

Generalized operator functions implying order preserving operator inequalities

東京理科大学 柳田 昌宏 (Masahiro Yanagida)

山崎 文明 (Takeaki Yamazaki)

古田 孝之 (Takayuki Furuta)

1 Introduction

本文は次の preprint に基づいて書かれたものである:

T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida, *Operator functions implying generalized Furuta inequality*, to appear in *Mathematical Inequalities and Applications* **1** (1998).

ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素について考える。以下、単に作用素と呼ぶことにする。その中でも特に positive な作用素について考えるが、ここで作用素 T が positive であるとは positive definite、即ち $(Tx, x) \geq 0$ for all $x \in H$ と定義し、 $T \geq 0$ と表す。また、 T が positive かつ invertible であるとき、 T は strictly positive であるといい、 $T > 0$ と表す。次の Theorem F は有名な Löwner-Heinz の定理: $A \geq B \geq 0$ ensures $A^\alpha \geq B^\alpha$ for any $\alpha \in [0, 1]$ の拡張である。

Theorem F ([6]).

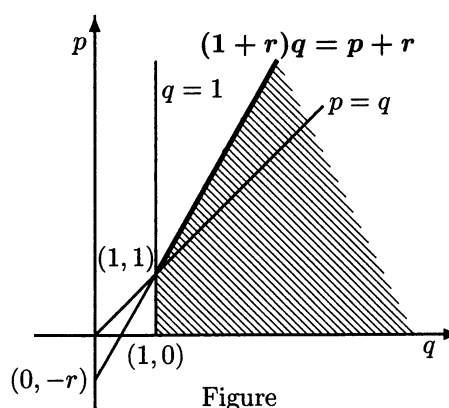
If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$,

$$(i) \quad (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}} B^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

and

$$(ii) \quad (A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

hold for $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1+r)q \geq p+r$.



Theorem F の (i) または (ii) において $r = 0$ とおくことにより Löwner-Heinz の定理が得られる。Theorem F の別証明は [3][13] で与えられており、また [7] では 1 ページの証明が示されている。Theorem F のパラメータ p, q, r の範囲を示したのが上図であるが、最近、この領域は best possible であることが示された [14]。多くの研究者たちの努力によって、Theorem F の応用は今日までに次のような様々な方面で見つけられている。

APPLICATIONS OF THEOREM F

(A) OPERATOR INEQUALITIES

(1) Characterizations of operators satisfying $\log A \geq \log B$

- (2) Generalizations of Ando's theorem
- (3) Other order preserving operator inequalities
- (4) Applications to the relative operator entropy
- (5) Applications to Ando-Hiai log majorization
- (6) Generalized Aluthge transformation

(B) NORM INEQUALITIES

- (1) Several generalizations of Heinz-Kato theorem
- (2) Generalizations of some theorems on norms
- (3) An extension of Kosaki trace inequality and parallel results

(C) OPERATOR EQUATIONS

- (1) Generalizations of Pedersen-Takesaki theorem and related results

Theorem F の拡張として [10] で次の Theorem G が確立された。

Theorem G ([10]). *If $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$, then for each $t \in [0, 1]$ and $p \geq 1$,*

$$F_{p,t}(A, B, r, s) = A^{\frac{-r}{2}} \{A^{\frac{r}{2}} (A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} A^{\frac{-r}{2}}$$

is decreasing for $r \geq t$ and $s \geq 1$, and $F_{p,t}(A, A, r, s) \geq F_{p,t}(A, B, r, s)$, that is, for each $t \in [0, 1]$ and $p \geq 1$,

$$A^{1-t+r} \geq \{A^{\frac{r}{2}} (A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}$$

holds for any $s \geq 1$ and $r \geq t$.

Ando-Hiai[2] ではその log majorization に関する主定理と共に、それと同値な作用素不等式として次もまた紹介されている:

If $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$, then

$$A^r \geq \{A^{\frac{r}{2}} (A^{\frac{-1}{2}} B^p A^{\frac{-1}{2}})^r A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1}{p}}$$

holds for any $p \geq 1$ and $r \geq 1$.

