

Severi の定理の一般化

東京工芸大 工 前原和寿

1. はじめに、

曲線に関する定理で次の事が知られている。
 定理 (Severi) k を代数閉体とし、 K を k の代数関数体とする。 K の中間体で、超越次数が 1、種数が 2 以上で、 K が分離的になるような中間体たちは有限個である。

このことを一般化して、一般型代数多様体の場合に上記の定理を作れというのが飯高先生の昔のレポート問題であった。標数零の代数閉体 k に限ってみると、 k 上の代数関数体 K の中には複雑な構造を持つ中間体があまうないという意味になる。 m 重種数 P_m が複雑さの度合を示すのならば、超越次数の等しい体では、構造の簡単なものも複雑なものを含まないことがわかる。超越次数の異なる場合でも、複雑な体の入れこみ限界がある。

次に一般型代数多様体に対応する体以外の場合も考えてみると、中間体があまうないなど

ということには期待できない。しかし、同型な体を同一視すればあまりない。あまりないという言葉~~を~~を定義しておく。

$\mathcal{F}^c = \{(f, Y) \mid Y \text{ は条件 } c \text{ を有する完備非特異多様体で } X \rightarrow Y \text{ は全射正則写像 (又は支配的有理写像)}\}$ 但し X は与えられた完備代数多様体上の集合に同値関係を与える。

$(f, Y) \sim_1 (f', Y') \Leftrightarrow$ 双正則写像 (又は双有理写像) $\mu: Y \rightarrow Y'$ があ、て $f' = \mu \circ f$

$(f, Y) \sim_2 (f', Y') \Leftrightarrow$ 双正則写像 (又は双有理写像) $\mu: Y \rightarrow Y'$ があ、て

商集合 $\mathcal{F}^c / \sim_1$ (又は $\mathcal{F}^c / \sim_2$) が有限集合のとき、

$\mathcal{F}^c$ は正則写像 (又は有理写像) も込めて同型を除いて有限ということにする。商集合 $\mathcal{F}^c / \sim_2$ が有限集合のとき同型を除いて有限ということにする。他の言葉もこのことから類推して欲しい。

k を標数 0 の代数閉体とし、その上の固有、既約、被約、な algebraic space X を与える。

$\mathcal{F}^{\text{ample}} = \{(Y, f); Y \text{ は完備非特異代数多様体で ample canonical divisor } \text{を有する。} f: X \rightarrow Y \text{ は全射正則写像}\}$

主定理 $\mathcal{D}^{\text{ample}}$ は正則写像も含めて同型を除いて有限である。

これは、予想からは程遠い結果であるが在る。

2. 命題と定理

定理 1. $\mathcal{D}^{\text{ample}}$ は正則写像も含めて同型を除いて有限である。

(注). $\mathcal{D}^{\text{b.am}} = \{ (X, Y) \mid Y \text{ は完備非特異代数多様体で完備非特異代数多様体であって ample canonical divisor を有するものに双有理同値とする.} \}$

$\mathcal{D}^{\text{b.am}}$ も正則写像も含めて同型を除いて有限となる。

次に ample canonical divisor から一歩でて、一般型代数多様体の場合を考えてみる。一般型代数多様体は定義から、非特異のとき multi-canonical divisor で双有理的に射影空間への埋め込みができる。しかし、 X の像となるもの全体を考えると、有限回の操作で上の意味で射影空間に埋め込むことが困難になる。

このことは飯高先生の K の言葉では, $K(Y) = \dim Y$ と $K(Y) = \dim Y - 1$ の境界に弱れい一般型代数多様体が果しなく連なっているかということになる。そこで $2 \dim X + 1$ 次元の射影空間の中にすべての X の像となる一般型代数多様体を埋め込めておく。そして次のような ascending filtration を与える。 $F_m = \{Y \mid Y \text{ は } \overset{\text{完備}}{\text{正則}} \text{ 非特異一般型代数多様体で } K_Y \text{ を canonical divisor, } H_Y \text{ を射影空間から誘導された hyperplane section とすると } |mK_Y - H_Y| \neq \emptyset\}$ 命題 1.2. F_m は 正則写像も含めて同型を除いて有限。

