

Magnetic Schrödinger 作用素に対する Resolvent Estimates とその応用

スペクトル・散乱理論とその周辺

望月 清

中央大学理工学部 (共同研究員)
mochizuk@math.chuo-u.ac.jp

1. 序

$\mathbf{R}^n$ における magnetic Schrödinger 作用素は

$$Lu = \sum_{j=1}^n (\partial_j + ib_j(x))^2 u + c(x)u, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \quad (1)$$

で与えられる. ここに $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $i = \sqrt{-1}$ で $b_j(x)$, $c(x)$ は実数値関数である. $c(x)$ は external potential (scalar) で, $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$ は magnetic potential (vector) と呼ばれる. 磁場は $b(x)$ それ自身ではなく, その回転 $\nabla \times b(x)$ で与えられることに注意しよう. ただし $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ で $\times$ は $\mathbf{R}^n$ での外積を表す. scalar potential $c(x)$ は原点で $O(|x|^{-2})$ の強い特異性を持ってよいとする.

以下では $\nabla \times b(x)$, $c(x)$ に遠方での適当な減衰条件, また小ささを仮定し, 作用素 L の基本的な問題である 作用素の自己共役性, 一般化固有関数の増大度評価, 極限吸収の原理, resolvent の一様評価, 対応する発展方程式の平滑化効果 について概説する.

記号 $\nabla_b = \nabla + ib(x)$, $\Delta_b = \nabla_b \cdot \nabla_b$ とおく ($\cdot$ は $\mathbf{R}^n$ での内積). このとき, 上の Schrödinger 作用素は $Lu = (-\Delta_b u + c)u$ と表せる. 更に次の記号を用いる: $r = |x|$, $\tilde{x} = x/r$, $\partial_r = \tilde{x} \cdot \nabla$. また, Hilbert 空間 $L^2 = L^2(\mathbf{R}^n)$ の内積, ノルムはそれぞれ

$$(f, g) = \int f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

で表す. ただし $\int$ は $\mathbf{R}^n$ 上の積分を意味する. 関数 $\xi = \xi(r) > 0$ に対して L_ξ^2 を norm

$$\|f\|_\xi = \left\{ \int \xi(r) |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty$$

を伴う重みつき L^2 -空間とする. 更に, $0 < \epsilon < t < \infty$ に対して $B_{\epsilon,t} = \{x; \epsilon < |x| < t\}$, $B_t = \{x; |x| < t\}$, $B'_t = \mathbf{R}^n \setminus B_t$, $S_t = \{x; |x| = t\}$ とおく.

2. Schrödinger 作用素 L の自己共役性

この論説全体を通して次の条件を課す.

(A1) $b_j(x) \in C^1(\mathbf{R}^n)$ で $c(x) \in C(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$. $c(x)$ は原点で $O(r^{-2})$ の特異性を許し, $c_\infty(x) \in L^\infty$ が存在して

$$c(x) - c_\infty \geq \frac{\beta}{r^2}, \quad \beta \geq 0 \quad (n=2), \quad > -\frac{(n-2)^2}{4} \quad (n \geq 3).$$

この条件のもとで Hilbert 空間 $L^2 = L^2(\mathbf{R}^n)$ 上の作用素 L を次のように定義する.

$$\begin{cases} Lu = -\Delta_b u + c(x)u & \text{for } u \in \mathcal{D}(L), \\ \mathcal{D}(L) = \{u(x) \in L^2 \cap H_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}); (\Delta_b - c)u, r^{-1}u \in L^2\}. \end{cases} \quad (2)$$

定理 1 条件 (A1) のもとで次が成り立つ.

(i) $u \in \mathcal{D}(L)$ ならば $\nabla_b u \in L^2$ である.

(ii) L は下に半有界な自己共役作用素である.

(iii) 更に $c(x) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$) であれば, L の本質スペクトル $\sigma_e(L)$ は半直線 $[0, \infty)$ に含まれる.

