

On strongly radical Galois objects

神大 教養 竹内 康滋

§1. 導入. 以下, A は単位元 1 をもつ可換環とする. C を A -algebra とする. finite commutative Hopf algebra H (over A) の dual Hopf algebra H^* が C を C に measure し, 次の 2 つの条件を満たすとき, C を Galois H -object という (1969 年に Chase と Sweedler によって定義された)。

(1) C は finitely generated faithful projective A -module

(2) measuring により自然に定義される写像

$$C \#_A H^* \rightarrow \text{Hom}_A(C, C)$$

が, 環同型である。

K^* を admissible Hopf subalgebra of H^* とする。すなわち, Hopf algebra の homomorphism $f: H^* \rightarrow K^*$ があって, f は epimorphism であり, A -module homomorphism として split している。 B は C の subalgebra とする。今, $w \in C \otimes H^*$ に対して, $w(B) = 0$ となるのは, $w \in C \otimes H^* \otimes K^*$ のとき, 7 のときに限るなら

は, $B \rightarrow K^*$ とかく. $\therefore$ $\bar{B}$ は, coalgebra K^* の augmentation ε_{K^*} の kernel である。

1969年に Chase と Sweedler は 次の定理を証明した。

定理. H は finite commutative Hopf algebra とし, A -algebra C は Galois H -object とする. このとき 対応 $K^* \mapsto C^{K^*}$ は, admissible Hopf subalgebra of H^* と certain subalgebra of C との間に 1対1 対応を与える。

ここで, $C^{K^*} = \{c \in C \mid dc = \varepsilon(d)c \text{ for } \forall d \in K^*\}$, certain subalgebra とは, admissible Hopf subalgebra K^* of H^* が存在して, $B \rightarrow K^*$ となるような B のことである。このことからわかるように, Galois 対応で対応する subalgebra の good characterization を与えていえるとは言い難い。ところが, Hopf-algebra H が, C の有限 A -automorphism group の group ring の dual であるときには, Galois H -object は, Chase, Harrison, Rosenberg の Galois extension となり, 上の定理は, そのときの Galois correspondence theorem を意味していることが, Chase と Sweedler によって示されている。ところで, 当然のこととして, 次の問題が起る

問題 I. H^* が higher order derivation で生成 (algebra として) されているときは, Galois 対応に表われる subalgebra は何か
ここでは もう一つの問題を考へる。

問題 II. やはり H^* が higher order derivation で生成されているとき, subring の列 $C = C_0 > C_1 > \dots > C_n = A$ が存在して, (1) C_i は有限生成 projective C_{i+1} -module (2) $C_i[\text{Der}_1(C_i/C_{i+1})] = \text{Hom}_{C_{i+1}}(C_i, C_i)$ (ただし, $\text{Der}_1(C_i/C_{i+1})$ は, C_i -derivation in C_i の集合) なるように出来るか。

問題 II を考える理由の一つは, どのような subring の列があれば, S. Yuan によって Amitsur's cohomology group $H^n(C_i/C_{i+1})$ が, $n \geq 3$ のとき消えることが示されている。したがって $H^n(C/A) = 0$ ($n \geq 3$) が出ることになる。

問題 I は, $\text{char}(A/\mathfrak{z}) \neq 0$ ($\mathfrak{z} \in \text{Spec}(A)$) なる環 A があるとき, 完全な解答を与えることが出来る。問題 II については, 標数が 0 でない体 A について, affirmative answer を与えることが出来る。

§2. 準備. A を単位元 1 をもつ可換環とする。 H を A 上の coalgebra, δ を δ の diagonal map, ε を augmentation map とする。このとき元 $g \in H$ が grouplike であるとは, $\delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$ なることをいう。coalgebra H が split しているとは, H が A -module として, 次のようになっているときをいう。すなわち, $H = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}(H)} U_g$. ただし, U_g は g を唯一つの grouplike element とした含む subcoalgebra で, $U_g = A_g + (U_g \cap \text{Ker}(\varepsilon))$ なる

ものである。

A 上の Hopf algebra H が A -module と 1 は finitely generated projective ならば, H は finite Hopf algebra である。このとき H の dual H^* も finite Hopf algebra である。

