

Elkik's Theorem

M. Artin (M.I.T.)

A を noetherian ring. $\mathfrak{o}$ をその ideal とする. pair $(A, \mathfrak{o})$ は henselian と仮定する. i.e. B を étale A -algebra とするとき. $A/\mathfrak{o} \cong B/\mathfrak{o}B$ ならば A -section: $B \rightarrow A$ が存在する.

$A[X] = A[X_1, \dots, X_N]$ を多項式環とし. $f = (f_1, \dots, f_g)$ を $A[X]$ の元のベクトルとする. $f_1, \dots, f_g$ で生成される $A[X]$ の ideal を F と表わし. $B = A[X]/F$ とおく. 更に. $X = \text{Spec } B$ $\mathfrak{s} = \text{Spec } A$ とおき. $V \subset X$ で $X/\mathfrak{s}$ の smooth locus を. $\bar{A}$ で A の $\mathfrak{o}$ -adic completion を表わすことにする. 今後ずっとこれらの notations を用いる.

方程式 $f(X) = 0$ の解は. morphism: $X \rightarrow \mathfrak{s}$ の section に対応する.

次の Theorem を証明するのが我々の目的である.

Theorem. (Elkik) $\bar{a} \in \bar{A}^N$ を $f(X) = 0$ の解とする. $\bar{a}$ の

引き起こす morphism $\bar{a}: \bar{S} = \text{Spec } \bar{A} \rightarrow X$ が条件

$$\bar{a}(\bar{S} - V(\alpha\bar{A})) \subset V$$

をみたすならば、任意の整数 n に対して、 A における $f(X) = 0$ の解 $a \in A^n$ が存在して、 $a \equiv \bar{a} \pmod{\alpha^n}$ とできる。

証明にとりかかる前に、いくつかの準備をしよう。

morphism: $X = \text{Spec } B \rightarrow \bar{S} = \text{Spec } A$ が、“smooth at $p \in X$, of relative dimension d ” であるとは、次のときをいう。i.e. f_i ($1 \leq i \leq g$) のある $(N-d)$ 個が p で local に ideal F を生成し、Jacobian matrix $(\frac{\partial f_i}{\partial X_j})$ のある $(N-d)$ 次の小行列式が p で 0 にならない。

$P = A[X]$ とおき、 B の P -module としての resolution

$$P^p \xrightarrow{R} P^g \xrightarrow{f} P \rightarrow B \rightarrow 0$$

を考える。但し、 $e_1, \dots, e_g$ を P^g の canonical basis とするとき、 $f: P^g \rightarrow P$ は、 $f(e_i) = f_i$ ($1 \leq i \leq g$) で与えられる。

Jacobian matrix $(\frac{\partial f_i}{\partial X_j})$ を J と表わす。 $fR=0$ の両辺を微分して、

$$JR + fR' = 0.$$

したがって、 $JR \equiv 0 \pmod{F}$ 。故に $P^p \xrightarrow{R} P^g \xrightarrow{J} P^N$ は、complex: $B^p \xrightarrow{R} B^g \xrightarrow{J} B^N$ を与える。

morphism: $X \rightarrow \bar{S}$ が、 $p \in X$ で smooth, of relative

dimension d ならば、 $\text{rank}(R) \geq q - N + d$, $\text{rank}(J) = N - d$ at p だから、 $\forall p \in X$ でこの complex は exact になる。

一般に complex: $B^p \xrightarrow{L} B^q \xrightarrow{M} B^N$ に対して、次の様な B の ideal H_r を導入する。

i.e. L, M を行列によって表現する。任意の r -tuple $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_r \leq q$ に対して、 L の α_1 -列、 $\dots$ α_r -列をとり出して得られる (p, r) -行列と、 M の complementary rows をとり出して得られる $(q-r, N)$ -行列を考え、前者の任意の r 次の小行列式と、後者の任意の $(q-r)$ 次の小行列式の積をつくる。 r -tuple $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ を動かしたとき、これらの積で生成される B の ideal を H_r と表わし、 $H = \sum_r H_r$ とおく。これは次の性質をもつ。