Mochizuki [12: Theorem 1.1, 1.3] では $c(x)$ の singularity に Stummel condition と呼ばれる条件を課している. Kalf-Schmincke-Walter-Wist [7: Theorem 3] では $b(x) \equiv 0$ のときを証明している. (ii) を言うのに L が $C_0^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ 上の微分作用素 $-\Delta_b + c$ の Friedrichs extension ([5]) であることを示すのだが, (i) が基礎になる. ここでは [7] に従って (i) を示す.

$\alpha \in \mathbf{R}$, $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ に対して

$$\begin{aligned} \left| \nabla_b u \right|^2 &= \left| \nabla_b u + \tilde{x} \frac{\alpha}{r} u - \tilde{x} \frac{\alpha}{r} u \right|^2 \\ &= \left| \nabla_b u + \tilde{x} \frac{\alpha}{r} u \right|^2 - \nabla \cdot \left(\tilde{x} \frac{\alpha}{r} |u|^2 \right) + \frac{(n-2)\alpha - \alpha^2}{r^2} |u|^2. \end{aligned} \quad (3)$$

が成り立つ. 同様に

$$\left| \tilde{x} \cdot \nabla_b u \right|^2 = \left| \tilde{x} \cdot \nabla_b u + \frac{\alpha}{r} u \right|^2 - \nabla \cdot \left(\tilde{x} \frac{\alpha}{r} |u|^2 \right) + \frac{(n-2)\alpha - \alpha^2}{r^2} |u|^2. \quad (3)'$$

(3) を $B_{\epsilon,t} = \{x \in \mathbf{R}^n; \epsilon < |x| < t\}$ 上で積分すれば

補題 1 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \int_{B_{\epsilon,t}} |\nabla_b u|^2 dx &= \int_{B_{\epsilon,t}} \left| \nabla_b u + \tilde{x} \frac{\alpha}{r} u \right|^2 dx \\ &\quad - \left(\int_{S_t} - \int_{S_\epsilon} \right) \frac{\alpha}{r} |u|^2 dS + \int_{B_{\epsilon,t}} \frac{(n-2)\alpha - \alpha^2}{r^2} |u|^2 dx. \end{aligned}$$

補題 2 (i) $r^{-1}u \in L^2$ であれば

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} r^{-1} |u|^2 dS = 0, \quad \liminf_{\rho \rightarrow \infty} \int_{S_\rho} r^{-1} |u|^2 dS = 0.$$

(ii) $u \in L^2$ のとき $\epsilon_k \rightarrow 0, t_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) が存在して

$$\partial_r \int_{S_1} r^n |u(r\omega)|^2 dS \Big|_{r=\epsilon_k} \geq 0, \quad \partial_r \int_{S_1} r^n |u(r\omega)|^2 dS_\omega \Big|_{r=t_k} \leq 0.$$

[定理 1 (i) の証明] $u \in \mathcal{D}(L)$ とすれば Gauss の公式により

$$\operatorname{Re} \int_{B_{\epsilon,t}} (-\Delta_b u + cu) \bar{u} dx = \int_{B_{\epsilon,t}} (|\nabla_b u|^2 + c|u|^2) dx - \operatorname{Re} \left(\int_{S_t} - \int_{S_\epsilon} \right) (\tilde{x} \cdot \nabla u) \bar{u} dS. \quad (4)$$

これと補題 1 の等式を合わせ

$$-\operatorname{Re} \int_{S_r} (\tilde{x} \cdot \nabla u) \bar{u} dS = -\frac{1}{2r} \partial_r \int_{S_1} r^n |u(r\omega)|^2 dS_\omega + \frac{n}{2r} \int_{S_r} |u|^2 dS$$

に注意すれば

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{B_{\epsilon,t}} (-\Delta_b u + cu) \bar{u} dx &= \int_{B_{\epsilon,t}} \left| \nabla_b u + \tilde{x} \frac{\alpha}{r} u \right|^2 dx \\ &\quad + \int_{B_{\epsilon,t}} \left(\frac{(n-2)\alpha - \alpha^2}{r^2} + c \right) |u|^2 dx \\ &\quad + \left(\int_{S_t} - \int_{S_\epsilon} \right) \frac{n-2\alpha}{2r} |u|^2 dS - \frac{1}{2r} \left[\partial_r \int_{S_1} r^n |u(r\omega)|^2 dS_\omega \right]_\epsilon^t. \end{aligned}$$