次: higher order derivation および strongly radical extension についておく。 C は A -algebra とする。今, $D \in \text{Hom}_A(C, C)$ に対して, $[D, a] \in \text{Hom}_A(C, C)$ ($a \in C$) を次のように定義する。

$$[D, a](x) = D(ax) - aD(x) - D(a)x \quad (x \in C)$$

このとき, $D \in \text{Hom}_A(C, C)$ が通常の derivation であるために, $[D, a] = 0$ ($\forall a \in C$) なることが必要かつ十分な条件である。ところで, C の任意の g 個の元 $a_1, a_2, \dots, a_g$ に対して,

$[[\dots [D, a_1] a_2] \dots a_g] = 0$ ならば, D は g -th order derivation と

いう。 g -th order derivation on C の全体からなる集合を $\text{Der}_g(C/A)$

とかく。 $\bigcup_{g=1}^{\infty} \text{Der}_g(C/A)$ を $\text{Der}(C/A)$ で表わす。このとき, $\text{Der}(C/A)$

は, $\text{Hom}_A(C, C)$ の left C -submodule かつ subring をなす。 $\nu: C$

$\rightarrow \text{Hom}_A(C, C)$ を $\nu(c)(x) = cx$ ($c, x \in C$) とすれば, $\nu(C) + \text{Der}(C/A)$

$= \nu(C) \oplus \text{Der}(C/A)$ 。これを $\mathcal{D}(C/A)$ とおくと, $\mathcal{D}(C/A)$ は A -algebra

of $\text{Hom}_A(C, C)$ である。したがって derivation algebra of C/A と呼ばれる。

今, C は可換環 A の可換拡大環とする。このとき $J =$

$$= J_{C/A} = \text{Ker}(C \otimes_A C \rightarrow C) \quad \text{とおく.}$$

$$x \otimes y \mapsto xy$$

定義. A は 各素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して, $A_{\mathfrak{p}}$ の標数 $\neq 0$ なるものとする。拡大 C/A が次の2つの条件をみたすとき, C は strongly radical extension という。

(1) C は A -module として, 有限生成射影的。

(2) $J_{C/A}$ は nilpotent.

以下, 可換環 A は, 各素イデアル $\mathfrak{p}$ について, $A_{\mathfrak{p}}$ の標数 $\neq 0$ なるものと仮定する。

拡大 C が A -module として, 有限生成射影的であれば C が strongly radical extension になるために, $\mathcal{Q}(C/A) = \text{Hom}_A(C, C)$ となることが, 必要かつ十分な条件である。

後の準備のために, 証明なしで次の定理を述べておく。

定理 (Galois correspondence theorem). C は strongly radical extension of A とする。

$$\Delta = \{E \mid C\text{-module direct summand of } \mathcal{Q}_n(C/A) \text{ であり, 積に閉じ, 交に閉じ, かつ operator } [\] \text{ についても閉じている}\}$$

$$\Gamma = \{B \mid C \text{ と } A \text{ の中間環で, } C \text{ が } B\text{-projective}\}$$

このとき Δ と Γ の間には 1 対 1 対応がつく。その対応は

$E \mapsto \text{Ker}(E) = \{x \in C \mid D(x) = 0 \ \forall D \in E\} \quad (E \in \Delta)$ で, $B \mapsto \text{Der}(C/B) \quad (B \in \Gamma)$ がその逆対応である。

§ 3. 問題 I について. H を finite commutative Hopf algebra A とする. Galois H -object C には A 上の dual Hopf algebra H^* が, A -algebra として, higher order derivation で生成されるならば, C は A 上 strongly radical extension である (Galois correspondence theorem の上に書いたことを参照)。
したがって, 次の定理は 問題 I の解を与えてくれる。

定理 1. H を finite cocommutative split Hopf algebra A とする。 C は A 上 strongly radical な Galois H^* -object であるとする。

$$\mathcal{F} = \{ U \mid \text{subalgebra of } H \text{ that is } A\text{-module direct summand of } H \}$$

$$\mathcal{G} = \{ B \mid \text{distinguished intermediate ring between } A \text{ and } C \}$$

とあると, 対応 $U \mapsto \text{Ker}(U^+)$ は $\mathcal{F}$ から $\mathcal{G}$ の上への 1 対 1 対応を与える。

