

/

$1 \leq K(V) \leq \dim V - 1$ を満たす代数多様体の変形

足利 正 (宮城工専)

基礎体は常に複素数体 $\mathbb{C}$ とする。我々は
小次元 K の代数的変形の問題を次の形で考
える。

(問) n 次元代数多様体の smooth 族 $\mathcal{X} : X \rightarrow Y$
が与えられた時、その任意の fibre の K は、
generic fibre の K に等しいか？

こゝでは、特に $1 \leq K(\text{generic fibre}) \leq n-1$ の時
上記の問を、より低い次元の $K=0$ の多様体の
変形と退化の問題に帰着させる。そして、ある
特別な場合に上記の問が肯定的に解ける
ことを示す。詳細は [1] を参照されたい。

§ 1. 定義と結果

$\mathcal{X} : X \rightarrow Y$ を n 次元代数多様体の smooth 族
(i.e. $\mathcal{X}$ は proper smooth surj. morphism of connected fibres of relative
dimension n) とする。 $\omega_{\mathcal{X}}$ を relative canonical
sheaf, $N(\mathcal{X}) = \{i \in \mathbb{Z}^+ ; \exists \omega_{\mathcal{X}}^{\otimes i} \neq 0\}$ とする時、

$i \in N(X_f)$ に対して, $f^* f_* \omega_{X_f}^{\otimes i} \rightarrow \omega_{Y_f}^{\otimes i}$ により,

Y 上の有理写像 $X \xrightarrow{g_i} \mathbb{P}(f_* \omega_{X_f}^{\otimes i})$ が定まる.

さて, $Z_i = g_i(X)$ とおく時;

定義 1 $f: X \rightarrow Y$ の相対的小平次元 $K(X_f)$ を

$$K(X_f) = \begin{cases} \max_{i \in N(X_f)} \dim Z_i - \dim Y & \text{if } N(X_f) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{if } N(X_f) = \emptyset \end{cases}$$

と定義する。

$K(X_f)$ は f の generic fibre の K と言ってもよい。

さて, Lieberman-Sernesi [2] による次の定理を思い出す。

定理 1 ([2]) $f: X \rightarrow Y$ が上記の時, Y のある countable intersection of nonempty Zariski open sets Y' があって, (i) $K(X_g) = K(X_f)$ for $\forall g \in Y'$,
(ii) $K(X_g) > K(X_f)$ for $\forall g \in Y \setminus Y'$.

注 [2] は, 上記定理に対応する結果を complex spaces 間の flat family に対する L -dimension に対して証明しているが, 証明に若干の gap があると思われる。ただし, 我々の状況設定では, base change theorem と Ohtaka estimate より比較的簡単に証明できる。

定理 1 をみる時, X の変形不変性予想とは、
実は $Y' = Y$ を言っていることに注意しよう。そこで今、

予想 $D_{n,k}$ $\mathcal{F}: X \rightarrow Y$ を n 次元代数多様体の族で $K(X_Y) = k$ とする。この時, $\forall y \in Y$ に対し $K(X_y) = K(X_Y)$ である。(i.e. $Y' = Y$)

とあってみる。まず, $D_{n,n}$ が正しいことは定理 1 より明らかである。それ以外の場合は, fibre の構造に関して何らかの情報を得なければどうしようもなからず、実は次の定理が成り立つ。

定理 $\mathcal{F}: X \rightarrow Y$ を n 次元代数多様体の smooth 族で $1 \leq K(X_Y) \leq n-1$ とする。このとき, 任意の $y \in Y$ に対して, fibre X_y は次の構造を持つ。; X_y のある非特異モデル $X_y^\vee$ と代数多様体 W 及び fibre space $\varphi: X_y^\vee \rightarrow W$ があって,

(i) $\dim W = K(X_Y)$ (ii) W のある Zariski open set W' があって $\forall y \in W'$ に対して fibre $\varphi^{-1}(w)$ は "quasi-specialization of parabolic varieties" である。

== quasi-specialization of parabolic varieties (以下 q.s.p. と略す) とは;

定義 2 variety V が g.s.p. とは ある 非特異
多様体 M と 非特異 曲線 C , B の fibre space

$\varphi: M \rightarrow C$ が ある

(i) V は φ の smooth fibre 又は degenerate fibre の 既約
成分の $1 \geq 1$ 同型 (ii) $K(M/C) = 0$

定理の条件によって f の general fibre は 通常の
Iitaka fibration を持つ。上記の fibration は, general
fibre の持つ Iitaka fibration の 極限として 構成される。
($\Rightarrow$ §2). 定理は 予想 $D_{n,k}$ に対して 以下のことを
言っている。まず、次の 代数多様体の 退化族 に関
する K の 下半連続性 予想を思い出そう。

予想 $L_{n,k}$: $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$, $D^* = D \setminus \{0\}$,
 M を 複素多様体 とする。 $\varphi: M \rightarrow D$ を 相対次元
 n の flat morphism で D^* 上 smooth, 且 φ は ある
代数的な morphism を 局所化したもの とする。そして
 $\forall y \in D^*$ に対し $K(M_y) = k$ とする。この時、 $M_0^{(i)}$ を
singular fibre $M_0 = \varphi^{-1}(0)$ の 任意の 既約成分 とすれば
 $K(M_0^{(i)}) \leq k$ である。

注 $n=1$ の時 上記予想が正しいことは well-known.
 $n=2$ の場合も、上野氏の講演で述べられたように、ほと
 んど正しい。(ただし、今のところ fibre が abel 曲面の時、projective という仮定が必要である)