ここで $\alpha = n/2$ とおく. このとき $r^{-1}u, |c|^{1/2}u \in L^2$ であるから, 補題 2 (ii) の第 1 の不等式に注意して $\epsilon = \epsilon_k \rightarrow 0$ とすれば

$$\int_{B_t} \left| \nabla_b u + \frac{n}{2r} u \right|^2 dx < \infty$$

が得られる. ここで $\alpha = n/2$ のまま補題 1 に戻り, 補題 2 (i) の第 1 の不等式を用いれば

$$\int_{B_t} |\nabla_b u|^2 dS < \infty. \quad (5)$$

一方, (4) より

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{B_{\epsilon,t}} (-\Delta_b u + cu) \bar{u} dx &\geq \int_{B_{\epsilon,t}} (|\nabla_b u|^2 + c|u|^2) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[r^{-1} \partial_r \int_{S_1} r^n |u(r\omega)|^2 dS_\omega \right]_\epsilon^t - \frac{n}{2} \int_{S_\epsilon} r^{-1} |u|^2 dS \end{aligned}$$

であるから, 補題 2 (ii) の第 2 の不等式から

$$\int_{B'_\epsilon} |\nabla_b u|^2 dS < \infty. \quad (6)$$

主張 (i) は (5) と (6) を合わせたものである. $\square$

H_b^1 を norm

$$\|u\|_{H_b^1} = \left\{ \int (|\nabla_b u|^2 + |u|^2) dx \right\}^{1/2} < \infty \quad (7)$$

による $C_0^\infty = C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ の完備化とする. このとき ∇_b に対応する Hardy の不等式が次で与えられる.

補題 3 $u \in H_b^1$ とすると

$$\int \frac{(n-2)^2}{4r^2} |u|^2 dx \leq \int |\tilde{x} \cdot \nabla_b u|^2 dx.$$

[証明] (3)' で $\alpha = \frac{n-2}{2}$ とおき, $B_{\epsilon,t}$ で積分して $t \rightarrow \infty$ とすると

$$\int_{B'_\epsilon} |\tilde{x} \cdot \nabla_b u|^2 dx \geq \int_{S_\epsilon} \frac{n-2}{2r} |u|^2 dS + \int_{B_{\epsilon,t}} \frac{(n-2)^2}{4r^2} |u|^2 dx.$$

左辺は $\epsilon \rightarrow 0$ で収束するので, 求める不等式が得られる. $\square$

[定理 1 (ii) の証明] $u, v \in \mathcal{D}(L)$ とする. (i) を考慮すれば

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} |(\tilde{x} \cdot \nabla_b u) \bar{v}| dS = \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{S_t} |(\tilde{x} \cdot \nabla_b u) \bar{v}| dS = 0.$$

従って Gauss の公式により

$$(Lu, v) = \int \{ \nabla_b u \cdot \overline{\nabla_b v} + cu \bar{v} \} dx$$

が得られる. $\mathcal{D}(L)$ は L^2 で稠密であるから, これは L の対称性を示している. さらに (A1) と補題 3 より

$$(Lu, u) \geq \left(\frac{(n-2)^2}{4} + \beta \right) \|r^{-1}u\|^2 - C_\infty \|u\|^2, \quad C_\infty = \max |c_\infty(x)| \quad (8)$$

であり, L は下に半有界になっている.