問題. 十分大きな m に対して $F_m = F_{m+1}$ か言えるか。

曲面の場合 Y を曲面とし, 一般型非特異射影的代数多様体とする。この場合

$\mathcal{F}^{g.s.} = \{(f, Y) \mid Y \text{ は完備非特異曲面で一般型としかつ極小 (等一種例外曲線を持たない) とする。}\}$ は正則写像も含めて同型を除いて有限が言えるだろう。

一般型代数多様体であるような X の像を扱うとき, 次の 3 種類の分け方がある。

(1) F_m で考える。

(2) K_Y を標準因子として, $|mK_Y|$ (complete linear system) に付随した有理写像が双有理となるような代数多様体 Y たちを扱う。

(3) Y を適当な射影空間に埋め込まれていると考えるとその次数 H_Y^n が有界なものを扱う。

問. $\mathcal{F}^{\text{general}} = \{(f, Y) \mid Y \text{ は完備非特異一般型代数多様体で } X \xrightarrow{f} Y \text{ 支配的有理写像}\}$: この中で Y が標準因子 K_Y を ample とするものが cofinal にあるか。 i.e. $Y \in \mathcal{F}^{\text{general}}$ に対して $Y \rightarrow Y^{\text{ample}}$ 支配的有理写像で Y^{ample} は Y と同次元で標準因子が ample。

問. $\mathcal{F}^{\text{general}}$ の中に strongly minimal なものはどの位あるか (又は cofinal か)。

次に一般型以外のものを考えると, 次のことがわかる。 X を proper (integral) algebraic space とする。 $\mathcal{F}^0 = \{(f, Y) \mid Y \text{ は非特異射影的多様体とし } f: X \rightarrow Y \text{ は全射正則写像とする。}\}$

定理2. $\mathcal{F}^0$ は正則写像を込めず同型を除いて高々可算個である。

正則写像も含めて考えるときには次のように変えればよい。

$\mathcal{F}^1 = \{(f, Y) \mid Y \text{ は非特異射影的多様体で}$
 $X \xrightarrow{f} Y \text{ は全射正則写像かつ次の性質を持つ,}$

$$H^0(X, f^* \oplus Y) = 0 \quad \text{但し } \oplus Y \text{ は正則接ベクトルの層}\}$$

注意2.1. $\mathcal{F}^1$ は正則写像も含めて同型を除いて高々可算である。

これらは compact Kähler manifolds の場合に拡張できる。

3. 証明.

Chow の補題から非特異射影多様体から integral proper algebraic space 上の全射正則写像があるから今後 X は非特異射影多様体と仮定する。

補題1. Hilbert 多項式 $\chi(Y, mK_Y)$ は有限個である。ただし $Y \in \mathcal{F}^{\text{ample}}$ 。

補題の証明

小平消失定理から $\chi(Y, mK_Y) = h^0(Y, mK_Y)$

$m \geq 2$. そこで次の不等式

$$0 \leq h^0(Y, mK_Y) \leq h^0(X, S^m \wedge^n \Omega_X^1)$$

但し S^m (又は $\wedge^n$) は symmetric algebra (又は exterior algebra) の階数 m (又は n) の $\mathcal{O}_X$ -Module とする。

$$n = \dim Y.$$

このことから多項式 (n 次の) が $n+1$ 個の値から定まることを考慮して補題 1 が得られる。

補題 1 と松坂の定理を用いて $\mathcal{F}^{\text{ample}}$ に含まれる多様体 Y は有限個の射影空間に次のように埋込できる。射影空間 $\mathbb{P}^N$ を一つきわめるとその上の very ample invertible sheaf H_P に対して同型 $m_0 K_Y \cong j^* H_P$ がある。但し m_0 は Hilbert 多項式だけで定まる。 $j: Y \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ 。

次に $X \xrightarrow{f} Y$ のグラフを $X \times \mathbb{P}^N$ の中で考える。 H_X を $H_X \otimes K_X^{-1}$ が ample となるような ample invertible sheaf とする。