Theorem G は Ando-Hiai による上の不等式と Theorem F を interpolate するものであり、更に [4][8][9] の結果の拡張である。最近 [5] で Theorem G の別証明が与えられた。また Theorem G が best possible であることも示されている [15]。

ごく最近、Theorem G の拡張として [11] で次の結果が紹介され、またその簡単な証明が [12] で示された。

Theorem H ([11]). *Let $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$. For each $t \in [0, 1]$, $q \geq 0$ and $p \geq \max\{q, t\}$,*

$$G_{p,q,t}(A, B, r, s) = A^{\frac{-r}{2}} \{A^{\frac{r}{2}} (A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{q-t+r}{(p-t)s+r}} A^{\frac{-r}{2}}$$

is decreasing for $r \geq t$ and $s \geq 1$.

以下、Theorem F を用いて Theorem 1 を示し、そして Theorem 1 を用いて Theorem H の拡張である Theorem 2、更に Collorary 3 を示す。

2 Results

Theorem F の応用として、次の Theorem 1 が得られる。

Theorem 1. *Let A and B be positive invertible operators satisfying*

$$A \geq (A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})^{\frac{\beta_0}{\alpha_0 + \beta_0}} \quad \text{for fixed } \alpha_0 \geq 0 \text{ and } \beta_0 \geq 0 \text{ with } \alpha_0 + \beta_0 > 0.$$

Then the following (i) and (ii) hold and they are mutually equivalent:

(i) *For any fixed $\delta \geq -\beta_0$,*

$$f(\lambda, \mu) = A^{-\frac{\mu}{2}} (A^{\frac{\mu}{2}} B^\lambda A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} A^{-\frac{\mu}{2}}$$

is decreasing for $\mu \geq 1$ and $\lambda \geq 1$ such that $\alpha_0 \lambda \geq \delta$.

(ii) *For any fixed $\delta \leq \alpha_0$,*

$$f(\lambda, \mu) = A^{-\frac{\mu}{2}} (A^{\frac{\mu}{2}} B^\lambda A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} A^{-\frac{\mu}{2}}$$

is decreasing for $\lambda \geq 1$ and $\mu \geq 1$ such that $\beta_0 \mu \geq -\delta$.

Theorem 1 を用いることにより、Theorem H の拡張である次の Theorem 2 が得られる。

Theorem 2. *Let $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$. For each $t \in [0, 1]$ and $p \geq t$, the following (i) and (ii) hold and they are mutually equivalent:*

(i) *If $q \geq 0$, then*

$$G_{p,q,t}(A, B, r, s) = A^{-\frac{r}{2}} \left\{ A^{\frac{r}{2}} (A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}} \right\}^{\frac{q-t+r}{(p-t)s+r}} A^{-\frac{r}{2}}$$

is decreasing for $r \geq t$ and $s \geq 1$ such that $(p-t)s \geq q-t$.

(ii) *If $p \geq q$, then*

$$G_{p,q,t}(A, B, r, s) = A^{-\frac{r}{2}} \left\{ A^{\frac{r}{2}} (A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}} \right\}^{\frac{q-t+r}{(p-t)s+r}} A^{-\frac{r}{2}}$$

is decreasing for $s \geq 1$ and $r \geq \max\{t, t-q\}$.

positive invertible な作用素 A, B について、 $\log A \geq \log B$ によって定められる order を chaotic order と呼び、 $A \gg B$ と表す [4]。chaotic order に関する結果は [1][4] 他で示されている。

Theorem 1 の応用として、次の chaotic order の characterization が得られる。

Corollary 3. *The following assertions are mutually equivalent:*

- (i) $A \gg B$ (i.e., $\log A \geq \log B$).
- (ii) For any fixed $q \geq 0$,

$$F_q(p, r) = A^{-\frac{r}{2}} (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{q+r}{p+r}} A^{-\frac{r}{2}}$$

is decreasing for $p \geq q$ and $r \geq 0$.

- (iii) For any fixed $q \leq 0$,

$$F_q(p, r) = A^{-\frac{r}{2}} (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{q+r}{p+r}} A^{-\frac{r}{2}}$$

is decreasing for $p \geq 0$ and $r \geq -q$.

(i) と (ii) の同値関係は [4][9] で既に示されている。

3 Proofs of results

まず次の補題を用意する。

Lemma F (Furuta lemma[10]). *Let $A > 0$ and B be an invertible operator. Then*

$$(BAB^*)^\lambda = BA^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{1}{2}} B^* BA^{\frac{1}{2}})^{\lambda-1} A^{\frac{1}{2}} B^*$$

holds for any real number λ .