L が $C_0^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ 上の微分作用素 $-\Delta_b + c(x)$ の Friedrichs extension であることを示そう. $\{u_k\} \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ が

$$s - \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u \quad \text{in } L^2,$$

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} ([-\Delta_b + c](u_j - u_k), u_j - u_k) = 0.$$

を満たすとする. (8) より $\{r^{-1}u_k\}$ は L^2 での Cauchy 列になるから, 結果として $r^{-1}u \in L^2$ が示される. 故に $\mathcal{D}(L)$ は Friedrichs extension の定義域に一致する. $\square$

[定理 1 (iii) の証明] $L_1 = L - c_\infty(x)$ の定義域を $\mathcal{D}(L_1) = \mathcal{D}(L)$ とおく. 一般性を失うことなく $c_\infty(x) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) とでき,

$$(L_1 u, u) \geq C(\beta) \|\nabla_b u\|^2, \quad C(\beta) = 1 \quad (n=2), \quad = 1 + \frac{4\beta}{(n-2)^2} \quad (n \geq 3),$$

であるから, 掛け算作用素 $c_\infty(x)$ は L_1 -compact になる. 従って $\sigma_e(L) = \sigma_e(L_1)$. L_1 は正值なので (iii) が結論される. $\square$

3. 一般化固有関数の増大度の評価

この節の定理を含め 3 つの定理が, Schrödinger 方程式

$$-\Delta_b u + c(x)u - \kappa^2 u = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (9)$$

の解に関する 1 つの汎関数等式をもとに証明されるので, まず, それを準備しておこう. 以下では $\Pi_\pm = \{\kappa \in \mathbf{C}; \pm \operatorname{Re} \kappa > 0, \operatorname{Im} \kappa > 0\}$, $\bar{\Pi}_\pm = \Pi_\pm \cup \mathbf{R}_\pm$ とおき, $\kappa \in \bar{\Pi}_\pm$, $f \in L^2$ とする.

$u \in H_{\text{loc}}^1$ を (9) の解とする. $v = e^{-i\kappa r} r^{(n-1)/2} e^{\sigma(r)} u$, $g = e^{-i\kappa r} r^{(n-1)/2} e^{\sigma(r)} f$ とおき, (9) を次のように書きかえる

$$\begin{aligned} -\nabla_b \cdot \nabla_b v + \left(-2i\kappa + \frac{n-1}{r} + 2\sigma' \right) \tilde{x} \cdot \nabla_b v \\ + \left(c + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} + \sigma'' - \sigma'^2 + 2i\kappa\sigma' \right) v = g. \end{aligned} \quad (10)$$

$\varphi = \varphi(r)$ を滑らかな $r > 0$ の非負関数とし, $\phi = \phi(r) = e^{-2\text{Im}\kappa r} r^{-n+1} \varphi(r)$ とおく.
(10) の両辺に $\phi \tilde{x} \cdot \nabla_b v$ を乗じれば

$$\begin{aligned} & -\text{Re} \nabla \cdot \{(\phi \nabla_b v) \tilde{x} \cdot \nabla_b v\} + \phi' (|\tilde{x} \cdot \nabla_b v|^2 + \frac{\phi}{r} (|\nabla_b v|^2 - |\tilde{x} \cdot \nabla_b v|^2)) \\ & + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\phi \tilde{x} |\nabla_b v|^2) - \left(\frac{\phi'}{2} + \phi \frac{n-1}{2r} \right) |\nabla_b v|^2 \\ & - \text{Re} \phi \{(\tilde{x} \times \nabla_b v) \cdot (\nabla \times ib)v\} + \phi \left(2\text{Im}\kappa + \frac{n-1}{r} + 2\sigma' \right) |\tilde{x} \cdot \nabla_b v|^2 \\ & + \text{Re} \phi \left(c + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} + \sigma'' - \sigma'^2 + 2i\kappa\sigma' \right) v \tilde{x} \cdot \nabla_b v = \text{Re} \{ \phi g \tilde{x} \cdot \nabla_b v \}. \end{aligned}$$

これを $B_{R,t}$ で部分積分すれば

$$\begin{aligned} \nabla_b v &= e^{-i\kappa r} r^{(n-1)/2} \left\{ \nabla_b (e^\sigma u) + \tilde{x} \left(\frac{n-1}{2r} - i\kappa \right) (e^\sigma u) \right\}, \\ \phi'(r) &= \phi(r) \left(-2\text{Im}\kappa - \frac{n-1}{r} + \frac{\varphi'}{\varphi} \right) \end{aligned}$$

に注意して, 次の等式が得られる.

