

## 四元数射影空間の平行部分多様体

都立大理 塚田和美 (Kazumi Tsukada)

次のような問題を考えよう。

問題:  $\tilde{M}$  を Riemann 対称空間,  $f: M \rightarrow \tilde{M}$  を Riemann 多様体  $M$  から  $\tilde{M}$  への  $\mathbb{H}$  基本形式が平行な isometric immersion とする。この時  $M$  と  $f$  を決定せよ。

以上の時,  $M$  は局所 Riemann 対称空間になることが知られており, 対称空間の様々な理論との関連で興味深い。以後  $f$  により,  $\tilde{M}$  に immerse された  $M$  のことを  $\tilde{M}$  の 平行部分多様体 と呼ぶことにする。ここでは  $\tilde{M}$  が四元数射影空間  $\mathbb{H}P(n)$ ,  $n$  の non-compact dual の時 平行部分多様体を決定することを試みる (Theorem 2.2, Theorem 2.3)。

$\tilde{M}$  が複素空間形の時  $n$  の平行部分多様体は内藤氏によって精密でかつ最終的な形で決定されたが ([3], [4]),  $n$  の時使われた方法はかなり一般の対称空間に対して上の問題を解決する方向性を与えていられると思われる。そこで最初に私なりに

内藤氏の方法を整理してみる；

上の問題に対して「 $M$ は Riemann 対称空間で  $f$  は equivariant immersion になる」と解答の“目星”をつける。即ち  $(\tilde{G}, \tilde{K}), (G, K)$  をそれぞれ  $\tilde{M}$  及び  $M$  に対応する Riemann 対称対とする時、Lie 群の準同型  $\rho: G \rightarrow \tilde{G}$  があって各点  $p \in M$  及び各元  $g \in G$  に対して  $f(g \cdot p) = \rho(g) f(p)$  となる。この“目星”に沿って次の 2 つの Steps を実行する。

1st Step Reduction Theorem (Theorem 2.2 に相当)

例えば複素射影空間  $P_n(\mathbb{C})$  の平行部分多様体  $M$  は次の図式によつて  $P_n(\mathbb{H})$  の平行部分多様体になる、という。

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & P_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & P_n(\mathbb{H}) \\ & & \text{才 2 基本形式 平行} & & \text{全測地的} \\ & & & & \text{(totally geodesic)} \end{array}$$

本質的にどこの平行部分多様体か区別し整理しておく必要がある。また次の Step の準備として問題を代数化する必要がある。そのために次のような状態にしておきたい；

$$T_p M + N'_p(M) = T_p \tilde{M}$$

ここで  $N'_p(M)$  は才 2 基本形式の像が張る  $T_p \tilde{M}$  の部分空間である。才 2 基本形式が平行となっていることから、immersion の微分幾何学的量としては才 2 基本形式までしか捉えることができない。従つて才 2 基本形式までですべて制御で

きるようにしておくことが望まれる。以上が Reduction Theorem のもうひとつの意義である。

2nd Step 平行部分多様体の model の構成。

$\tilde{G}$  及び  $G$  の Lie 環をそれぞれ  $\tilde{\mathfrak{g}}$  及び  $\mathfrak{g}$  とする時,  $\pi$  2 基本形式が平行になるような immersion が得られるように Lie 環の準同型  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$  を構成することが本質である。今まで実及び複素空間形についてその平行部分多様体が決定されているが, Lie 環の準同型の構成という点から見れば一般的手法はまた見出されていず, 各個撃破的と思われる。

以下この論説では  $Rn(H)$  を含む Riemann 多様体の class である Quaternionic Kaehler manifold の部分多様体論を紹介し, 1st Step の Reduction Theorem を述べることを主目標にしよう。

## §1. Quaternionic Kaehler manifold とその部分多様体

まず線形代数学の準備をしよう。  $H$  を四元数体 即ち

$$H = \{ \lambda = a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j \} \text{ とする。}$$

$V$  を右からのスカラー積及びエルミート内積  $(,)$  をもつ

$H$  上の Vector space とする。特に Quaternionic Hermitian

vector space と呼ぶ。この Vector space を Real vector space として捉えたい。そのために次のような (実) 線形変換の作る代数  $A$  及び ユークリッド内積  $\langle, \rangle$  をもつ Real vector space  $V$  を考える。