Lemma 1. *Let A and B be positive invertible operators satisfying*

$$A \geq (A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})^{\frac{\beta_0}{\alpha_0 + \beta_0}} \quad \text{for fixed } \alpha_0 \geq 0 \text{ and } \beta_0 \geq 0 \text{ with } \alpha_0 + \beta_0 > 0. \quad (3.1)$$

Then the following inequality holds:

$$A^\mu \geq (A^{\frac{\mu}{2}} B^\lambda A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} \quad \text{for } \lambda \geq 1 \text{ and } \mu \geq 1. \quad (3.2)$$

Proof of Lemma 1. $\beta_0 = 0$ の場合、(3.1) は $A \geq I$ となり、任意の $\mu \geq 1$ に対して $A^\mu \geq I$ 、即ち(3.2) が成り立つ。 $\alpha_0 = 0$ の場合、(3.1) は $I \geq B$ となり、任意の $\lambda \geq 1$ に対して $I \geq B^\lambda$ 、即ち(3.2) が成り立つ。よって $\alpha > 0, \beta > 0$ の場合を考えればよい。(3.1) に Theorem F の (ii) を適用すると

$$A^{1+r_1} \geq \{A^{\frac{r_1}{2}} (A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})^{\frac{\beta_0 p_1}{\alpha_0 + \beta_0}} A^{\frac{r_1}{2}}\}^{\frac{1+r_1}{p_1+r_1}} \quad \text{for any } p_1 \geq 1 \text{ and } r_1 \geq 0. \quad (3.3)$$

(3.3) で $p_1 = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{\beta_0} \geq 1$ とおくと

$$A^{1+r_1} \geq (A^{\frac{1}{2}(1+r_1)} B A^{\frac{1}{2}(1+r_1)})^{\frac{(1+r_1)\beta_0}{\alpha_0 + \beta_0 + \beta_0 r_1}} \quad \text{for any } r_1 \geq 0. \quad (3.4)$$

(3.4) で $\mu = 1 + r_1 \geq 1$ とおくと

$$A^\mu \geq (A^{\frac{\mu}{2}} B A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\beta_0 \mu}{\alpha_0 + \beta_0 \mu}} \quad \text{for } \mu \geq 1 \quad (3.5)$$

を得る。Lemma F より (3.5) は

$$(B^{\frac{1}{2}} A^\mu B^{\frac{1}{2}})^{\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0 \mu}} \geq B \quad \text{for } \mu \geq 1 \quad (3.6)$$

と同値である。(3.6) に Theorem F の (i) を適用すると

$$\{B^{\frac{r_2}{2}} (B^{\frac{1}{2}} A^\mu B^{\frac{1}{2}})^{\frac{\alpha_0 p_2}{\alpha_0 + \beta_0 \mu}} B^{\frac{r_2}{2}}\}^{\frac{1+r_2}{p_2+r_2}} \geq B^{1+r_2} \quad \text{for any } p_2 \geq 1 \text{ and } r_2 \geq 0. \quad (3.7)$$

(3.7) で $p_2 = \frac{\alpha_0 + \beta_0 \mu}{\alpha_0} \geq 1$ とおくと

$$(B^{\frac{1}{2}(1+r_2)} A^\mu B^{\frac{1}{2}(1+r_2)})^{\frac{(1+r_2)\alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0 \mu + \alpha_0 r_2}} \geq B^{1+r_2} \quad \text{for any } r_2 \geq 0. \quad (3.8)$$

(3.8) で $\lambda = 1 + r_2 \geq 1$ とおくと

$$(B^{\frac{\lambda}{2}} A^\mu B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\alpha_0 \lambda}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} \geq B^\lambda \quad \text{for } \lambda \geq 1 \text{ and } \mu \geq 1. \quad (3.9)$$

Lemma F より (3.9) は (3.2) と同値なので、よって Lemma 1 が証明された。□

Proof of Theorem 1.