命題 1 $u \in H_{b,\text{loc}}^1$ が (9) を満たすとする. $u_\sigma = e^\sigma u$, $f_\sigma = e^\sigma f$ そして

$$\theta_\sigma = \theta_\sigma(x, \kappa) = \nabla_b u_\sigma + \tilde{x} \left(\frac{n-1}{2r} - i\kappa \right) u_\sigma$$

とおけば

$$\begin{aligned} & \left(\int_{S_t} - \int_{S_R} \right) \varphi \left\{ -|\tilde{x} \cdot \theta_\sigma|^2 + \frac{1}{2} |\theta_\sigma|^2 \right\} dS + \int_{B_{R,t}} \varphi \left\{ \left(\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{1}{r} \right) |\tilde{x} \cdot \theta_b|^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\text{Im}\kappa - \frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{1}{r} \right) |\theta_\sigma|^2 + 2\sigma' |\tilde{x} \cdot \theta_\sigma|^2 + \text{Re} J_\sigma(x, \kappa) \right. \\ & \quad \left. + \text{Re} \left[(\sigma'' - \sigma'^2 + 2i\kappa\sigma') u_\sigma \tilde{x} \cdot \theta_\sigma \right] \right\} dx = \text{Re} \int_{B_{R,t}} \varphi f_\sigma \tilde{x} \cdot \theta_\sigma dx, \\ J_\sigma(x, \kappa) &= -(\tilde{x} \times \theta_\sigma) \cdot (\nabla \times ib) u_\sigma + \left(c + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} \right) u_\sigma \tilde{x} \cdot \theta_\sigma. \end{aligned}$$

さて, 作用素 L の本質スペクトルを調べるための付加条件を次のようにおく.

(A2) $R_0 > 0$ と $C_0 > 0$ が存在して

$$\max \left\{ |\nabla \times b(x)|, \left| c(x) + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} \right| \right\} \leq C_0 \mu(r), \quad r = |x| > R_0.$$

ここに $\mu = \mu(r)$ は $r > 0$ の滑らかな, 正の L^1 -関数である.

定理 2 (A1), (A2) を仮定する. ただし, $\mu(r)$ は更に

$$\mu(r) = o(r^{-1}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty. \quad (11)$$

を満たすとする. $\lambda > 0$ とし, $u \in H_{b,\text{loc}}^1$ が固有方程式

$$-\Delta_b u + c(x)u - \lambda u = 0 \quad (12)$$

を満たすならば, 次が成り立つ: もし u の support が compact でなければ

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{S_t} |\tilde{x} \cdot \theta|^2 dS \neq 0,$$

ここに θ は $\theta(x, \pm\sqrt{\lambda}) = \nabla_b u + \tilde{x} \left(\frac{n-1}{2r} \mp i\sqrt{\lambda} \right) u$ のどちらかを表す.

注意 1 $\theta(x, \mp\sqrt{\lambda})$ は命題 1 の θ_σ で $\sigma \equiv 0$, $\kappa = \pm\sqrt{\lambda}$ としたもので, Sommerfeld の放射条件を定めるときに用いられる (次節参照).

この定理は Rellich ([15]) の外部領域での Laplace 作用素に関する増大度評価の真の拡張になっている. 類似の結果

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\epsilon \int_{S_t} (|\tilde{x} \cdot \nabla_b u|^2 + |u|^2) dS = \infty \quad (\forall \epsilon > 0)$$

が Ikebe-Uchiyama [7] に示されている. この場合には μ は (9) を満たせばよく, $L^1(\mathbf{R}_+)$ に属す必要ない.

定理 2 の証明に入ろう. 証明は Jäger-Rejto [8], Mochizuki [13] の oscillating long range potential を伴う non-magnetic Schrödinger 作用素に対して用いられた方法に従う.