(i) $H_r = (1) \iff B^p \xrightarrow{L} B^q \xrightarrow{M} B^N$ は $\text{Spec } B$ 上の vector bundles の sequence として exact で、 $\text{Im } L = \text{Ker } M$ は rank r である。

(ii) $\forall h \in H_r$ に対して、homotopy $(\mu, \nu): B^p \xleftarrow{\mu} B^q \xleftarrow{\nu} B^N$ が存在して、 $L\mu + \nu M = h \circ \text{id}$ となる。

(iii) $M=0$ ならば、 H_r は $B^q / \text{Im } B^p$ の $(q-r)$ 次の Fitting ideal である。

(iv) complex: $B^p \xrightarrow{R} B^q \xrightarrow{J} B^N$ に対して作った ideal H の

support は $X/\mathbb{A}$ の non-smooth locus である。

Theorem 1. A は (t) -adic topology に關して complete とする。
 t^n は A のすべての t -torsion elements を零化するとせよ。 I は A の任意の ideal で、 $a \in A^N$ は $f(a) \equiv 0 \pmod{t^n I}$ をみたすとする。
 $t^n \in H(a)$ ($H(a)$ は sequence: $P^P \xrightarrow{R} P^Q \xrightarrow{J} P^N$ に対して complex における同様に定義される ideal H から、 $X \rightarrow a$ として得られる A の ideal を表わす) ならば、 $n > 2n$ なる任意の整数 n に対して、 $a' \in A^N$ で、 $f(a') = 0$ 、 $a' \equiv a \pmod{t^{n-2n} I}$ となるものが存在する。

proof. ${}^t f(a-y)$ の Taylor 展開を書くと、

$${}^t f(a-y) = {}^t f(a) - {}^t J(a) {}^t y + (\geq \text{quadratic in } y).$$

ここに、 $J(a)$ は Jacobian matrix $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ の $X = a$ における値を表わす。行列の左肩につけた t は転置行列を表わす。

次の条件をみたす $y \in A^N$ の存在が証明できればよい。

$$\text{i.e. } y \equiv 0 \pmod{t^{n-2n} I}, \quad {}^t J(a) {}^t y \equiv {}^t f(a) \pmod{t^{2n-2n} I}.$$

この様な y の存在が分れば、 $2n-2n > n$ だから、求めるべき A^N の元に収束する sequence を得る。 $P^P \xrightarrow{R} P^Q \xrightarrow{J} P^N$ において、 $JR \equiv 0 \pmod{F}$ だから、 $J(a)R(a) \equiv 0 \pmod{t^n I}$ である。一方 $t^n \in H(a)$ だから、ideal $H(a)$ のみたす性質

(ii) から. homomorphisms $\mu: A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^N$, $\nu: A^P \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ が存在して.

$${}^tJ(a)\mu + \nu {}^tR(a) \equiv t^n \cdot \text{id} \pmod{t^n I}$$

となる. ここに. $A^N \xrightarrow{{}^tJ(a)} A^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{{}^tR(a)} A^P$.

したがって.

$${}^tJ(a)\mu {}^tf(a) + \nu {}^tR(a) {}^tf(a) \equiv t^n {}^tf(a) \pmod{t^{2n} I}.$$

ところが. ${}^tR(a) {}^tf(a) = 0$ であるから.

$${}^tJ(a)\mu {}^tf(a) \equiv t^n {}^tf(a) \pmod{t^{2n} I}.$$

$n - n > n$ であるから. t^n に関する仮定によって. $y \in A^N$ が存在して.

$${}^tf(a) \equiv {}^tJ(a) {}^ty \pmod{t^{2n-n} I}$$

となる. ここに. $y \equiv 0 \pmod{t^{n-n} I}$ である. q.e.d.

Theorem 2. A は α -adic topology に関して complete と仮定する. このときには. 次の性質をみたす整数の組 (n_0, n) が存在する. i.e. $n \geq n_0$ なる任意の自然数 n に対して.
 $f(a) \equiv 0 \pmod{\alpha^n}$, $\alpha^n \subset H(a)$ ならば. $f(a') = 0$, $a' \equiv a \pmod{\alpha^{n-n}}$ なる $a' \in A^N$ が存在する.