ただし, 中間環 B が distinguished であるとは, $\text{Hom}_A(C, C)$ の中で考え, $C \cdot (H^+ \cap \text{Der}(C/B)) = \text{Der}(C/B)$ をみたすときをいう。 $H^+ = \text{Ker}(\varepsilon)$ で, ε は H の augmentation map である。

また, $U^+ = U \cap \text{Ker}(\varepsilon)$ である。

中間環 B で, C が B -projective なるものに対しては, B が distinguished なるために, 次の条件は必要かつ十分である。

" $\text{Der}(C_B)$ は C -module direct summand of $\text{Der}(C_A)$ だから

$\text{Der}(C_A) = \text{Der}(C_B) \oplus M$ と表せる。このとき projection:

$\text{Der}(C_A) \rightarrow M$ を Proj_M とかくと, $C \otimes \text{Proj}_M(H^+) = C \text{Proj}_M(H^+)$ なることである。"

したがって, 上のとき, $\text{Proj}_M(H^+)$ は A -projective である。

定理 1 の証明. H が split 1 であることより $H = \bigoplus_{g \in G(H)} U_g$.

$U_g = 0$ ($g \neq 1$) を示す。localization 1 を考えればよいから, A は local とよい。このとき $C \otimes C$ は local で, $C \otimes C \cong C \otimes H^*$ より H^* も local。したがって, $H = (H^*)^*$ は irreducible。ゆえに $U_g = 0$ ($g \neq 1$)。これより $H = A1 \oplus H^+$ をうる。 Δ ,

Γ は Galois correspondence theorem のものとする。 $U \in \mathcal{H}$ に対

して, $C \otimes U^+ \in \Delta$ なることは明らかである。したがって

$B = \text{Ker}(C \otimes U^+) = \text{Ker}(U^+)$ は Γ に属し, $\text{Der}(C_B) = C \otimes U^+$

となる。 $B \in \mathcal{G}$ なることを示そう。 $H = U \oplus U'$ だから,

$C \otimes H = (C \otimes U) \oplus (C \otimes U')$. $U' = \text{Proj}_{C \otimes U'}(H^+)$ および $C \otimes H$

$\cong C \cdot H$ より $C \otimes \text{Proj}_{C \otimes U'}(H^+) \cong C \cdot \text{Proj}_{C \otimes U'}(H^+)$ をうる。ゆ

えに $B \in \mathcal{G}$. 逆に, $B \in \mathcal{G}$ としよう。このとき $B \in \mathcal{P}$ より,

$\text{Der}(C_A) = \text{Der}(C_B) \oplus M$ となる。完全系列

$$0 \rightarrow U^+ \rightarrow H^+ \rightarrow K_0 \rightarrow 0$$

$$\text{ただし, } K_0 = \text{Proj}_M(H^+), \quad U^+ = \text{Ker}(\text{Proj}_M / H^+)$$

は split する。したがって $H^+ = U^+ \oplus K$ とかける。ただし、 K は $K \cong K_0$ なる H^+ の A -submodule である。§4₂ を modulus として考え、次数を比較すれば、 $C \otimes U^+ = \text{Der}(C/B)$ となる。 $U = A1 + U^+$ とおく。このとき U が H の subalgebra となることは明らかであるが、さらに subcoalgebra となることは、 $C \otimes U^+$ が operator [] に属していることから出る。 U が A -module direct summand of H なることは自明であるから、 $U \in \mathcal{F}$ となる。対応: $U \mapsto \text{Ker}(U^+)$ が $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の間の 1対1 対応を与えることは、Galois correspondence theorem より明らかであろう。

§4. 問題 II について。以下において、 A は標数 $\neq 0$ の体とする。さらに、 H は cocommutative pointed Hopf algebra over A , C は Galois H^* -object/ A で、 $A \perp$ strongly radical extension になっているものとする。coalgebra が, pointed であるとは、すべての simple subcoalgebra が 1次元なることである。

H の元および $C \# H$ の元は、 $\text{Hom}_A(C, C)$ の元と同一視する。このとき $C \otimes H^+ = \text{Der}(C/A)$ 。したがって

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(\mathcal{D}_H(A), C) &\cong \text{Hom}_C(C \otimes H^+, C) \cong C \otimes \text{Hom}_A(H^+, A) \\ &\cong C \otimes (H^*)^+. \end{aligned}$$

よって, $C \otimes (H^*)^+ \cong J_{C/A}$ as left C -modules.