補題 2. $(f, Y) \in \mathcal{F}^{\text{ample}}$ に対して正則写像のグラフの Hilbert 多項式は有限個である。

証明. 小平消失定理から

$$\chi(X, m(H_X + f^*_{m_0} K_Y)) = h^0(X, m(H_X + f^*_{m_0} K_Y)) \text{ for } m \geq 1.$$

$$\text{よって } 0 \leq h^0(X, m(H_X + f^*_{m_0} K_Y)) \leq h^0(X, H_X^{\otimes m} \otimes S^{m m_0} \wedge^n \Omega_X^1).$$

を得るが、補題1と同様の議論で補題2を得る。

Hilbert scheme $\text{Hilb}_{X \times \mathbb{P}^N}$ の open subscheme $\underline{\text{Hom}}(X, \mathbb{P}^N)$ で X から $\mathbb{P}^N$ への正則写像を parametrize する。

補題2で与える Hilbert polynomial $P(m)$ に関する成分 $\underline{\text{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N)$ を考えればよい。これは quasi-projective scheme である。

次の図式

$$\begin{array}{ccc} X \times \underline{\text{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N) & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \times \underline{\text{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \underline{\text{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N) & \end{array}$$

がある。 Γ を Hilbert functor の 普通元 とする。

$$\exists \text{ を } \Gamma \subset X \times \mathbb{P}^N \times \underline{\text{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N) \longrightarrow \mathbb{P}^N \times \underline{\text{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N)$$

の像とする。これは closed である。

$\exists$ を $\underline{\text{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N)$ 上考えるとき flattening stratification

$$\text{して } \coprod_{i \in I} \Sigma_i \hookrightarrow \underline{\text{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N) \quad (I: \text{有限集合})$$

$\exists(\Sigma_i) \longrightarrow \Sigma_i$ は flat とする。 $Y \in \mathcal{Y}^{\text{ample}}$ は

$\exists \rightarrow \underline{\text{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N)$ の fibres の中にすべて $\lambda, \mu, \dots$

としてよい。

$$H_{\text{non-singular}} = \{ t \in \underline{\text{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N) \mid E_t \in \mathcal{F}^{\text{ample}} \}$$

$$Z_{i, \text{smooth}} = \{ t \in Z_i \mid E_t \text{ is smooth} \}$$

$$H_{\text{smooth}} = \bigcup_{i \in I} Z_{i, \text{smooth}}$$

このとき $H_{\text{smooth}} \supset H_{\text{non-singular}}$ を得る。

また $Z_{i, \text{smooth}} \hookrightarrow Z_i$ は open である。

実際 $E_{Z_i} \rightarrow Z_i$ は proper, flat and of finite presentation である。

そこで $E(Z_{i, \text{smooth}}) \longrightarrow Z_{i, \text{smooth}}$ を考えればよい。

$$E(Z_{i, \text{smooth}})_{\text{red}} \longrightarrow (Z_{i, \text{smooth}})_{\text{red}} \text{ を扱ふ。}$$

smoothing stratification をして

$$\coprod_{j \in J_i} S_{ij} \hookrightarrow (Z_{i, \text{smooth}})_{\text{red}} \quad \text{但し } J_i \text{ は有限}$$

S_{ij} smooth とする。

補題 (堀川 (未承認) 藤田)

X を完備非特異多様体とし $\mathcal{Y} \rightarrow S$ を proper smooth morphism とする。 S は regular affine scheme とする。

$$\text{仮定} \quad X \times S \xrightarrow{\psi} \mathcal{Y} \quad \text{が全射正則とする。}$$

$$\begin{array}{ccc} & \psi & \\ & \textcircled{2} & \\ P & \searrow \swarrow & \mathcal{Y} \\ & S & \end{array}$$

このとき Kodaira-Spencer 写像

$$\rho_t : H^0_S \longrightarrow H^1(\mathcal{Y}_t, \mathcal{H}_{\mathcal{Y}_t}) \text{ は zero map.}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \oplus_S & \xrightarrow{0} & R^1 p_* \oplus \times \times S/S \\
 \parallel & \xrightarrow{2} & \downarrow \\
 \oplus_S & \xrightarrow{2} & R^1 p_* \psi^* \oplus \psi/S \\
 \parallel & \xrightarrow{2} & \uparrow \\
 \oplus_S & \xrightarrow{2} & R^1 q_* \oplus \psi/S
 \end{array}$$

の図式と $H^1(\mathcal{Y}_t, \oplus_{\mathcal{Y}_t}) \longrightarrow H^1(X, \psi_t^* \oplus_{\mathcal{Y}_t})$ が単射なることから $f_t = 0$ for $t \in S$ を得る。 Q.E.D.