Proof of (i). (i) における $\delta, \alpha_0, \beta_0, \lambda$ に関する条件を改めて確認しておく。

$$\text{for any fixed } \delta \geq -\beta_0 \text{ and } \lambda \geq 1 \text{ such that } \alpha_0 \lambda \geq \delta. \quad (3.10)$$

(a) *Proof of the result that $f(\lambda, \mu)$ is decreasing for $\lambda \geq 1$ such that $\alpha \lambda \geq \delta$.*

Theorem 1 の仮定から Lemma 1 より

$$A^\mu \geq (A^{\frac{\mu}{2}} B^\lambda A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} \quad \text{for } \lambda \geq 1 \text{ and } \mu \geq 1. \quad (3.2)$$

(3.2) は Lemma F より

$$(B^{\frac{\lambda}{2}} A^\mu B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\alpha_0 \lambda}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} \geq B^\lambda \quad \text{for } \lambda \geq 1 \text{ and } \mu \geq 1 \quad (3.9)$$

と同値である。(3.9) から Löwner-Heinz の定理より

$$(B^{\frac{\lambda}{2}} A^\mu B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\alpha_0 w}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} \geq B^w \quad \text{for } \lambda \geq 1, \mu \geq 1 \text{ and any } w \text{ such that } \lambda \geq w \geq 0. \quad (3.11)$$

ここで $g(\lambda) = (A^{\frac{\mu}{2}} B^\lambda A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}}$ と定義すると $f(\lambda, \mu) = A^{-\frac{\mu}{2}} g(\lambda) A^{\frac{\mu}{2}}$ であり、また

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= (A^{\frac{\mu}{2}} B^\lambda A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} \\ &= \left\{ (A^{\frac{\mu}{2}} B^\lambda A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu + \alpha_0 w}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} \right\}^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu + \alpha_0 w}} \\ &= \left\{ A^{\frac{\mu}{2}} B^{\frac{\lambda}{2}} (B^{\frac{\lambda}{2}} A^\mu B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\alpha_0 w}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu}} B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\frac{\mu}{2}} \right\}^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu + \alpha_0 w}} \quad \text{by Lemma F} \\ &\geq (A^{\frac{\mu}{2}} B^{\frac{\lambda}{2}} B^w B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 \lambda + \beta_0 \mu + \alpha_0 w}} \\ &= (A^{\frac{\mu}{2}} B^{\lambda+w} A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta + \beta_0 \mu}{\alpha_0 (\lambda+w) + \beta_0 \mu}} \\ &= g(\lambda + w). \end{aligned}$$

不等号のところは、条件(3.10) より $\frac{\delta+\beta_0\mu}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\alpha_0\omega} \in [0, 1]$ であることから、(3.11) と Löwner-Heinz の定理より成り立つ。ゆえに $f(\lambda, \mu) = A^{-\frac{\mu}{2}} g(\lambda) A^{-\frac{\mu}{2}}$ は $\alpha\lambda \geq \delta$ であるような $\lambda \geq 1$ について単調減少である。

(b) *Proof of the result that $f(\lambda, \mu)$ is decreasing for $\mu \geq 1$.*

Lemma F より $f(\lambda, \mu)$ は

$$\begin{aligned} f(\lambda, \mu) &= A^{-\frac{\mu}{2}} (A^{\frac{\mu}{2}} B^{\lambda} A^{-\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta+\beta_0\mu}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}} A^{-\frac{\mu}{2}} \\ &= B^{\frac{\lambda}{2}} (B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\mu} B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}} B^{\frac{\lambda}{2}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

と変形できる。また(3.2) から Löwner-Heinz の定理より

$$A^v \geq (A^{\frac{\mu}{2}} B^{\lambda} A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\beta_0 v}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}} \quad \text{for } \lambda \geq 1, \mu \geq 1 \text{ and any } v \text{ such that } \mu \geq v \geq 0. \quad (3.13)$$

ここで $h(\mu) = (B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\mu} B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}}$ と定義すると(3.12) より $f(\lambda, \mu) = B^{\frac{\lambda}{2}} h(\mu) B^{\frac{\lambda}{2}}$ であり、また

$$\begin{aligned} h(\mu) &= (B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\mu} B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}} \\ &= \{ (B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\mu} B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\beta_0 v}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}} \}^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\beta_0 v}} \\ &= \{ B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\frac{\mu}{2}} (A^{\frac{\mu}{2}} B^{\lambda} A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\beta_0 v}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}} A^{\frac{\mu}{2}} B^{\frac{\lambda}{2}} \}^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\beta_0 v}} \quad \text{by Lemma F} \\ &\geq (B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\frac{\mu}{2}} A^v A^{\frac{\mu}{2}} B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\beta_0 v}} \\ &= (B^{\frac{\lambda}{2}} A^{\mu+v} B^{\frac{\lambda}{2}})^{\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0(\mu+v)}} = h(\mu+v). \end{aligned}$$

