

非負行列集合で定義される homogeneous 写像の性質

神奈川大学・工学部 進藤 晋

Susumu Shindoh

Faculty of Engineering, Kanagawa University

1 はじめに

非負行列に関する Perron Frobenius 理論 [2], [5] は, 制御理論や経済学等で応用されている. 一方, Perron Frobenius 理論の非線形理論への拡張 [6] も進展している.

本研究の目的は, 非線形 Perron Frobenius 理論を通して, 非負行列集合により定義される homogeneous 写像のいくつかの性質を紹介することである.

2 Perron Frobenius の定理

$M(d)$ を $d \times d$ 実行列空間とし, その部分集合である $d \times d$ 非負行列集合を $N(d)$ とする. このとき, $N(d)$ は $M(d)$ の閉凸錐となる.

$A \in N(d)$ を非負行列という, $A \in N(d)$ で各成分がすべて正となる行列を正行列という.

正方行列 A の固有値の集合を

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Ax = \lambda x, x \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}\}$$

とし, そのスペクトル半径を

$$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

で定義する.

$A \in N(d)$ が reducible であるとは, $d \times d$ 置換行列 P が存在して,

$$P^T A P = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

と表されることをいう. ここで, B および D は正方行列, 0 はゼロ行列, P^T は P の転置行列である. 行列が reducible でないとき, irreducible であるという.

Perron Frobenius の定理は, 非負行列 A がスペクトル半径 $r(A)$ を固有値に持つことを主張する [2].

定理 1 (Perron Frobenius の定理) $A \in N(d)$ は irreducible であるとする. このとき, 以下が成り立つ.

(1) $r(A) \in \sigma(A)$

(2) $r(A)$ は A の固有方程式の単純根

(3) $A \neq 0$ ならば, $r(A) > 0$

(4) $r(A)$ に対する固有ベクトル v の成分は, すべて正にとれる

(5) A の任意の非負固有ベクトルは v の定数倍となる

Perron Frobenius の定理から, 以下のことがわかる.

d 次元実ユークリッド空間 R^d の部分集合 R_+^d を, $R_+^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) : x_i \geq 0, i = 1, \dots, d\}$ で定義する. このとき, R_+^d は R^d 上の内点をもつ閉凸錐となる.

$A \in N(d)$ に対して, 写像 $f : R^d \rightarrow R^d$ を $f(x) = Ax$ ($x \in R^d$) で定義すると, 写像 f は, R_+^d を不変にする写像, すなわち, $f(R_+^d) \subset R_+^d$ となる. さらに, f は, 定数倍を除いて一意な固有ベクトル $v \in \text{int}(R_+^d)$ をもつ. ここで, $\text{int}(R_+^d)$ は R_+^d の内部を表す.

3 Homogeneous 写像

非線形 Perron Frobenius 理論は, 上の定理 1 をより一般的な凸錐上に拡張する [6]. 本論文では, R^d の閉凸錐 R_+^d を扱う.

$x, y \in R^d$ に対して, $x \leq y$ を $y - x \in R_+^d$, すなわち, すべての $i (i = 1, \dots, d)$ に対して, $x_i \leq y_i$ で定義する. このとき, $\leq$ は R^d 上の半順序となる.

$x, y \in R^d$ とする. $f : R_+^d \rightarrow R_+^d$ に対して, $0 \leq x \leq y$ ならば, $0 \leq f(x) \leq f(y)$ を満たすとき, f は順序を保存するという. $\alpha > 0, x \in R_+^d$ に対して, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ を満たすとき, f は homogeneous であるという.

homogeneous な写像 $f : R_+^d \rightarrow R_+^d$ に対して, $\|f^m\| = \sup\{\|f^m(x)\| : x \in R_+^d, \|x\| \leq 1\}$ が定義できる. ここで, f^m は, f による m 回の合成写像, $\|\cdot\|$ は R^d 上のノルムを表す.