Lemma 2. $J_{C/A} \cong C \otimes (H^*)^*$ as rings

(証). $F, G \in \text{Hom}_C(C \otimes H^+, C)$ に対して, 積 $F * G$ を

$$F * G : 1 \otimes d \mapsto \sum_{(d)} F(1 \otimes d_{(1)}) G(1 \otimes d_{(2)})$$

で定義すれば, $\text{Hom}_C(C \otimes H^+, C)$ は 環となる. ところで,

$$\sum_{(d)} d_{(1)} \otimes d_{(2)} = \delta(d) = 1 \otimes d + d \otimes 1. \quad \text{このとき, } \text{Hom}_C(C \otimes H^+, C) \cong C \otimes (H^*)^* \text{ as rings.}$$

したがって, $J_{C/A} \cong \text{Hom}_C(C \otimes H^+, C)$ as rings を示せばよい. C -module isomorphism $\alpha : J_{C/A} \rightarrow$

$\text{Hom}_C(C \otimes H^+, C)$ は, $\alpha(1 \otimes x - x \otimes 1)(1 \otimes d) = cd(x)$ である.

$$\begin{aligned} \text{したがって, } \alpha((1 \otimes x - x \otimes 1)(1 \otimes y - y \otimes 1))(1 \otimes d) &= d(xy) - xd(y) - dxy \\ &= \sum_{(d)} d_{(1)}(x) d_{(2)}(y). \quad \text{他方, } \{\alpha(1 \otimes x - x \otimes 1) * \alpha(1 \otimes y - y \otimes 1)\}(1 \otimes d) \\ &= \sum_{(d)} \alpha(1 \otimes x - x \otimes 1)(1 \otimes d_{(1)}) \alpha(1 \otimes y - y \otimes 1)(1 \otimes d_{(2)}) = \sum_{(d)} d_{(1)}(x) d_{(2)}(y) \end{aligned}$$

ゆえに, α は ring-isomorphism である.

H は coalgebra として, irreducible から, A_1 は H の coradical である. $H_i = \bigwedge^{i+1}(A_1)$ ($i=0, 1, 2, \dots$) とおく. このとき つぎのことが成立する (Sweedler; Hopf-algebra を参照)

$$(1) \quad H = \bigcup_i H_i$$

$$(2) H_0 = A^1$$

$$(3) H_1^+ = P(H) \quad \text{where } P(H) = \{d \in H \mid \delta(d) = 1 \otimes d + d \otimes 1\}$$

$$(4) \delta(H_n) \subseteq \sum_{i=0}^n H_i \otimes H_{n-i}$$

$$(5) \lambda(H_i) \subseteq H_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{where } \lambda \in L \quad \lambda \text{ is } H \text{ of}$$

antipode τ がある。

定理 3. $C_i = \text{Ker}(H_i^+)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) とおくと, 次のことが成立する。

(1) C is strongly radical extension of C_i τ がある。

$$(2) C_i = \text{Ker}(\text{Der}_i(C/A))$$

$$(3) C \# A[H_i] = \text{Hom}_{C_i}(C, C)$$

$$(4) C_{i+1} = \text{Ker}(\text{Der}_1(C_i/C_{i+1}))$$

$$(\text{証}) \quad \text{lemma 2 より} \quad J/J^{i+1} \cong C \otimes (H^*)^+ / ((H^*)^+)^{i+1}$$

$$\text{where } \text{Der}_i(C/A) \cong \text{Hom}_C(J/J^{i+1}, C)$$

$$\cong C \otimes \text{Hom}_A((H^*)^+ / ((H^*)^+)^{i+1}, A)$$

$$\text{where } H_i = [((H^*)^+)^{i+1}]^\perp \cong \text{Hom}_A((H^*)^+ / ((H^*)^+)^{i+1}, A)$$

where τ is, left C -module τ is,

$$\text{Der}_i(C/A) \cong C \otimes H_i^+$$

where τ is,

$$C[\text{Der}_i(C/A)] = C \otimes A[H_i^+]$$

where τ is, where $\{C[\text{Der}_i(C/A)]\}^+ \in \Delta$, where τ is (1), (2)