- (1.1) {
- (1)  $A$  は  $\mathbb{H}$  と同型で  $A$  の単位元が恒等変換に対応している。
  - (2)  $\mathbb{H}$  の  $i, j, k$  に対応する  $A$  の元をそれぞれ  $\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}$  とする時、 $\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}$  で張られる  $A$  の部分空間を  $A'$  とおく。ユークリッド内積  $\langle, \rangle$  は  $A'$  の元で不変。即ち  $L \in A'$ ,  $u, v \in V$  に対して、 $\langle Lu, v \rangle + \langle u, Lv \rangle = 0$ 。

Lemma 1.1 Quaternionic Hermitian vector space  $(V, (,))$  から (1.1) を満たす Real vector space  $(V, A, \langle, \rangle)$  が構成でき逆も成立する。

Quaternionic Hermitian vector space  $(V, (,))$  から Real vector space  $(V, A, \langle, \rangle)$  を構成するには、まず  $V$  の係数体を  $\mathbb{R}$  に制限して real vector space を得る。次に (実) 線形変換  $\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}$  を  $u \in V$  に対して  $\tilde{i}u = u(-i)$ ,  $\tilde{j}u = u(-j)$ ,  $\tilde{k}u = u(-k)$  で定義する。これらと恒等変換を合わせて  $A$  を生成する。さらに エルミート内積  $(,)$  の実部分をとって ユークリッド内積  $\langle, \rangle$  を定義すれば  $A$

及び  $\langle, \rangle$  は (1.1) を満たす。この過程の逆をたどれば、  
Real vector space  $(V, A, \langle, \rangle)$  を Quaternionic Hermitian  
vector space と見做せる。

各点の接空間が Real vector space として捉えた Quaternionic Hermitian vector space となりかつその構造が平行移動で不変になっている Riemann 多様体として Quaternionic Kaehler manifold を定義する。即ち

Definition 1.2 (石原 [2])  $\tilde{M}$  を連結な可微分多様体、  
 $A'$  を (1,1) 型のテンソルから成る Vector bundle  $\text{Hom}(T\tilde{M}, T\tilde{M})$   
の 3-dim subbundle,  $\tilde{g}$  を  $\tilde{M}$  上のリーマン計量とする。 $A'$ ,  
 $\tilde{g}$  が次の性質を満たす時  $(\tilde{M}, A', \tilde{g})$  を Quaternionic  
Kaehler manifold と呼ぶ。

(a)  $\tilde{M}$  の各座標近傍  $U$  上で次のような  $A'$  の local base  $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$  がとれる;

$$\tilde{I}^2 = \tilde{J}^2 = \tilde{K}^2 = -\text{id}, \quad \tilde{I}\tilde{J} = -\tilde{J}\tilde{I} = \tilde{K},$$

$$\tilde{J}\tilde{K} = -\tilde{K}\tilde{J} = \tilde{I}, \quad \tilde{K}\tilde{I} = -\tilde{I}\tilde{K} = \tilde{J},$$

ここで  $\text{id}$  は恒等変換を表わす。

これらの式を満たす  $A'$  の local base を canonical base と  
言うことにする。

(b) 任意の点  $p$  に対して  $\tilde{g}_p$  は  $A'_p$  の元で不変。即ち

$$L \in A'_p, u, v \in T_p \tilde{M} \text{ に対して } \tilde{g}_p(Lu, v) + \tilde{g}_p(u, Lv) = 0.$$

(c)  $A'$  は  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  の Riemannian connection  $\tilde{\nabla}$  に関して parallel. 即ち  $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$  を  $U$  上の canonical base とすると,  $U$  上で定義された 1-forms  $\alpha, \beta, \gamma$  が存在して

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{I} = \gamma(X) \tilde{J} - \beta(X) \tilde{K}$$

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{J} = -\gamma(X) \tilde{I} + \alpha(X) \tilde{K}$$

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{K} = \beta(X) \tilde{I} - \alpha(X) \tilde{J}$$