不等号のところは、条件(3.10) より $\frac{\delta-\alpha_0\lambda}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\beta_0 v} \in [-1, 0]$ であることから、(3.13) と Löwner-Heinz の定理、更に両辺の inverse をとることにより成り立つ。ゆえに $f(\lambda, \mu) = B^{\frac{\lambda}{2}} h(\mu) B^{\frac{\lambda}{2}}$ は $\mu \geq 1$ について単調減少である。よって (i) が証明された。

Proof of (ii). (ii) における $\delta, \alpha_0, \beta_0, \mu$ に関する条件を改めて確認しておく。

$$\text{for any fixed } \delta \leq \alpha_0 \text{ and } \mu \geq 1 \text{ such that } \beta_0\mu \geq -\delta. \quad (3.14)$$

仮定(3.1) は Lemma F と両辺の inverse をとることにより

$$B^{-1} \geq (B^{-\frac{1}{2}} A^{-1} B^{-\frac{1}{2}})^{\frac{\alpha_0}{\alpha_0+\beta_0}} \quad \text{for fixed } \alpha_0 \geq 0 \text{ and } \beta_0 \geq 0 \text{ with } \alpha_0 + \beta_0 > 0 \quad (3.15)$$

と同値であるが、(3.15) はちょうど(3.1) と同じ形をしていることに注意する。また Lemma F より $f(\lambda, \mu)$ は

$$\begin{aligned} f(\lambda, \mu) &= A^{-\frac{\mu}{2}} (A^{\frac{\mu}{2}} B^{\lambda} A^{\frac{\mu}{2}})^{\frac{\delta+\beta_0\mu}{\alpha_0\lambda+\beta_0\mu}} A^{-\frac{\mu}{2}} \\ &= (B^{-1})^{-\frac{\lambda}{2}} \{ (B^{-1})^{\frac{\lambda}{2}} (A^{-1})^{\mu} (B^{-1})^{\frac{\lambda}{2}} \}^{\frac{-\delta+\alpha_0\lambda}{\beta_0\mu+\alpha_0\lambda}} (B^{-1})^{-\frac{\lambda}{2}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

と変形できる。(3.15), (3.16) から (i) を適用することにより、任意の固定された $-\delta \geq -\alpha_0$ について、 $f(\lambda, \mu)$ は条件(3.14) の下で $\lambda \geq 1, \mu \geq 1$ について単調減少である。よって (ii) が証明された。(i) と (ii) が同値であることはこの証明から明らかなので、以上より Theorem 1 は証明された。□

Proof of Theorem 2. A, B は invertible であると仮定してよい。 $t = 0$ の場合は [8, Theorem 3] から容易に導かれるので、よって $p \geq t > 0$ の場合を考えればよい。

Proof of (i). $X = A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{\frac{t}{2}}$ とおく。すると X は positive invertible であり、仮定 $A \geq B$ は $A \geq (A^{\frac{t}{2}} X A^{\frac{t}{2}})^{\frac{1}{p}}$ と書き換えられる。 $\beta_0 = t \in (0, 1], \alpha_0 = p - t \geq 0$ とおくと $A \geq (A^{\frac{t}{2}} X A^{\frac{t}{2}})^{\frac{1}{\alpha_0 + \beta_0}}$ となり、Löwner-Heinz の定理から

$$A^t \geq (A^{\frac{t}{2}} X A^{\frac{t}{2}})^{\frac{\beta_0}{\alpha_0 + \beta_0}}$$

が成り立つ。 $r = \mu\beta_0 = \mu t \geq t, \delta = q - t$ とおき、更に $f(s, \mu) = A^{-\frac{\mu t}{2}} (A^{\frac{\mu t}{2}} X^s A^{\frac{\mu t}{2}})^{\frac{\delta + \mu t}{\alpha_0 s + \mu t}} A^{-\frac{\mu t}{2}}$ と定義すると

$$\begin{aligned} f(s, \mu) &= A^{-\frac{\mu t}{2}} (A^{\frac{\mu t}{2}} X^s A^{\frac{\mu t}{2}})^{\frac{\delta + \mu t}{\alpha_0 s + \mu t}} A^{-\frac{\mu t}{2}} \\ &= A^{-\frac{r}{2}} \{ A^{\frac{r}{2}} (A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{\frac{t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}} \}^{\frac{q - t + r}{(p - t)s + r}} A^{-\frac{r}{2}} \\ &= G_{p,q,t}(A, B, r, s). \end{aligned} \quad (3.17)$$

