

2 次の Siegel 保型形式と Abel 曲面の ゼータ関数に関する

R. Salvati Manni-J. Top 予想の証明

岡崎 武生 (大阪大学大学院理学研究科)

1 予想の紹介と結果

吉田敬之先生により全ての有理数体上定義された Abel 曲面の Hasse-Weil ゼータ関数は或る 2 次の Siegel 保型形式の Spinor- L 関数に一致するのではないかと予想されていますが、R. Salvati Manni-J. Top 予想とは、この吉田予想の成立している Abel 曲面と Siegel 保型形式の候補を与えるものでした。

Abel 曲面としては、 $\mathbb{Q}$ 上定義された超楕円曲線 $C: y^2 = x^5 - x$ のヤコビアン $J(C)$ をとり、2 次の Siegel 保型形式の方は、井草テータ関数の 4 積で以下の様に定義されます。

characteristic $m = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{R}^4$ に対して、次数 2 の Siegel 上半空間 $\mathfrak{H}_2$ 上の井草テータ関数 θ_m を

$$\theta_m(Z) := \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2} e\left(\frac{Z}{2} \begin{bmatrix} a_1 + m_1 \\ a_2 + m_2 \end{bmatrix} + (a_1 + m_1, a_2 + m_2) \begin{pmatrix} m_3 \\ m_4 \end{pmatrix}\right)$$

(但し、 $e(t) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t)$, $t \in \mathbb{R}$, $Z \in \mathfrak{H}_2$, $Z[x] = {}^t x Z x$) とおき、 $n = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{R}^4$ に対して

$$\Theta_n(Z) = \theta_{[(0,0,0,\frac{1}{4})+n]}(Z) \theta_{[(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\frac{1}{4})+n]}(Z) \theta_{[(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4})+n]}(Z) \theta_{[(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4})+n]}(Z)$$

とおきます。このとき、 $n_i = 0$ or $\frac{1}{2}$, $1 \leq i \leq 3$, $n_4 = 0$ とする事で得られる 8 つの $\Theta_n(Z)$ が、その Siegel 保型形式の候補です。なお、これらの Θ_n は $\Gamma(4) = \text{Ker}(Sp_2(\mathbb{Z}) \rightarrow Sp_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}))$ 上定義された $\Gamma(8)$ 上 trivial な或る congruence-character χ_1 付きのカスプ形式の空間に入っています。

予想

8つの Θ_n は全て、Hecke 同時固有カスプ形式で *Spinor L*-関数は全て、 $J(\mathbf{C})$ の Hasse-Weil ゼータ関数と一致する。(但し、2 の Euler 因子は除く。)

というものでした。そして、

主定理

『この予想は全て正しい。』

を示したので、その証明方法を紹介します。

2 証明のアウトライン

証明の手順は以下の①～③です。

①まず、Hasse-Weil ゼータ関数 $\zeta(s, J(\mathbf{C}))$ は、或る Grössen-character λ で具体的に書けます。

何故なら、楕円曲線 $E: y^2 = x(x-1)(x-3-2\sqrt{2})$ に対して、

$$\begin{aligned} \pi: C &\ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x(x+1)}{x-1} \\ \frac{y(x-1-\sqrt{2})}{(x-1)^2} \end{pmatrix} \in E \\ J(\mathbf{C}) &\cong \text{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(E) \quad \text{isogenous over } \mathbb{Q} \end{aligned}$$

($\text{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}$ は Weil restriction) と分解され、さらに楕円曲線 E は $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ 上の虚数乗法

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\sqrt{-2}} \begin{pmatrix} \frac{-(x-1)(x-3-2\sqrt{2})}{2x} \\ \frac{\sqrt{-2}y(x^2-3-2\sqrt{2})}{4x^2} \end{pmatrix}$$

をもつので、8 分体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(e(1/8))$ の Grössen-character λ で志村-Milne の虚数乗法論により、

$$\begin{aligned} \zeta(s, J(\mathbf{C})) &= \zeta(s, E/\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \\ &= L(s, \lambda) = \prod_{(\mathfrak{p}, 2)=1} (1 - \lambda(\mathfrak{p})N\mathfrak{p}^{-s})^{-1} \end{aligned}$$

とかけます。ここで、 $\mathbb{Q}(e(1/8))$ のイデアル (2) に関する類数は 1 なので、

$$\lambda(\mathfrak{p}) = N_{\mathbb{Q}(e(1/8))/\mathbb{Q}(\sqrt{-2})}(\alpha), \mathfrak{p} = (\alpha), \alpha \equiv 1 \pmod{2}$$

