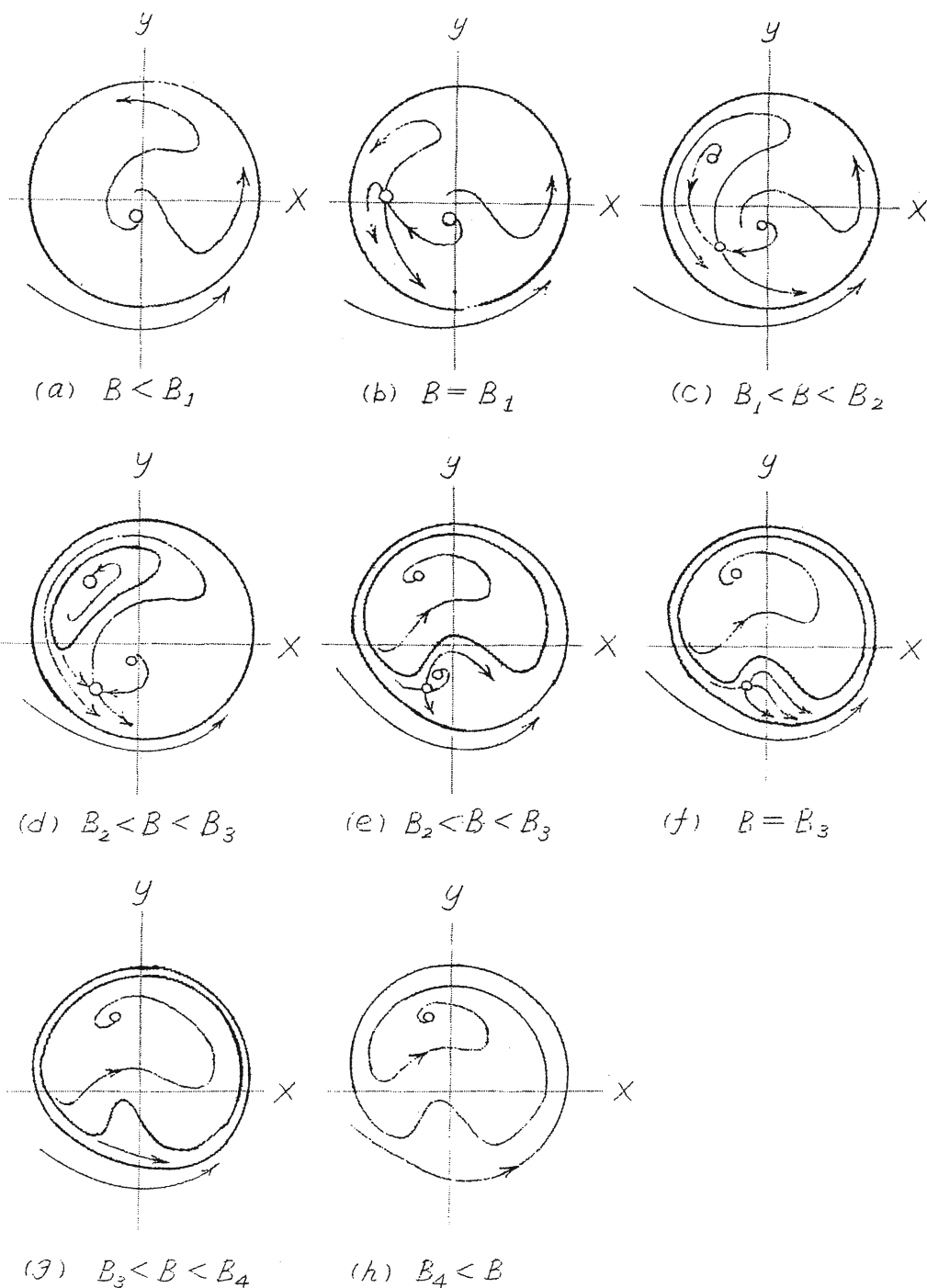
る。この特性に沿って B を変化せしめた場合に起る現象を x, y 位相面上の積分曲線により考察する。図において外力の振り B を B_1 より小さく選ぶとただ一つの不安定特異点 (たとえば b 点) が存在し、従って x, y 位相面上に安定なリミット・サイクルが存在し、系にはこれに対応した概周期振動が発生する。この場合の積分曲線を第5図 (a) に示した。次に $B = B_1$ なる場合の積分曲線を第5図 (b) に示した。ここでは第4図の点 C, f に対応し不安定渦状点と node-saddle 型の高次の特異点が見られる。 B を B_1 を越して大きくすれば高次の特異点は二つに分かれる。このような場合すなわち B を $B_1 < B < B_2$ に選んだ場合の積分曲線を第5図 (c) に示した。次にこの状態より B を大きくして行き B