4 例

$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_p\}$ を, p 個の $d \times d$ 非負行列からなる集合とする. 本節では, Bellman[1], Bondarenko[3] らが考察した以下の写像を扱う.

$$x_{n+1} = f_{\mathcal{A}}(x_n), \quad n \in N_0$$

ここで, $f_{\mathcal{A}}$ は, $f_{\mathcal{A}}(x) = \max_{A \in \mathcal{A}} Ax$ で定義される写像である. $\max$ は成分ごとの最大値を意味する. N_0 は非負整数集合, $x_n \in R^d (n \in N_0)$ である.

上記のシステムは, 任意の $x_0 \in R_+^d$ に対して, $x_n \in R_+^d (n \in N_0)$ を与える. したがって, $f_{\mathcal{A}}$ は, R_+^d から R_+^d への写像とみなすことができる.

このシステムは, 近年活発に研究されている discrete switched positive linear system [4] の一種と考えることができる.

$\{1, 2, \dots, d\}$ の任意の部分集合 U と, 任意の $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ に対して, 行列 $C \in N(d)$ を

$$C^{k\text{-th row}} = \begin{cases} A_i^{k\text{-th row}} & k \in U \\ A_j^{k\text{-th row}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する. ここで, $A_i^{k\text{-th row}}$ は A_i の第 k 行を表す. すべての部分集合 U , すべての $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ で生成された行列 C の集合を $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ で表す. このとき,

$$f_{\mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}(x)$$

が成り立つ.

以下では, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ を仮定する. この仮定は, product property[3] とよばれている.

ここで, $f_{\mathcal{A}}$ に関するいくつかの結果を与える (詳細は省略する).

命題 1

(1) $f_{\mathcal{A}}(x)$ は *homogeneous*, すなわち, 任意の $t > 0$ に対して, $f_{\mathcal{A}}(tx) = tf_{\mathcal{A}}(x)$ を満たす.

(2) $f_{\mathcal{A}}(x)$ は *convex*

(3) $x, y \in R_+^d$ かつ $x \leq y$ ならば, $f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(y)$

(4) $r(f_{\mathcal{A}}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_{\mathcal{A}}^m\|^{1/m}$ が存在する.

(5) すべての正整数 k に対して, $r(f_{\mathcal{A}}^k) = r(f_{\mathcal{A}})^k$

(6) ある $x \in R_+^d \setminus \{0\}$ に対して, $f_{\mathcal{A}}(x) = \lambda x$ ならば, $\lambda \leq r(f_{\mathcal{A}})$

(7) $\mathcal{A}$ に属するすべての行列が *irreducible* ならば, $f_{\mathcal{A}}$ は固有ベクトル $v \in \text{int}(R_+^d)$ をもつ

[注意] Bondarenko は, $g_{\mathcal{A}}(x) = \min_{A \in \mathcal{A}} Ax$ で定義される写像についても議論している [3].

5 今後の課題

非線形 Perron Frobenius 理論は, いろいろな分野に応用可能と思われる. 例えば, Doan 等が, 論文 [4] で扱っている positive switched system に対する Lyapunov 関数と Collatz Wielandt 集合の関係など, 理論および応用の両面から, さらに拡張する必要がある.

[謝辞] 本研究は, 科研費補助金 (基盤 C, No.22510161) から一部支援を受けた.

参考文献

- [1] Bellman, R. : On a quasi-linear equation, *Canad. J. Math.*, No. 8, pp.198 - 202, (1956)
- [2] Berman, A. and R.J. Plemmons : *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, SIAM (1994)
- [3] Bondarenko, I. : Dynamics of piecewise linear maps and sets of nonnegative matrices, *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 431, Issues 5-7, pp.495 - 510, (2009)
- [4] Doan, T.H. et al. : A constructive approach to linear Lyapunov functions for positive switched systems using Collatz Wielandt sets, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 58, No. 3, pp.748 - 751, (2013)
- [5] Horn, R.A. and C.R. Johnson : *Matrix Analysis*, Cambridge University Press (2011)
- [6] Lemmens, B. and R. Nussbaum : *Nonlinear Perron Frobenius Theory*, Cambridge University Press (2012).