と完全に定義されます。

そして、Grössen-character $\mu: \mathbb{Q}(\sqrt{-2})_{\mathbb{A}}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ を、 $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ のイデア
ル $(2\sqrt{-2})$ に関する類数は 1 であることに注意して

$$\mu(\mathfrak{p}) = \alpha, \mathfrak{p} = (\alpha), \alpha \equiv 1 \pmod{2\sqrt{-2}}$$

と定義すると

$$L(s, \lambda) = L(s, \mu)L(s, \bar{\mu})$$

と分解されます。ここで、 $\bar{\cdot}$ は複素共役を意味します。

② Spinor L -関数が $L(s, \lambda) = L(s, \mu)L(s, \bar{\mu})$ になる Siegel 保型形式が、以
下の方法 i) ~ iii) で構成できます。

i) まず、

$$\theta_{\mu}(z) = \sum_{\mathfrak{n}} \mu(\mathfrak{n}) \mathbf{e}(N(\mathfrak{n})z), z \in \mathfrak{H}_1$$

($\mathfrak{n}$ は 2 と互いに素な $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ の整イデアルを走る) とおくと、 θ_{μ} は Hecke
eigen cusp-form で $L(s, \theta_{\mu}) = L(s, \mu)$ となります。また、 μ の conductor
から、

$$\theta_{\mu} \in S_2(\Gamma_0(64), \omega_2)$$

であることもわかります。ここで、 S_2 で楕円カスプ形式の空間をあらわ
し、 $\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$ 、 ω_2 は 2 次拡大

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ に関する Dirichlet character です。

即ち、 $\theta_{\mu}(\gamma \cdot z) = j(\gamma, z)^2 \omega_2(a) \theta_{\mu}(z)$ となっています。また、同様に

$$\theta_{\bar{\mu}} \in S_2(\Gamma_0(64), \omega_2)$$

です。

ii) θ_{μ} は 2 に関する Fourier 係数はすべて消えているので 2 に関しては、
super-cuspidal representation となっています。 θ_{μ} のレベルは 2 冪のみ
なので、他の有限素点では主系列表現となっていることから、Jacquet-
Langlands 理論により、2 でのみ分岐する $\mathbb{Q}$ 上定義された定符号四元数
環 $D_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}ij, i^2 = j^2 = 1, ij = -ji$ の或る保型形式 φ で
 $L(s, \varphi) = L(s, \mu)$ となるものが存在します。ここで、 $D_{\mathbb{Q}}$ の order R 上の
character χ 付きの保型形式 φ を

$$\varphi(\gamma g k) = \chi(k) \varphi(g), \gamma \in D_{\mathbb{Q}}^{\times}, g \in D_{\mathbb{A}}^{\times}, k \in \prod_{p < \infty} R_p^{\times}$$

という形の $D_{\mathbb{Q}}$ のイデール $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ 上の $\mathbb{C}$ -valued な連続関数で、以下 $\mathcal{A}(R, \chi)$ でこのような関数の空間を表すことにします。

一般に、 $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ は

$$D_{\mathbb{A}}^{\times} = \bigcup_i^{h(R)} D_{\mathbb{Q}}^{\times} \alpha_i (\mathbb{H} \times \prod_p R_p^{\times}) \quad (\text{有限直和}), \mathbb{H} = D_{\infty}$$

と分解できるので、 α_i で値を決めることで φ は、決定できます。ここで、 $h(R)$ は R に関する類数です。また、これらの関数は $\varphi(\alpha_i)$ のみきまることから、 $\mathcal{A}(R, \chi)$ は有限次元ですし、Hecke operator の計算も容易です。また、自動的に $L(s, \bar{\varphi}) = L(s, \bar{\mu})$ となります。

iii) ii) で定めた保型形式のペア $\varphi, \bar{\varphi}$ から、吉田リフト (theta-lift の一種) で Siegel 保型形式 $Y(\varphi, \bar{\varphi})$ が構成できます。吉田リフトでは、一般に $L(s, Y(\varphi_1, \varphi_2)) = L(s, \varphi_1) L(s, \varphi_2)$ となっているので、

$$L(s, Y(\varphi, \bar{\varphi})) = L(s, \varphi) L(s, \bar{\varphi}) = L(s, \mu) L(s, \bar{\mu}) = \zeta(s, J(C))$$

ですから、こうして所望の Siegel 保型形式が構成できます。

この吉田リフトの形は、 $\mathcal{A}(R, \chi)$ に対応する以下の条件を満たす、 $D_{\mathbb{A}} \oplus D_{\mathbb{A}}$ の Schwartz function f を