さて、我々の結果は次のとおり。

定理の系 (n, k) を $1 \leq k \leq n-1$ を満たす正整数の
 組とする。もし $D_{n-k,0}$, $L_{n-k,0}$ が正しければ、 $D_{n,k}$
 は正しい。

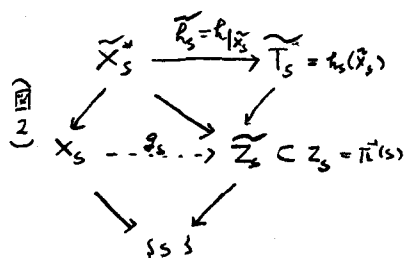
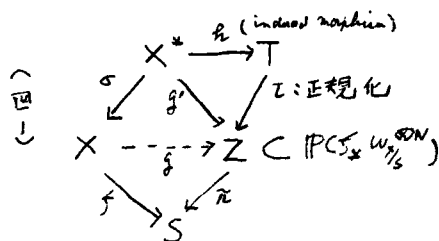
☺ $f: X \rightarrow Y$, $1 \leq k(X_f) \leq n-1$ とする時、 $y \in Y$
 に対し、定理の filtration $\psi: X_y^* \rightarrow W$ を考えれば
 $k(X_y) = k(X_y^*) \leq k(\psi \text{ の general fibre}) + \dim W \leq k(X_f)$.
 一方、定理 1 より $k(X_y) \geq k(X_f)$. Q.E.D.

系 $D_{n,n-1}$ は正しい。

§2. 定理の証明の方針

==では、base variety Y が非特異曲線 S である
 時のみ述べる。(Y が一般次元の時、適当な base
 change により、この場合に帰着される。)

$N \gg 0$ に対して、有理写像 $g = g_N$ の不確定点除去 (図1)



を行なう。 $s \in S$ に対して (図1) を s 上に制限したものが (図2) である。こゝに、 $\tilde{X}_s^*$ は fibre X_s の σ による strict transform, $\tilde{Z}_s = g'(\tilde{X}_s^*) = g_s(X_s)$ である。(注: X_s は g の不確定領域は容易)。この時、 $\tilde{h}_s: \tilde{X}_s^* \rightarrow \tilde{T}_s$ が求める filtration であることが次のようにしてわかる。

(I) $\dim \tilde{T}_s = K(X_s)$ であるとき。(則ち、 $\tilde{Z}_s$ は $Z_s = \pi^{-1}(s)$ の既約成分の一つであるとき) ;

$P(X_s) = \bigoplus_i P(X_s)_i$, $P(X_s)_i = \sum \omega_{X/S}^{\otimes i} \otimes \mathbb{C}$ とおくと、これは X_s の canonical ring $R(X_s) = \bigoplus_i H^0(X_s, \omega_{X/S}^{\otimes i})$ の graded- $\mathbb{C}$ -subalgebra となる。さて今、

$$K(P(X_s)) \Leftarrow \begin{cases} \max_i \dim \text{Proj } P(X_s)^{[i]}, & \text{if } \exists i, P(X_s)_i \neq 0 \\ -\infty & , \text{ otherwise} \end{cases}$$

と定義する。($\Leftarrow$ は $P(X_s)^{[i]} = \bigoplus_j P(X_s)_j$)

$\tilde{Z}_s = \text{Proj } P(X_s)^{[N]}$, 且 $N \gg 0$ より $\dim \tilde{Z}_s = K(P(X_s))$

となる。今、(Itaka estimate の類似で) ある

意味において漸近的に $\dim_{\mathbb{C}} P(X_S)_m \sim m^{K(P(X_S))}$ が示せる。 S は非特異曲系故 $\omega_{X_S}^{\otimes i}$ は局所自由で $\dim P(X_S)_m = \text{rank } \omega_{X_S}^{\otimes m}$ 。一方、 S の十分 general な点 t をとれば、 $P(X_t) = R(X_t)$, $K(X_t) = K(X_S)$ となる故、 X_t に対する通常の litaka estimate より $\text{rank } \omega_{X_S}^{\otimes m} \sim m^{K(X_S)}$ 。 よって $K(X_S) = K(P(X_S)) = \dim \tilde{Z}_S = \dim \tilde{T}_S$ 。 $\perp$

(2.) $\tilde{h}_S$ の general fibre が g. s. p. であること； S の十分 general な点 t では $h_t: X_t^* \rightarrow T_t$ は surjective で X_t の N -canonical map は birational。 よって 飯高の定理から h_t の general fibre は $K=0$ である。 このことから、 $K(X_t^*/T) = 0$ となる。 $\perp$ として、 $\tilde{h}_S$ の general fibre $\tilde{h}_S^{-1}(\omega)$ ($\omega \in \tilde{T}_S$) を 1 つ決め、 ω を通る T 上の curve C を十分 general にとり、 C の正規化 $\hat{C}$ で base change $X^* \times_C \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ を行なう。 $X^* \times_C \hat{C}$ の dominant な既約成分 M をとれば、 $M \rightarrow \hat{C}$ は、 $K(M/\hat{C}) = 0$ であって、 $\tilde{h}_S^{-1}(\omega)$ をその fibre の既約成分の 1 つとして含むことがわかる。 $\perp$

参考文献

- [1] T. Ashikaga, The deformation behaviour of the Kodaira dimension of algebraic manifolds, to appear in Tohoku Math. J.
- [2] D. Lieberman and E. Sernesi, Semicontinuity of L -dimension, Math. Ann., 225 (1977), 77-88