が成り立つ。

容易に分るように  $A_p$  と恒等変換で生成された線形変換の部分空間を  $A_p$  とおけば,  $(T_p \tilde{M}, A_p, \tilde{g}_p)$  は Quaternionic Hermitian vector space である。

例 Wolf ([7]) は Riemann 対称空間の中で Quaternionic Kaehler manifold と存在ものを分類している。  $P_n(\mathbb{H})$  及びその non-compact dual もその class の中に含まれる。

ここで  $P_n(\mathbb{H})$  及びその non-compact dual の curvature tensor  $\tilde{R}$  を Quaternionic Kaehler structure の言葉を使って表示しよう。

Proposition 1.3 (石原 [2])  $P_n(\mathbb{H})$  ( $n \geq 2$ ) 及びその non-compact dual の curvature tensor  $\tilde{R}$  は次の形をしている。

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z = \frac{\tilde{c}}{4} \{ & \tilde{g}(Y, Z)X - \tilde{g}(X, Z)Y + \tilde{g}(\tilde{I}Y, Z)\tilde{I}X - \tilde{g}(\tilde{I}X, Z)\tilde{I}Y \\ & + \tilde{g}(\tilde{J}Y, Z)\tilde{J}X - \tilde{g}(\tilde{J}X, Z)\tilde{J}Y + \tilde{g}(\tilde{K}Y, Z)\tilde{K}X - \tilde{g}(\tilde{K}X, Z)\tilde{K}Y \\ & - 2\tilde{g}(\tilde{I}X, Y)\tilde{I}Z - 2\tilde{g}(\tilde{J}X, Y)\tilde{J}Z - 2\tilde{g}(\tilde{K}X, Y)\tilde{K}Z \} \end{aligned}$$

ここで  $P_n(H)$  の時  $\tilde{c} > 0$  で、

その non-compact dual の時  $\tilde{c} < 0$  である。

次に Quaternionic Kaehler manifold の 3 種類の部分多様体を定義しよう。その準備として Quaternionic Hermitian vector space の次の 3 種類の実部分空間を考える。

Definition 1.4 (船橋 [1])  $(V, A, \langle, \rangle)$  を Quaternionic Hermitian vector space とし,  $A'$  を  $\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}$  で張られた  $A$  の subspace とする。  $V$  の実部分空間  $W$  が

- ① invariant  $\iff$  任意の  $L \in A'$  について  $LW \subset W$ 。
- ② totally complex  $\iff$   $A'$  の 1-dim subspace  $A_0$  が存在して任意の  $L \in A_0$  について  $LW \subset W$  かつ  $A_0$  に直交する任意の  $L \in A'$  について  $LW \perp W$ 。

- ③ totally real  $\iff$  任意の  $L \in A'$  について  $LW \perp W$

以上の subspaces を model にして, 3 種類の immersions を定義する。

Definition 1.5 ([1])  $(\tilde{M}, A', \tilde{g})$  を Quaternionic Kaehler manifold,  $f: M \rightarrow \tilde{M}$  を Riemann 多様体  $M$  から

$\tilde{M}$  への isometric immersion とする。任意の点  $p$  に対して  $f_*(T_p M)$  が  $T_{f(p)} \tilde{M}$  の invariant, totally complex, totally real subspace の時, しばしば  $f$  を invariant, totally complex, totally real immersion と言う。

invariant immersion 及び totally complex immersion についてその基本的な性質を述べておこう。

Proposition 1.6 (cf. [1])  $f: M \rightarrow \tilde{M}$  を invariant immersion とすると,  $f$  は totally geodesic である。

実 8 次元以上の Quaternionic Kaehler manifold は Einstein manifold に属することが知られている (cf. [2])。従って特にスカラー曲率は一定になる。このことに注意して,

Proposition 1.7  $(\tilde{M}, A', \tilde{g})$  を実 8 次元以上の Quaternionic Kaehler manifold でスカラー曲率が零で無いとする。 $f: M \rightarrow \tilde{M}$  を実 4 次元以上の Riemann 多様体  $M$  から  $\tilde{M}$  への totally complex immersion とすると,

(i)  $f^* A'$  は次が成立する local canonical base  $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$  をもつ。