第2表 第4図の振巾特性に対応する特異点の種類

区 間	p	g	$p^2 - 4g$	特 異 点
ad	—	+	—	不安定渦状点
de	—	+	+	不安定結節点
ef	—	—	+	鞍 形 点
fg	—	+	+	不安定結節点
gh	—	+	—	不安定渦状点
$hi\sim$	+	+	—	安 定 渦 状 点

が B_2 を越せば第4図の点 h すなわち安定限界 $p=0$ を境として特異点は不安定渦状点から、そのまわりに不安定なリミット・サイクルを投げ出しながら安定渦状点となる。このような場合すなわち B を $B_2 < B < B_3$ に選んだ場合の積分曲線を第5図(d)および(e)に示した。(d)は B が B_2 に(e)は B が B_3 に近い場合である。この図より B が B_2 より大きく次第に遠ざかるにつれて不安定なリミット・サイクルは次第に大きくなって来ることがわかる。 $B=B_3$ になれば第4図点 e に対応する *node-saddle* 型の高次の特異点が現われる、第5図(f)。 B が B_3 を越えれば、第4図の振巾特性からわかるように高次の特異点は消滅する。 B が B_3 を少し越した場合の積分曲線を第5図(g)に示す。この場合にも依然として安定、不安定2つのリミット・サイクルが存在する。更に B を少し増し $B=B_4$ となれば不安定なリミット・サイクルと安定なリミット・サイクルが一致して半安定リミット・サイクルが存在すると考えられる。 B が B_4 を越えればこの半安定リミット・サイクルは消滅し全ての積分曲線は安定渦状点へまき込むものと考えられる。この場合を第5図(h)に示した。

以上を要約すれば B を B_1 より小さい値に選ぶと系には概周期振動が発生する。この状態より B を増加して行けば概周期振動は B が B_4 に達するまで持続し、 $B=B_4$ で跳躍現象を起し周期振動へ移行する。逆に



第5図 外力周波数 ν を一定とし、振巾 B をかえた場合の同期振動と概同期振動相互間の関係を示す積分曲線の模様

この同期振動を発生している状態から B を減少して行けば B が B_2 に達するまでこの状態は持続し、 $B = B_2$ で概周期振動へと跳躍する。従って外力の振幅 B の増減に伴なって系にはヒステリシス現象が存在する。

ここでは外力周波数 ν が自励振動周波数 ω_0 より小さい値を取る場合の移行現象のうち複雑であると考えられるパラメタ値 ($\nu = 0.57$) について考察を行なった。周波数 ν が ω_0 より大きい値を取る場合にも複雑な移行現象を呈する場合がある。このような場合および一般の移行については文献 [4] を参照されたい。

おわりに本研究を御指導下さった林千博教授、御協力頂いた倉光正己氏に感謝の意を表する。また数値計算には京都大学 KDC-I デジタル計算機を使用した部分が多い。あわせて同計算機室の諸氏に謝意を表する。

参 考 文 献

1. C. Hayashi, H. Shibayama and Y. Nishikawa, *Frequency Entrainment in a Self-Oscillatory System with External Force*, *Trans. IRE on Circuit Theory*, CT-7: 413-422 (1960).
2. 林, 柴山 : 周波数引込現象の解析, 電気通信学会非直線理論研究専門委員会資料, 1959年12月
3. C. Hayashi, H. Shibayama, and Y. Ueda : *Quasi-periodic oscillations in a self-oscillatory system with external force*, *International Symposium on Nonlinear Vibrations, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Kiev, September, 1961*.
4. 林, 柴山, 上田 : 同期的外力を加えた自励振動系に発生する概周期振動, 電気通信学会非直線理論研究専門委員会資料, 1961年12月.
5. C. Hayashi, "Forced Oscillations in Nonlinear Systems."

Nippon Printing and Publishing Co., Osaka, Japan, 1953, pp.110-116.

6. C.Hayashi : *Quasi-periodic oscillations in nonlinear control systems, International Federation of Automatic Control Congress, pp.12-16, Moscow, 1960.*