Sketch of proof. A の α -adic topology の ideal of definition の生成元の最小個数に関する帰納法による. 結局

$\mathcal{O}$ が principal の場合に帰着し、Theorem 1 を適用して証明される。

Lemma 1. A, F, B, V は今までと同じものを表わすとする。 $\mathcal{C} = \mathcal{S}_B(F/F^2)$ とおき、 V' によって、 $g: \mathcal{S}_{\text{spec } \mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{spec } B}$ による V の reciprocal image を表わす。このときには、embedding $Z = \text{Spec } \mathcal{C} \hookrightarrow A_s^{2N+2} (N, s \text{ は今までと同じ数を表わす})$ で、次の性質をみたすものが存在する。

i.e. Z の defining ideal を I と表わすと、任意の affine open set $U \subset V'$ 上で: conormal sheaf I/I^2 は free である。

proof. $\mathcal{C} = B[y_1, \dots, y_n]/E = A[x, y]/I$ とおく。

V 上では、

$$(i) \quad 0 \rightarrow F/F^2 \rightarrow \Omega_{A[X]/A} \otimes_{A[X]} B \rightarrow \Omega_{B/A} \rightarrow 0 : \text{exact.}$$

V' 上では、

$$(ii) \quad 0 \rightarrow g^*(\Omega_{B/A}) \rightarrow \Omega_{\mathcal{C}/A} \rightarrow \Omega_{\mathcal{C}/B} \rightarrow 0 : \text{exact}$$

$$\& \quad \Omega_{\mathcal{C}/B} = g^*(F/F^2).$$

affine open set $U \subset V'$ 上では、(i) から、

$$0 \rightarrow g^*(F/F^2) \rightarrow \text{free} \rightarrow g^*\Omega_{B/A} \rightarrow 0 : \text{exact.}$$

この sequence と、(ii) の sequence は共に split するので U 上

では、 $\Omega_{C/A}$ は free になる。さらに、 V' 上では

$$0 \rightarrow I/I^2 \rightarrow \Omega_{A[x,y]} \otimes C \rightarrow \Omega_{C/A} \rightarrow 0 : \text{exact.}$$

U 上では右の 2 つの項は free だから

$$I/I^2 \oplus C^N \cong C^{N+g}$$

となる。

今 Z 上で $z_i = 0$ となる N variables z_i をつけ加える。すると、 $Z \hookrightarrow \text{Spec } A[x, y, z]$, $C = A[x, y, z]/I'$ で、

$$I'/I'^2 = I/I^2 \oplus C^N \cong C^{N+g},$$

となる。したがって、 I'/I'^2 は U 上で free である。q.e.d.

Theorem 3. $(A, \mathfrak{o})$ を henselian pair とし、 $\bar{A}$ を A の $\mathfrak{o}$ -adic completion とする。 $\bar{a} \in \bar{A}^N$ が、 $f(\bar{a}) = 0$, $(\mathfrak{o}\bar{A})^n \subset H(\bar{a})$ for some n をみたすならば、任意の自然数 n に対して、 $a \in A^N$ で、 $f(a) = 0$, $a \equiv \bar{a} \pmod{\mathfrak{o}^n}$ となるものが存在する。

Sketch of proof. $\mathfrak{o}$ -adic topology の ideal of definition の生成元の個数に関する帰納法によって証明する。 $l=0$ のときは自明である。 $l-1$ のとき証明できたとして、 $(t_1, \dots, t_l)$ を ideal of definition の生成元の系とする。 $t_i \in \mathfrak{o}$ としてよい。 A_1 を A の (t_1) -adic completion とする。 henselian

pair $(A/(t_1^c) = A_1/(t_1^c), \alpha/(t_1^c) = \alpha \bar{A}/(t_1^c))$ に帰納法の仮定を適用すると、 $a_1 \in A_1^N$ で、 $f(a_1) \equiv 0 \pmod{t_1^c}$ 。

$a_1 \equiv \bar{a} \pmod{\alpha^c}$ となるものが存在する。c を十分大きくとって、Theorem 1 を適用すると、任意の自然数 n に対して