(ii)  $\tilde{\nabla}_X \tilde{I} = 0$ , ここで  $\tilde{\nabla}$  は  $\tilde{M}$  の Riemannian connection から導入された  $f^* A'$  の connection,  $X$  は  $M$  上の vector

field.

$$(ii) \tilde{I} T_p M = T_p M, \tilde{J} T_p M \perp T_p M, \tilde{K} T_p M \perp T_p M.$$

(2)  $M$  は  $\tilde{I}$  から導入された (局所的な) Kähler structure  $I$  をもつ。normal bundle  $N(M)$  も  $\tilde{I}$  から導入された (局所的な) almost complex structure  $I$  をもち normal connection  $\nabla^\perp$  に関して parallel 即ち,  $\nabla_X I = 0$  となる。さらに  $f$  の  $\omega$  基本形式を  $h$  とすれば,  $h(IX, Y) = h(X, IY) = I h(X, Y)$  が成立する。

この Proposition によつて, totally complex immersion は Kähler immersion と極めて類似の性質をもつことが分る。実際  $M$  が  $P_n(\mathbb{H})$  の時には  $P_{2n+1}(\mathbb{C})$  への Kähler immersion と密接な関係をもつことが示される。 $S^3$  を structure group とする principal fibre bundle である Hopf fibration  $S^{4n+3} \rightarrow P_n(\mathbb{H})$  に associate する fibre bundle として,  $\pi: P_{2n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow P_n(\mathbb{H})$  という Riemannian submersion がある。 $P_n(\mathbb{H})$  への totally complex immersion はこの Riemannian submersion の total space  $P_{2n+1}(\mathbb{C})$  への Kähler immersion に lift される。即ち,

Theorem 1.8  $M$  を実 4 次元以上の連結な Riemann 多様体,  $f$  を  $M$  から  $P_n(\mathbb{H})$  への totally complex immersion とする。

この時  $M$  を高々 2 回 リーマン被覆する Kähler manifold  $\hat{M}$  と,  $\hat{M}$  から  $P_{2n+1}(\mathbb{C})$  の Kähler immersion  $\hat{f}$  が存在して, 次の図式が可換になる:

$$\begin{array}{ccc} \hat{M} & \xrightarrow{\hat{f}} & P_{2n+1}(\mathbb{C}) \\ \hat{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & P_n(\mathbb{H}) \end{array}$$

Riemann 多様体  $\tilde{M}$  の接空間  $T_p\tilde{M}$  の subspace  $W$  が  $\tilde{R}(W, W)W \subset W$  を満たす時,  $W$  を curvature invariant subspace と呼ぶ。Riemann 対称空間の totally geodesic submanifold はその接空間によつて完全に特徴付けられる。即ち Riemann 対称空間  $\tilde{M}$  の totally geodesic submanifold  $N$  の各点  $p$  について,  $T_pN$  は  $T_p\tilde{M}$  の curvature invariant subspace であり, 逆に  $T_p\tilde{M}$  の curvature invariant subspace  $W$  に対して  $W$  に接する  $\tilde{M}$  の complete totally geodesic submanifold は唯一つ存在する。Quaternionic Kähler manifold の 3 種類の部分多様体は,  $P_n(\mathbb{H})$  及びその non-compact dual の totally geodesic submanifold の接空間を model にして考案されたものである。実際, 船橋氏による  $P_n(\mathbb{H})$  及

及び  $n$  の non-compact dual の接空間の curvature invariant subspace の分類を見てみよう。

Proposition 1.9 ([1])  $\tilde{M}$  を  $P_n(\mathbb{H})$  ( $n \geq 2$ ) 又は  $n$  の non-compact dual とする。  $T_p \tilde{M}$  の curvature invariant subspace  $W$  は次のいずれかである。

$\dim_{\mathbb{R}} W \geq 4$  の時 (1) invariant (2) totally complex  
(3) totally real

$\dim_{\mathbb{R}} W = 3$  の時 (1) totally real (2)  $A_p'$  の canonical base  $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$  を固定した時  $W$  のベクトル  $X$  が存在して  $W$  は  $X, \hat{I}X, \hat{J}X$  で張られる。