(3) を示している。(4) の証明をする。 $C_{i+1} \subseteq \text{Ker}(\text{Der}_1(C_i/C_{i+1}))$ は自明である。 $x \in \text{Ker}(\text{Der}_1(C_i/C_{i+1}))$, $x \notin C_{i+1}$ なる x が存在したとすると、このとき、 $d \in H_{i+1}^*$ があって、 $d(x) \neq 0$ 。ところで C は C_i -free なる故、projection $p: C \rightarrow C_i$ を適当にとれば、 $(pd)(x) \neq 0$ 。 d は ordinary C_{i+1} -derivation: $C_i \rightarrow C$ を用いておけるゆえ、 $pd \in \text{Der}_1(C_i/C_{i+1})$ とみれる。これは矛盾である。ゆえに、 $C_{i+1} = \text{Ker}(\text{Der}_1(C_i/C_{i+1}))$ 。

基礎環が体となすとき、問題 II の解き、次の定理は与えている。

定理 4. A は、標数が 0 でない体、 H は A 上の cocommutative pointed Hopf-algebra, C は A 上 strongly radical な Galois H^* -object とする。このとき C の subring の列 $C = C_0 \supset C_1 \supset \dots \supset C_n = A$ が存在して、

(1) C_i は有限生成射影的 C_{i+1} -module

(2) $d(C_i) \subseteq C_i$ ($\forall d \in H$)

(3) 自然 π_i 写像: $C_i \otimes H \rightarrow \text{Hom}_A(C_i, C_i)$ は epimorphism

(4) $C_i[\text{Der}_1(C_i/C_{i+1})] = \text{Hom}_{C_{i+1}}(C_i, C_i)$

これを証明するためには、3 つの lemma が必要である。

Lemma 5. J/J^2 は C 上 free である。ただし、 $J = J_C/A$ 。

(証). C_1 を定理3 のようにとれば, C_1 は C_1 上 p -basis
をもつ [8, Theorem 10]. したがって, J_1/J_1^2 は C 上 free. したがって
し $J_1 = J_C/C_1$. ところが, C -module として, $J/J^2 \cong J_1/J_1^2$.

Lemma 6. C_1 上の Lemma の証明のようには,
 A -algebra C の generators $t_1, t_2, \dots, t_r$ が存在して, $C_1 = A[t_1^p, t_2^p, \dots, t_r^p]$ とする. したがって, p は A の標数.

(証). $t_1, t_2, \dots, t_r \in C$ として, $\{1 \otimes t_i - t_i \otimes 1 \pmod{J^2}\}$ が
 J/J^2 の $C \otimes 1$ -module basis なるようにとる. このとき $C =$
 $A[t_1, t_2, \dots, t_r]$ である. したがって, 任意の $x \in C_1$ に対して
 $x = \sum a_{e_1} t_1^{e_1} t_2^{e_2} \dots t_r^{e_r}$ とかける. したがって $a_{e_1} \in A$. 今 $d_1, d_2, \dots,$
 $d_r \in \text{Der}_1(C/A)$ として, $d_i(t_j) = \delta_{ij}$ なる $d_1, \dots, d_r$ を用いて, e_i
の係数で表わされることを示される.

Lemma 7. $d \in H^+$, $x \in C$ ならば, $d(x^{p^t}) \in A \cdot C^{p^t}$ ($t=0, 1, 2, \dots$).

(証). $d_0 (= 1)$, $d_1, d_2, \dots, d_t$ は H の A -basis とする. このとき
 $\delta_m(d) = \sum a_{(i_1)} d_{(i_1)} \otimes d_{(i_2)} \otimes \dots \otimes d_{(i_m)}$ とかける. したがって,
 $a_{(i_1)} \in A$, $m = p^t$, $\delta_m = (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \delta) \dots (1 \otimes \delta \otimes \delta)$. H は
cocommutative であるから, $a_{(i_1, \dots, i_m)} = a_{(j_1, j_2, \dots, j_m)}$ である. したがって,
 $(j_1, \dots, j_m)$ は $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ の permutation である. したがって

$$d(x^n) = \sum_{0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_m} \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \gamma!} a_{(k_1, \dots, k_m)} d_{k_1}(x) \dots d_{k_m}(x)$$

ただし, $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ は $\{k_1, \dots, k_m\}$ 中の等しい数の個数.