補題 4 u を固有方程式 (12) の解とすれば, 各 $\lambda > 0$ と $r > 0$ に対して

$$\text{Im} \left[\int_{S_r} (\tilde{x} \cdot \nabla_b u_\sigma) \overline{u_\sigma} dS \right] = 0, \quad (13)$$

$$\int_{S_r} \left\{ \left| \tilde{x} \cdot \nabla_b u_\sigma + \frac{n-1}{2r} u_\sigma \right|^2 + \lambda |u_\sigma|^2 \right\} dS = \int_{S_r} |\tilde{x} \cdot \theta_\sigma|^2 dS, \quad (14)$$

が成り立つ. ただし $\theta_\sigma = \theta_\sigma(x, \pm\sqrt{\lambda})$ とおいている.

[証明] (12) に $\bar{u}$ を乗じて B_r 上で部分積分する. 虚部が

$$-\text{Im} \int_{S_r} (\tilde{x} \cdot \nabla_b u) \bar{u} dS = 0$$

となるが, $\sigma(r)$ が実であるから, (13) が得られる. (14) は (13) から明らかである.
□

次の補題は (A2) と (14) からただちに得られる.

補題 5 u を (12) の解とする. $\sigma(r)$ に無関係な定数 $C_1 > 0$ が存在して

$$\int_{S_r} |J_\sigma(x, \pm\sqrt{\lambda})| dS \leq C_1 \mu(r) \int_{S_r} |\theta_\sigma|^2 dS \quad \text{for } r > R_0.$$

[定理 2 の証明] $F(r)$, $F_{\sigma,\tau}(r)$ を次のように定義する.

$$F(r) = \frac{1}{2} \int_{S_r} \{2|\tilde{x} \cdot \theta|^2 - |\theta|^2\} dS,$$

$$F_{\sigma,\tau} = \frac{1}{2} \int_{S_r} \{2|\tilde{x} \cdot \theta_\sigma|^2 - |\theta_\sigma|^2 + (\sigma'^2 - \tau)|u_\sigma|^2\} dS.$$

ただし, $\theta = \theta_0$ ($\sigma \equiv 0$) で $\tau = \tau(r) > 0$ は後で定めるもう 1 つの重み関数である.

まず, $r_k \rightarrow \infty$ なる数列で $F(r_k) > 0$ を満たすものが存在するとしよう. 命題 1 で $\sigma \equiv 0$, $\varphi \equiv 1$, $\kappa^2 = \lambda > 0$, $f \equiv 0$ とおけば

$$F(t) - F(R) = \int_{B_{R,t}} \left\{ \frac{1}{r} (|\theta|^2 - |\tilde{x} \cdot \theta|^2) + \operatorname{Re} J(x, \pm\sqrt{\lambda}) \right\} dx,$$

ただし $J = J_0$ である. $R_1 \geq R_0$ を $\frac{1}{r} \geq 2C_1\mu(r)$ ($r \geq R_1$) が成り立つように選び, 両辺を t で微分する. 補題 5 を用いれば

$$\frac{d}{dt} F(t) \geq -2C_1\mu(t)F(t) \quad \text{in } t \geq R_1.$$

仮定より $r_k \geq R_1$ を選ぶことができて

$$\frac{F(t)}{F(r_k)} \geq \exp \left\{ -2C_1 \int_{r_k}^t \mu dr \right\}.$$

ここで $\mu(r) \in L^1(\mathbf{R}_+)$ に注意すれば, $F(t)$ の $t = \infty$ の近くでの一様正值性が示される.

次に上の場合の相補条件: u の support は compact でなく, $R_2 \geq R_1$ が存在して $r \geq R_2$ で $F(r) \leq 0$ となる, が成り立つとしよう. このとき、命題 1 で $\varphi = r$, $\kappa^2 = \lambda$, $f \equiv 0$ とおき, 等式

$$\frac{1}{2} \left(\int_{S_t} - \int_{S_R} \right) r (\sigma'^2 - \tau) |u_\sigma|^2 - \frac{1}{2} \int_{B_{R,t}} r \left\{ \operatorname{Re} [(\sigma'^2 - \tau) u_\sigma \overline{\tilde{x} \cdot \theta_\sigma}] \right\}$$

$$-\left(\frac{1}{r}\sigma'^2 + \sigma''\sigma' - \frac{1}{r}\tau - \frac{1}{2}\tau'\right)|u_\sigma|^2\}dx = 0$$