$q \geq 0$ から $\delta \geq -\beta_0$ であるので Theorem 1 の (i) が適用できて、 $f(s, \mu)$ は $\alpha_0 s \geq \delta$ であるような $s \geq 1, \mu \geq 1$ について単調減少である。従って $G_{p,q,t}(A, B, r, s)$ は $(p - t)s \geq q - t$ であるような $s \geq 1, r \geq t$ について単調減少であり、よって (i) が証明された。

Proof of (ii). 上と同様にするとき、条件 $p \geq q, r \geq t - q$ から Theorem 1 の (ii) の条件 $\delta \leq \alpha_0, \beta_0 \mu \geq -\delta$ を満たす。よって Theorem 1 の (ii) と (3.17) より $G_{p,q,t}(A, B, r, s)$ は $s \geq 1, r \geq \max\{t, t - q\}$ について単調減少である。よって (ii) が証明された。また (i) と (ii) が同値であることは Theorem 1 より導かれる。

以上より Theorem 2 は証明された。 $\square$

Proof of Corollary 3. 次の (3.18) は [4][9] で示されており、[1] の結果の拡張である。

$$A \gg B \text{ holds if and only if } A^r \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \text{ for all } p \geq 0 \text{ and } r \geq 0. \quad (3.18)$$

(i) $\implies$ (ii). (i) を仮定する。 (3.18) が成り立つので、Theorem 1 の (i) より、任意の固定された $q \geq 0$ について

$$f(\lambda, \mu) = A^{-\frac{r\mu}{2}} (A^{\frac{r\mu}{2}} B^{p\lambda} A^{\frac{r\mu}{2}})^{\frac{q+r\mu}{p\lambda+r\mu}} A^{-\frac{r\mu}{2}}$$

は $p\lambda \geq q$ であるような $\lambda \geq 1, \mu \geq 1$ について単調減少であり、即ち、任意の固定された $q \geq 0$ について $F_q(p, r)$ は $p \geq q, r \geq 0$ について単調減少である。

(i) $\implies$ (iii). Theorem 1 の (ii) を用いることにより、(i) $\implies$ (ii) と同様に証明できる。

(ii) $\implies$ (i). $F_q(p, r)$ が $r \geq 0$ について単調減少であると仮定する。このとき、任意の $p \geq 0, r \geq 0$ について $F_0(p, 0) \geq F_0(p, r)$ 、即ち $I \geq A^{-\frac{r}{2}} (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} A^{-\frac{r}{2}}$ 、よって $A^r \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}$ が成り立つが、これは (3.18) から $A \gg B$ と同値である。

(iii) $\implies$ (i). (ii) $\implies$ (i) と同様に証明できる。

以上より Corollary 3 は証明された。 $\square$

参考文献

- [1] T.Ando, *On some operator inequalities*, Math. Ann. **279** (1987), 157–159.
- [2] T.Ando and F.Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl. **197, 198** (1994), 113–131.
- [3] M.Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator Theory **23** (1990), 67–72.
- [4] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Algebra Appl. **179** (1993), 161–169.
- [5] M.Fujii and E.Kamei, *Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 2751–2756.
- [6] T.Furuta, *$A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$* , Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 85–88.
- [7] T.Furuta, *An elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad. **65** (1989), 126.
- [8] T.Furuta, *Two operator functions with monotone property*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 511–516.
- [9] T.Furuta, *Applications of order preserving operator inequalities*, Oper. Theory Adv. Appl. **59** (1992), 180–190.
- [10] T.Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl. **19** (1995), 139–155.
- [11] T.Furuta and D.Wang, *A decreasing operator function associated with the Furuta inequality*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- [12] T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida, *Order preserving operator function via Furuta inequality “ $A \geq B \geq 0$ ensures $(A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}$ for $p \geq 1$ and $r \geq 0$ ”*, to appear in Proc. 97-IWOTA.
- [13] E.Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon. **33** (1988), 883–886.
- [14] K.Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 141–146.
- [15] K.Tanahashi, *Grand 古田不等式の best possibility について*, RIMS **980** (1997), 1–14.