$\dim_{\mathbb{R}} W = 2$  の時 (1) totally complex (2) totally real

特に  $\tilde{M} = P_n(\mathbb{H})$  の場合, invariant subspace, totally complex subspace, totally real subspace に接する totally geodesic submanifold はそれぞれ  $P_n(\mathbb{H})$ ,  $P_n(\mathbb{C})$ ,  $P_n(\mathbb{R})$  である。

## §2. Reduction Theorem.

§1 の準備のもとに 1st Step の Reduction Theorem を述べよう。  $f: M \rightarrow \tilde{M}$  isometric immersion 及び点  $p \in M$  に対して  $T_p \tilde{M}$  の subspace  $O_p'(M)$  を  $T_p M + N_p'(M)$  で定義し,

1st osculating space と呼ぶ。 Proposition 1.3 で与えられた curvature tensor の形, 並びに  $\omega$  2 基本形式が平行という条件をフルに使って計算し次の結果を得る。

Proposition 2.1  $\tilde{M}$  を  $P_n(\mathbb{H})$  ( $n \geq 2$ ) またはその non-compact dual とし,  $f: M \rightarrow \tilde{M}$  を連結な Riemann 多様体  $M$  から  $\tilde{M}$  への  $\omega$  2 基本形式が平行な (not totally geodesic) isometric immersion とすると,  $T_p M$  及び  $O'_p(M)$  は  $T_p \tilde{M}$  の中で curvature invariant subspace になり, 次のいずれかが起こり得る:

(a)  $\dim_{\mathbb{R}} M \geq 4$

|       | $T_p M$         | $O'_p(M)$       |
|-------|-----------------|-----------------|
| (R-R) | totally real    | totally real    |
| (R-C) | "               | totally complex |
| (C-C) | totally complex | totally complex |
| (C-H) | "               | invariant       |

(b)  $\dim_{\mathbb{R}} M = 3$

|       |              |                 |
|-------|--------------|-----------------|
| (R-R) | totally real | totally real    |
| (R-C) | "            | totally complex |
| (E-H) | E            | invariant かつ    |

$$\dim_{\mathbb{R}} O'_p(M) = 4$$

(c)  $\dim_{\mathbb{R}} M = 2$

|       |              |              |
|-------|--------------|--------------|
| (R-R) | totally real | totally real |
|-------|--------------|--------------|

|       |                 |                  |
|-------|-----------------|------------------|
| (R-C) | totally real    | totally complex  |
| (C-C) | totally complex | totally complex  |
| (C-E) | "               | E                |
| (C-H) | "               | invariant $\neq$ |

$$\dim_{\mathbb{R}} O'_p(M) = 4$$

ここで (b) の E は,  $A'_p$  の canonical base  $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$  を 1, 回定した時  $T_p M$  のベクトル  $X$  が存在して  $T_p M$  は  $X, \tilde{I}X, \tilde{J}X$  で張られることを意味し, (c) の E は  $A'_p$  の canonical base  $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$  かとれて  $\tilde{I}T_p M = T_p M$ ,  $\tilde{J}T_p M \perp T_p M$ ,  $\tilde{K}T_p M \perp T_p M$  となり, さらに  $T_p M$  のベクトル  $X$  が存在して  $O'_p(M)$  は  $X, \tilde{I}X, \tilde{J}X$  で張られることを表わす。

Proposition 1.9, 2.1 及び 内藤氏 が [4] で用いた議論を使って 次の定理を得る。

Theorem 2.2 (Reduction Theorem) Proposition 2.1 と同じ仮定のもとに,  $\tilde{M}$  の complete totally geodesic submanifold  $N$  が存在して  $f(M) \subset N$  でかつ  $p \in M$  に対して  $T_p N = O'_p(M)$  が成り立つ。さらに次の場合が起り得る:

(a)  $\dim_{\mathbb{R}} M \geq 4$

(R-R)  $\tilde{M}$  が  $P_n(\mathbb{H})$  又は  $\mathbb{H}$  の non-compact dual であること  
に応じて (以下同様)  $N$  は  $P_n(\mathbb{R})$  又は real

hyperbolic space,

(R-C)  $N = P_r(\mathbb{C})$  or complex hyperbolic space,  $f$  is  $N$ 's totally real immersion,