との差をとると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[tF_{\sigma,\tau}(t)] &= \int_{S_t} r \left\{ \frac{1}{2r}|\theta_\sigma|^2 + \operatorname{Re}J_\sigma(r) + 2\sigma' \left| \tilde{x} \cdot \nabla_b u_\sigma + \frac{n-1}{2r}u_\sigma \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + (\sigma'' - \tau)u_\sigma \left(\overline{\tilde{x} \cdot \nabla_b u_\sigma} + \frac{n-1}{2r}\overline{u_\sigma} \right) + \left(\frac{1}{r}\sigma'^2 + \sigma''\sigma' - \frac{1}{r}\tau - \frac{1}{2}\tau' \right) |u_\sigma|^2 \right\} dS. \end{aligned} \quad (15)$$

ここでは

$$\int_{S_t} 2\sigma' \left\{ |\tilde{x} \cdot \theta_\sigma|^2 + \operatorname{Re}[\pm i\sqrt{\lambda}u_\sigma \tilde{x} \cdot \theta_\sigma] \right\} dS = \int_{S_t} 2\sigma' \left| \tilde{x} \cdot \nabla_b u_\sigma + \frac{n-1}{2r}u_\sigma \right|^2 dS$$

を導くのに、補題 4 を用いている。

さて、 $\sigma(r)$ と $\tau(r)$ を次のように選ぼう。

$$\sigma(r) = \frac{m}{1-\epsilon}r^{1-\epsilon}, \quad \tau(r) = r^{-2\epsilon} \log r$$

ただし $m \geq 1$, $1/3 < \epsilon < 1/2$ である。(14) と仮定 (11) に注意すれば、(15) から次の不等式が示される (詳細は Mochizuki [13] を参照)。 $R_3 \geq R_2$ が存在して任意の $m \geq 1$ に対して

$$\frac{d}{dt}[tF_{\sigma,\tau}(t)] \geq \int_{S_t} r \left(\frac{1}{2r} - o(r^{-1}) \right) |\theta_\sigma|^2 dS \geq 0 \quad \text{in } t \geq R_3.$$

更に、相補条件から $R_4 \geq R_3$ で $\int_{S_{R_4}} |u_\sigma|^2 dS > 0$ を満たすものが存在するので、 m を $F_{\sigma,\tau}(R_4) > 0$ が成り立つように大きく選ぶことができ、 $t \geq R_4$ では $F_{\sigma,\tau}(t) > 0$ が言える。ここで

$$F_{\sigma,\tau}(t) = e^{2\sigma(t)} \left\{ F(t) + \sigma' \frac{d}{dt} \int_{S(t)} |u|^2 dS + (2\sigma'^2 - \tau) \int_{S(t)} |u|^2 dS \right\}$$

に注意しよう。右辺では $t = \infty$ の近くで $F(t) \leq 0$ であり、第 3 項が $t \rightarrow \infty$ で非正であるから、十分大きな t に対して

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} |u|^2 dS > 0$$

なる不等式が成り立つことが示される。 □

4. 極限吸収の原理

この節の結果は Mochizuki [12], [13] にあるように, 定理 2 の直接の帰結である (Eidus [3] の方法). 証明には次の条件も必要になる.

(A3) 方程式 (9) に対して一意接統定理が成り立つ.

注意 2 この仮定は $\nabla \times b(x)$, $c(x)$ が原点を除いて Hölder 連続であれば成り立つ.

定理 3 (A1)~(A3) を仮定する. ただし, L^1 -関数 $\mu(r)$ は (11) とともに

$$\int_r^\infty \mu(s) ds \geq r\mu(r), \quad r > R_0 \quad (16)$$

を満たすとする. このとき, L の resolvent $R(\kappa^2)$ は $L_{\mu^{-1}}^2$ を L_μ^2 に写す作用素として, 連続的に $\bar{\Pi}_\pm$ に延長される. 従って L の正のスペクトルは Lebesgue 測度に関して絶対連続になる.