Kodaira-Spencer の変形理論から $\dim H^1(\mathcal{Y}_t, \oplus_t)$ が一定で $f_t = 0$ for $t \in S$ なら $\mathcal{Y} \xrightarrow{f} S$ は locally trivial である。 $\dim H^1(\mathcal{Y}_t, \oplus_t)$ は上半連続性から S_{ij} を stratificate して $\coprod_{k \in K_{ij}} T_{ijk} \subset S_{ij}$ (K_{ij} 有限) T_{ijk} 上で $\dim H^1(\mathcal{Y}_t, \oplus_t)$ が一定になるようにできる。 $\square(T_{ijk}) \longrightarrow T_{ijk}$ に補題3を適用すれば fibres は同型になる。以上のことから定理1は証明された。

以下は寝言かも知れないが、支配的有理写像の場合を考えてみる。

$\mathcal{F}_{\text{rat}}^{\text{ample}} = \{(f, Y) \mid Y \text{ は固有非特異多様体で標準因子が ample とし } X \xrightarrow{f} Y \text{ が支配的有理写像とする。}\}$

$Y \in \mathcal{F}_{\text{rat}}^{\text{ample}}$ が補題1の Hilbert 多項式をもつとはすくわめる。

ところが補題2に相当するものが困難なので、次のようにしてみる。 $X \xrightarrow{f} Y$ のグラフは閉包を考えて $\Gamma \rightarrow \text{Hilb}_X \times \mathbb{P}^N$ の fibres の中に入っている。

$$\Gamma \hookrightarrow X \times \mathbb{P}^N \times \text{Hilb}_X \times \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^N \times \text{Hilb}_X \times \mathbb{P}^N$$

の像を Ξ とおく。

$\Xi \rightarrow \text{Hilb}_X \times \mathbb{P}^N$ の fibres の中に $\mathcal{F}_{\text{rat}}^{\text{ample}}$ はすべて含まれている。先程と同じようにして

$$\begin{aligned} \Xi_{\text{smooth}} &\rightarrow (\text{Hilb}_X \times \mathbb{P}^N)_{\text{smooth}} \xrightarrow{\text{open}} \text{Hilb}_X \times \mathbb{P}^N \\ \Xi_{\text{smooth}} &\rightarrow (\text{Hilb}_X \times \mathbb{P}^N)_{\text{smooth}} \end{aligned}$$

non-singular fibres を含んでいるとしてよい。

$$(\Xi_{\text{smooth}})_{\text{red}} \rightarrow ((\text{Hilb}_X \times \mathbb{P}^N)_{\text{smooth}})_{\text{red}}$$

smoothening stratification をしてさらに ~~smooth~~

$t \in ((\text{Hilb}_X \times \mathbb{P}^N)_{\text{smooth}})_{\text{red}}$ の fibre Ξ_t の標準因子 ω_t (multiple fibre は除く) とする

$h^0(E_t, \omega_t^{\otimes m_0})$ が一定になるように stratification
 する。このとき $\omega_t^{\otimes m_0}$ によって引き起される有
 理写像を考えその像の次元が下からないよう
 な base scheme の点を考えると locally closed であり、
 それを H とする。 $H \hookrightarrow \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N} \times \mathbb{P}^N$ ~~locally closed~~
~~constructible~~
 従って H は locally noetherian scheme.

$\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}$ の universality から $H \xrightarrow{\varphi} \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}$ の morphism が
 唯一存在する。この射 φ は locally of finite
 type である。 H は作りおから一般型代数双様
 体 γ の支配的有理写像の一部を parametrize し
 いて $\gamma_{\text{rat}}^{\text{ample}}$ のそれを含んでいいる。

Kobayashi-Ochiai の定理から φ の fibre は有限
 個である。従って φ は quasi-finite となる。

$\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^{(m)}$ に φ を引きもとせば $H \times_{\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}} \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^{(m)}$
 は Noetherian scheme となる。このことから、
~~ample~~ $\gamma_{\text{rat}}^{\text{ample}}$ の有理写像も含めて双有理変換を除
 いて有限個であること ~~を言うには~~ ~~★~~