ところで, $\frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \gamma!} \equiv 0 \pmod{p}$ unless $k_1 = k_2 = \dots = k_m$.

ゆえに, Lemma 7 をうる.

定理 4 の証明. C_i, H_i を定理 3 と同じものとする. こ

のとき $C = C_0 \supset C_1 \supset \dots \supset C_n = A$ が, 定理の条件 (1) ~ (4)

を満たすことを示す. (1) は明らかである. $i=1$ のとき, (2) は

Lemma 6, 7 からいえる. C_1 -module C は $C = C_1 \oplus C_1'$ とかけ

ることを用いて, (3) がいえる. 一方, 定理 3 から, $C \otimes A[H_2]$

$= \text{Hom}_{C_2}(C, C)$ だから, C_1 -module $\text{Hom}_{C_2}(C_1, C_1)$ は, $A[H_2]$ の

元でひきおこされた C_1 の endomorphism で生成される. ところで

が H_2^+ の元は, C_1 の ordinary derivation をひきおこすゆえ,

$C_1[\text{Der}_1(C_1/C_2)] = \text{Hom}_{C_2}(C_1, C_1)$ をうる. したがって C_2

$= \text{Ker}(H_2^+) = \text{Ker}(\text{Der}_1(C_1/C_2))$ である. 再び Lemma 6 を用いて

$t_1, t_2, \dots, t_r \in C_1$ を適当にとれば, $C = A[t_1^p, t_2^p, \dots, t_r^p]$ となる.

したがって, $C_2 = AC^{p^2}$. 以下, 上と同じ議論をくりかえして

定理をうる.

系. 定理4と同じ状態の下に, さらに K は C -algebra
 として有限生成射影的とする. このとき
 Amitsur cohomology group について

$$H^n(K/A) = H^n(K/C) \quad (n \geq 2)$$

$$0 \rightarrow H^2(C/A) \rightarrow H^2(K/A) \rightarrow H^2(K/C) \rightarrow 0$$

は exact

(証明). Rosenberg-Zelinsky [5] によって次の exact sequence がえ
 られている

$$\cdots \rightarrow H^{n-1}(K/C) \rightarrow H^n(C/A) \rightarrow H^n(K/A) \rightarrow H^n(K/C) \rightarrow \cdots$$

そこで一般に $H^1(K/C) = 0$. 上の定理と, 上の exact seq-
 uence を用いて, $H^n(C/A) = 0$ ($n \geq 2$). ところで, Yuan によって
 $H^n(C_i/C_{i+1}) = 0$ ($n \geq 2$) [10] が示されている. 再び上の exact
 sequence を用いれば, 系がえられる。

系について, もっと一般の場合に同じ結果がえられると
 いうことを昨年(1944年)に学会で発表したが, 証明に間違い
 があった, 結果が正しいかどうかは, 今のところ不明である。
 しかし, 系において, C が Galois object であるという仮定が
 なくても同じ結果がえられることが 村井君によって証明さ
 れた。

References

- [1]. S. A. Amitsur : Homology groups and double complexes for arbitrary fields, J. Math. Soc. Japan 14(1962) 73-112.
- [2]. N. Bourbaki : Algèbre commutative, Chap. 1, 2. Hermann 1961.
- [3]. S. U. Chase and M. E. Sweedler : Hopf Algebras and Galois Theory, Lecture Notes in Math. Vol. 97, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [4]. Y. Nakai : High order derivations I, Osaka J. Math. 7 (1970), 1-27.
- [5]. A. Rosenberg and D. Zelinsky : Amitsur's complex for inseparable fields, Osaka Math. J. 14 (1962), 219-240.
- [6]. M. E. Sweedler : Hopf Algebras, Benjamin, New York, 1969.
- [7]. Y. Takeuchi : On strongly radical extensions, to appear in Pacific J. Math.
- [8]. S. Yuan : Inseparable Galois theory of exponent one, Trans. Amer. Math. Soc. 149(1970), 163-170.
- [9]. — : Finite dimensional inseparable algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 150(1970), 577-589.
- [10]. — : Central separable algebras with purely inseparable splitting rings of exponent one, Trans. Amer. Soc. 153(1971), 427-450.