上の a_1 を使って、次の条件を満たす $a'_1 \in A_1^N$ の存在が証明できる。i.e. $f(a'_1) = 0$, $a'_1 \equiv \bar{a} \pmod{\alpha^n}$ 。かくして、

α が principal の場合にこの Theorem を証明すればよい。 $\alpha = (t)$ とする。 $C = S_B(F/F^2)$, $Z = \text{Spec } C$ とおく。0-section

$: X = \text{Spec } B \rightarrow Z = \text{Spec } C$ を使って、 $\bar{a}$ は $C \otimes_A \bar{A}$ の $\bar{A}$ -section を与え、一方、 C の A -section から structure morphism

$: Z \rightarrow X$ を使って、 B の A -section を得る。よって、 X を Z で置きかえることができる。Lemma 1 によって存在を保証された embedding $: Z \hookrightarrow \mathbb{A}_S^{2N+8}$ を考える。Z の defining ideal を I と表わす。ところで、affine open set $U \subset V$ で

$\bar{V}$ における reciprocal image が、 $\bar{a}(\text{Spec } \bar{A} - V(\alpha \bar{A}))$ を含むものが存在する。

① 仮定によって、 $t^r \in H(\bar{a})$ である。したがって、 $t^r = \bar{h}(\bar{a})$, $\bar{h} \in H \cdot \bar{A}$ とかける。 $h \in H$ で、 $h \equiv \bar{h} \pmod{t^{r+1}}$ なるものを選ぶ。このときには、 $h(\bar{a}) = t^r(1 + ty)$, $y \in \bar{A}$ とかける。 $t^r, 1 + ty$ は共に $\text{Spec } \bar{A} - V(\alpha \bar{A})$ で unit になるので、 $U = X - V(h)$ が求めるものであること

は明らかである。

ここで I/I^2 は free of rank $N+g$ である。 $(g_1, \dots, g_{N+g}) = (g)$ かつ $\text{Spec } A[x, y, z]_h$ (但し $A_S^{2N+g} = \text{Spec } A[x, y, z]$) で、ideal I を生成するとする。 h をその中でおきかえて、

$$hI \subset (g)$$

と仮定してよい。一方 h のとり方から、

$$h(\bar{a})\bar{A} \supset t^\delta \bar{A}$$

なる整数 δ が存在する。 Δ によって、ideal (g) に associate される Jacobian matrix の $N+g$ 次の小行列式によって生成される $A[x, y, z]$ の ideal を表わすと、

$$\Delta(\bar{a}) \supset t^r \bar{A}$$

なる整数 r が存在する。したがって、次の Lemma 2 から、 C の A -section a で、任意の整数 n に対して、次の条件をみたすものが存在する。

$$\text{i.e. } a \equiv \bar{a} \pmod{t^n}, \quad g_1(a) = 0, \dots, g_{N+g}(a) = 0.$$

$n > \delta$ ならば $h(a)A \supset t^\delta$ である。したがって、 $t^\delta I(a) = 0$ となる。一方 $a \equiv \bar{a} \pmod{t^n}$ だから、 $I(a) \subset (t^n)$ である。 n を十分大きくとると、 A の t -torsion elements で ideal (t^n) に属するものは 0 だけとなる。(Artin-Rees)。

よって、 $I(a) = 0$ 。かくして、 $a \in A^N$ が求まるものである。

q.e.d.

Lemma 2. $(A, \mathfrak{O})$ を henselian pair とし. $B = A[X]/F$.
 $F = (f_1, \dots, f_g)$ とする. Δ によって, Jacobian matrix
 $(\partial f_i / \partial X_j)$ の g 次の小行列式によって生成される ideal を表わ
 す. 整数 n, h 及び $a \in A^N$ が次の条件をみたすとする.
 i.e. $n > 2h$. $F(a) \subset \mathfrak{O}^n$, $\Delta(a) \subset \mathfrak{O}^h$.
 このときには, $(a') \in A^N$ で $a' \equiv a \pmod{\mathfrak{O}^{n-h}}$, $f(a') = 0$
 となるものが存在する.

証明は参考文献を参照されたい.

参考文献

Elkik: Solutions d'Equations au-dessus d'anneaux
 henséliens. (manuscript).

(石橋康徳記)