(C-C)  $N = P_r(\mathbb{C})$  or complex hyperbolic space,  $f$  is  $N$ 's Kaehler immersion,

(C-H)  $N = P_r(\mathbb{H})$  or  $r$ 's non-compact dual,  $f$  is  $N$ 's totally complex immersion,

ここで一般に  $r \leq n$  にも成る。

(b)  $\dim_{\mathbb{R}} M = 3$ , (R-R), (R-C) の他に次が起り得る。

(E-H)  $N = S^4$  or 4-dim real hyperbolic space

(c)  $\dim_{\mathbb{R}} M = 2$ , (R-R), (R-C), (C-C) の他に次が起り得る。

(C-E)  $N = S^3$  or 3-dim real hyperbolic space

(C-H)  $N = S^4$  or 4-dim real hyperbolic space

$N$  が実空間形 ないしは複素空間形の時には  $r$  の平行部分多様体は既に分類されている。従って我々に残されているのは Theorem 2.2 の (C-H) の場合である。この時、 $M$  は局所 Riemann 対称空間でさらに Proposition 1.7 より Kaehler である。従って  $M$  は局所 エルミート対称空間に成る。  $N$  が  $P_r(\mathbb{H})$  の non-compact dual の時には、Gauss equation を使って  $M$  は totally geodesic submanifold であることが示され、特に (not

totally geodesic) オ2基本形式が平行な (C-H) の場合は起り得ない。  $N$  が  $P_r(\mathbb{H})$  の時には、実際 (C-H) となるものが存在する。その model の構成 即ち 最初に述べた 2nd Step に相当するものは次のようにして実行される。 Theorem 1.8 によつて  $M$  から  $P_{2r+1}(\mathbb{C})$  への Kaehler immersion をもつことが分る。エルミート対称空間から複素射影空間への Kaehler immersion については、その構成法がすべて分つてゐる (cf. 中川-高木 [5], 高木-竹内 [6])。これらのうち fibration  $P_{2r+1}(\mathbb{C}) \rightarrow P_r(\mathbb{H})$  と合成させて  $P_r(\mathbb{H})$  への totally complex immersion でオ2基本形式が平行になるものを探するという手順をとればよい。実際次の結果を得る。

Theorem 2.3 Theorem 2.2 で (C-H) となる場合は、

(1)  $N = P_r(\mathbb{H})$  の時、  $M$  はコンパクト型のエルミート対称空間で次のものである：

$$M = SU(6)/S(U(3) \times U(3)), Sp(3)/U(3), SO(12)/U(6),$$

$$E_7/E_6 \times T', P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C}), P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C}), P_1(\mathbb{C}) \times Q_n \quad (n \geq 3)$$

ここに  $Q_n$  は複素2次曲面で対称対としては  $SO(n+2)/SO(n) \times SO(2)$  と表示されるものである。

そして  $f$  は次の図式が成り立つものとして得られる：

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\hat{f}} & P_{2r+1}(\mathbb{C}) \\
 & \searrow f & \downarrow \\
 & & P_r(\mathbb{H})
 \end{array}
 \quad \hat{f} \text{ is Kähler imbedding}$$

(2)  $N = P_r(\mathbb{H})$  の non-compact dual の時 起る。.

### 文献

- [1] S. Funabashi, Totally complex submanifolds of a Quaternionic Kähler manifold, *Kōdai Math. J.* 2(1979) 314-336.
- [2] S. Ishihara, Quaternion Kählerian manifolds, *J. Diff. Geom.*, 9(1974), 483-500.
- [3] H. Naitoh, Totally real parallel submanifolds in  $P^n(\mathbb{C})$ , *Tokyo J. Math.*, 4(1981), 279-306.
- [4] ———, Parallel submanifolds of complex space forms I, II.
- [5] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kähler submanifolds in a complex projective space, *J. Math. Soc.* 28(1976) 638-667.
- [6] R. Takagi and M. Takeuchi, Degree of Symmetric Kählerian submanifolds in a complex projective space, *Osaka J.* 14(1977) <sup>501</sup> - <sup>518</sup>.
- [7] J. Wolf, Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces, *J. Math. Mech.*, 14(1963) 1033-1047.