補題3の類似品として ~~Kawamata deformation を使う~~

補題 $X \times S \xrightarrow{\psi} Y$ ψ 支配的有理写像
 $\downarrow \quad \swarrow \searrow$
 $S \quad \quad \quad$ (S の各 fibre 上で dense domain)

このとき $\mathcal{Y}$ の fibres は S を ~~適~~ 適当に stratification
した上で双有理同値。」

が言えればよい。

補題 $\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \bar{\mathcal{Y}} \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{Y} \end{array}$ ψ は surjective morphism.

$\searrow \wr$
 S

$$\mathcal{F}_{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}, \bar{\pi}_{\mathcal{X}}, S) \quad \mathcal{F}_{\mathcal{Y}} = (\mathcal{Y}, \bar{\mathcal{Y}}, \bar{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}}, \bar{\pi}_{\mathcal{Y}}, S)$$

(1) $\bar{\pi}_{\mathcal{X}} : \bar{\mathcal{X}} \rightarrow S$ ($\bar{\pi}_{\mathcal{Y}}$) は proper smooth morphism.

(2) $\bar{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}} (\text{resp } \bar{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}})$ は $\bar{\mathcal{X}} (\text{resp } \bar{\mathcal{Y}})$ の closed subset of $\bar{\mathcal{X}}$

このとき $\mathcal{X}$ が S 上 locally trivial ならば $\mathcal{Y}$ も
locally trivial.

この補題は $P_{S, S} : T_{S, S} \rightarrow H^1(\bar{\mathcal{Y}}_S, T_S(\log \bar{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}_S}))$

が zero となること。適当に stratification 2-

$\dim H^1(\bar{\mathcal{Y}}_S, T_S(\log \bar{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}_S}))$ を一定にすればよい。

さて $\mathcal{X} = \mathcal{X} \times S$ 1.2

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times S & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{Y} \\ \searrow \wr & & \uparrow \wr \\ & S & \end{array}$$

S を S 上の任意の curve C 上で考える。

$$X \times C \xrightarrow{\psi_C} \mathcal{Y}(C) \quad \psi_C \text{ の不定義点は}$$

C の任意点上 X で余次元が 2 以上である。

そこでそれを C に沿って動かしても余次元 1 以上

そこで

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} & & \\ \downarrow & \searrow & \\ (X-D) \times C & \longrightarrow & \mathcal{Y}(C) \\ & \searrow & \\ & C & \end{array}$$

という図式が成る。 $(X-D) \times C$ は C 上 trivial

であることから補題が成ててくるとあるう。

参考文献

- (1) A. Fujiki : Closedness of the Douady Spaces of compact Kähler spaces. P. R. I. M. S. Kyoto Univ. Vol 14. No 1 1978.
- (2) T. Fujita : On Kähler fibre spaces over curves.
J. M. S. J. Vol. 30. No 4, 1978
- (3) A. Grothendieck : Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV, Les schémas de Hilbert, Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61 n° 221.
- (4) S. Iitaka : On D-dimensions of algebraic varieties
J. M. S. J. , 23 , 356-373, (1971).
- (5) E. Horikawa : The rigidity theorem (unpublished)
- (6) H. Kurke : An algebraic proof of a Theorem of
S. Kobayashi and T. Ochiai
Forschungsinstitut für Mathematik eth Zürich (1978)
- (7) S. Kobayashi and T. Ochiai :
Meromorphic mappings onto complex spaces of general type
- (8) T. Matsusaka : Polarized varieties with a given Hilbert polynomial Amer. J. Math (94) (1972).

- (9) M. M-Deschamps and R. L-Menegaux :
Applications rationnelles separables dominantes sur une
variété de type general. C.R. Acad. Sc. Paris. t285 (1977)
- (10) D. Mumford : Lectures on curves on surfaces
Princeton Univ. Press.
- (11) C.P. Ramanujam : Remarks on the Kodaira
vanishing Theorem
J. of the Indian Math. Soc, 36 (1972)
- (12) Y. Kawamata : On deformations of compactifiable
complex manifolds.
Math. Ann. 235, 247-265 (1978)