1. 無限素点 ∞ に於いて $f_{\infty} = \exp(-2\pi(N(x_1) + N(x_2)))$ for $x_1, x_2 \in \mathbb{H}$.
2. 有限素点 p で χ_p (χ の p -component) が trivial なら、 f_p は $R_p \oplus R_p$ の特性関数.
3. 有限素点 p で χ_p が trivial でないなら、 f_p は全ての $k_1, k_2 \in R_p^{\times}$ と全ての $(x_1, x_2) \in D_p \oplus D_p$ に対して

$$f_p(k_1^{-1} x_1 k_2, k_1^{-1} x_2 k_2) = \overline{\chi_p(k_1)} \chi_p(k_2) f_p(x_1, x_2).$$

を取ると、

$$F(Z) = \sum_{i,j}^{h(R)} n_i^{-1} n_j^{-1} \sum_{\delta_i \in D_{\mathbb{Q}}} \left\langle \prod_{p < \infty} f_p(\alpha_i^{-1} \delta_1 \alpha_j, \alpha_i^{-1} \delta_2 \alpha_j) \right. \\ \left. \times e(N(\delta_1) z_1 + \text{Tr}(\delta_1 \cdot \delta_2^*) z_2 + N(\delta_2) z_3), \overline{\varphi_1(\alpha_i)} \varphi_2(\alpha_j) \right\rangle, \\ Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_2$$

で与えられます。〈,〉は Hermitian 内積、 $n_i = |D_{\mathbb{Q}} \cap \alpha_i^{-1} R_{\mathbb{A}} \alpha_i|$ 、 $*$ は $D_{\mathbb{Q}}$ の main-involution、 N, Tr は被約ノルム、被約トレースを表しています。

③ 最後に適当な $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ の保型形式 φ s.t $L(s, \varphi) = L(s, \mu)$ と φ の入っている空間 $\mathcal{A}(R, \chi)$ に対応した Schwartz-function $\prod_p f_p$ を取る事で予想の 8 つの Θ_n が全て得られる事を示します。しかし、実は 8 つの Θ_n は或る 2 の Hecke operator 達で移りあうことがわかるので、 $\Theta_{(0,0,0,0)}$ に関して証明すれば十分です。

$$\begin{aligned} \Theta_{(0,0,0,0)}(8Z) &= \sum_{x_i, y_j \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{7}{8} + \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} + \frac{x_3 + x_4}{2}\right) \\ &\quad \times e\left(Z \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} 2x_2 + 1 \\ 2y_2 + 1 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} 2x_3 \\ 2y_3 + 1 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} 2x_4 + 1 \\ 2y_4 + 1 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

となり、 $D_{\mathbb{Q}}$ の元 δ_1, δ_2 を

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 2x_1 + (2x_2 + 1) \cdot i + (2x_3) \cdot j + (2x_4 + 1) \cdot ij, \\ \delta_2 &= 2y_1 + (2y_2 + 1) \cdot i + (2y_3 + 1) \cdot j + (2y_4 + 1) \cdot ij, \end{aligned}$$

とおく。すると、 $\Theta_{(0,0,0,0)}$ は

$$\begin{aligned} \Theta_{(0,0,0,0)}(8Z) &= \sum_{x_i, y_i \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{7}{8} + \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} + \frac{x_3 + x_4}{2}\right) \\ &\quad \times e(N(\delta_1)z_1 + \text{Tr}(\delta_1 \cdot \delta_2^*)z_2 + N(\delta_2)z_3) \end{aligned}$$

となります。

さて、この式と吉田リフトの形を比べながら、Schwartz-function f_p を

1. 素点 2 で f_2 を δ_1, δ_2 の座標 x_i, y_i が全て $\mathbb{Z}_2$ に入っているとき、 $f_2(\delta_1, \delta_2) = e\left(\frac{7}{8} + \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} + \frac{x_3 + x_4}{2}\right)$ 、それ以外は 0 とおきます。
2. 他の有限素点 p で f_p を $x_i, y_i \in \mathbb{Z}_p$ のとき 1、それ以外は 0 とおきます。

と選びます。次に $D_{\mathbb{Q}}$ の order R と R の character χ を、

$$f_p(k_1 \delta_1, k_1 \delta_2) = \overline{\chi_p(k_1)} f_p(\delta_1, \delta_2), \quad k_1 \in R_p^{\times}$$

という条件から、

$$R = \mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}(i + j) + 2\mathbb{Z}(j + ij) + 4\mathbb{Z}ij,$$

$$\chi = \omega_2(a_1 + 4(a_2 + a_3 + a_4)), \text{ for } a_1 + 2a_2(i + j) + 2a_3(j + ij) + 4a_4ij \in R_2^{\times}$$

で、2以外の素点 p では R_p は maximal order χ_p は trivial と決定できます。
 R の類数 $h(R)$ は 4 で、

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = (i + j + ij)_2 \times \prod_{v \neq 2} 1_v,$$

$$\alpha_3 = (1 + 2i)_2 \times \prod_{v \neq 2} 1_v, \alpha_4 = (6 + i + 7j + 3ij)_2 \times \prod_{v \neq 2} 1_v$$

ととれます。そして、 $\mathcal{A}(R, \chi)$ の Brandt 行列 (Hecke-operator の有限次表現行列) を計算して $L(s, \varphi) = L(s, \mu)$ となっていそうな固有保型形式 φ を

$$\varphi(\alpha_1) = 1, \varphi(\alpha_2) = -\sqrt{-1}, \varphi(\alpha_3) = \varphi(\alpha_4) = 0$$

と選びます。

この φ とその複素共役 $\bar{\varphi}$ と上で定義した Schwartz function f をもちいて、吉田リフト $Y(\varphi, \bar{\varphi})$ を計算します。

すると、Schwartz-function f の選び方から、当然 $\Theta_{(0,0,0,0)}(8Z)$ と $Y(\varphi, \bar{\varphi})$ は非常に近い形をしています。ただ、 $(\alpha_i, \alpha_j) \neq (1, 1)$ のパートがはみ出しています。

しかし、このはみ出したパートは結局 cancel することが容易な計算でわかります。即ち、 $\Theta_{(0,0,0,0)}(8Z) = Y(\varphi, \bar{\varphi})$ ですから、 $\Theta_{(0,0,0,0)}(8Z)$ は Hecke 同時固有形式で、 $L(s, \Theta_{(0,0,0,0)}) = L(s, \varphi)L(s, \bar{\varphi})$ であることが解りました。(但し、Bad prime 2 に関する Euler factor は除きます)

一方、 φ から楕円保型形式 θ_φ を

$$\theta_\varphi(z) = \sum_i^{h(R)} n_i^{-1} \sum_{\delta \in D_{\mathbf{Q}}} \left\langle \prod_{p < \infty} f_p^{(1)}(\delta \alpha_i) e(N(\delta)z), \varphi(\alpha_i) \right\rangle,$$

と構成して θ_φ は Hecke 固有形式 $L(s, \varphi) = L(s, \theta_\varphi)$ で $\theta_\varphi \in S_2(\Gamma_0(64), \omega_2)$ であることがわかります。ここで D_p の Schwartz-function $f_p^{(1)}$ は、

1. 素点 2 では、 $\delta \in R_2^\times$ なら $f_2^{(1)}(\delta) = \chi_2(\delta)$ でそれ以外では 0
2. 他の有限素点 p で R_p の特性関数

とおいています。この構成法 $\varphi \rightarrow \theta_\varphi$ は一般の Hecke 固有形式 φ から Hecke 楕円保型形式を構成するものです。

そして $\dim_{\mathbb{C}} S_2(\Gamma_0(64), \omega_2) = 2$ と計算してこの空間 $S_2(\Gamma_0(64), \omega_2)$ は $\theta_\mu, \theta_{\bar{\mu}}$ で張られていることがわかるので $\theta_\mu = \theta_\varphi, \theta_{\bar{\mu}} = \theta_{\bar{\varphi}}$ となるので

$$L(s, \varphi) = L(s, \mu), L(s, \bar{\varphi}) = L(s, \bar{\mu})$$

と結論付けられて予想は完全に証明されました。最後に、 $\theta_\varphi = \theta_\mu$ を示せたのは、たまたま $\dim_{\mathbb{C}} S_2(\Gamma_0(64), \omega_2) = 2$ となっていたからというわけではないことを注意しておきます。

[P-Y] などによりカスプ形式の Fourier 係数がその重さ、レベルに対応した或る定数個消えていればそのカスプ形式自身が 0 であるという結果があるので、Fourier 係数を沢山計算することで $\theta_\varphi = \theta_\mu$ を示すという手段もあります。

参考文献

- [I-K-O] T. Ibukiyama, T. Katsura and F. Oort: Super singular curves of genus two and class numbers. *Composito Math.* **57** (1986), 127-152
- [J-L] H. Jacquet and R. P. Langlands :Automorphic forms on $GL(2)$, *Lecture Notes in Math.* **114**
- [M] J. S. Milne: On the arithmetic of abelian varieties, *Invent. Math.* **17** (1972), 177-190.
- [P-Y] C. Poor and D. Yuen: LInear dependence among Siegel modular forms. *Math. Ann.* **318**, 205-234(2000)
- [SM-T] R. Salvati Manni and J. Top: Cusp forms of weight 2 for the group $\Gamma(4, 8)$, *Amer. J. Math.* **115** (1993), 455-486.
- [S-T] G. Shimura and Y. Taniyama: Complex multiplication of abelian varieties, *Mathematical Societiy of Japan* (1961).
- [Y] H. Yoshida: Siegel's modular forms and the arithmetics of quadratic forms, *Invent. Math.* **60** (1980), 193-248.