次のようにおく.

$$\varphi_1(r) = \left(\int_r^\infty \mu(s) ds \right)^{-1}.$$

すぐわかるように

$$\varphi_1'(r) = \mu(r)\varphi_1(r)^2 \quad (17)$$

であり, $\mu\varphi_1$ 従って $\varphi_1' = \mu\varphi_1^2$ は $L^1(\mathbf{R}_+)$ に属さない. 更に, (16) から

$$\frac{\varphi_1'(s)}{\varphi_1(s)} = \mu(r)\varphi_1(r) \leq \frac{1}{r}, \quad r > R_0 \quad (18)$$

が言える.

定義 1 $\kappa \in \bar{\Pi}_\pm$, $f \in L_{\mu^{-1}}^2$ とする. (9) の解 $u \in H_{\text{loc}}^1$ に対して放射条件を

$$u \in L_\mu^2, \quad \tilde{x} \cdot \theta = \tilde{x} \cdot \theta(x, \kappa) \in L_{\varphi_1'}^2$$

で定義する. 放射条件を満たす解 u を $\kappa \in \bar{\Pi}_+$, $\kappa \in \bar{\Pi}_-$ に従って, それぞれ outgoing, incoming 解と呼ぶ.

補題 6 κ, f, u を定義 1 のものとする. このとき

(i) $R \geq R_0$ に対して

$$|\text{Re}\kappa| \|u\|_{\mu, B_R'}^2 \leq 2\varphi_1(R)^{-1} \left\{ \|\tilde{x} \cdot \theta\|_{\varphi_1', B_{R_0}'}^2 + \|f\|_{\mu^{-1}} \|u\|_\mu \right\}.$$

(ii) $\text{Im}\kappa > 0$ なら $u \in L^2$ で

$$2|\text{Re}\kappa|\text{Im}\kappa \|u\|^2 \leq \|f\|_{\mu^{-1}} \|u\|_\mu.$$

(iii) κ が $\bar{\Pi}_{\pm}$ の compact 集合 $K_{\pm}$ を動くとき, 定数 $C_2 = C_2(R, K_{\pm}) > 0$ が存在して

$$\int_{B_R} \{|\nabla_b u|^2 + r^{-2}|u|^2\} dx \leq C_2 \{ \|f\|_{\mu^{-1}}^2 + \|u\|_{\mu}^2 \}.$$

[証明] Gauss の公式により

$$\operatorname{Im} \int_{B_r} f \bar{u} dx = -\operatorname{Im} \int_{S_r} (\tilde{x} \cdot \nabla_b u) \bar{u} dS - \operatorname{Im}(\kappa^2) \int_{B_r} |u|^2 dx.$$

従って

$$\operatorname{Im}(\kappa^2) \int_{B_r} |u|^2 dx + \operatorname{Re} \kappa \int_{S_r} |u|^2 dS = -\operatorname{Im} \left[\int_{S_r} (\tilde{x} \cdot \theta) \bar{u} dS + \int_{B_r} f \bar{u} dx \right]. \quad (19)$$

$\operatorname{Im} \kappa^2$ と $\operatorname{Re} \kappa$ の符号は同じであるから, まず (19) に $\mu(r)$ を乗じて (R, ∞) で積分することにより

$$|\operatorname{Re} \kappa| \|u\|_{\mu, B'_R}^2 \leq \int_{B'_R} \mu |\tilde{x} \cdot \theta| |u| dx + \varphi_1(R)^{-1} \int |f| |u| dx$$

が得られる. ここで関係式 $\mu^{1/2} = \varphi_1^{-1} \varphi_1'^{1/2}$ に注意し, Schwarz の不等式を用いれば (i) が示される.

次に (19) に戻って

$$|\operatorname{Im}(\kappa^2)| \int_{B_r} |u|^2 dx \leq \int_{S_r} |\tilde{x} \cdot \theta| |u| dS + \int_{B_r} |f| |u| dx$$

に注意する. 面積分を

$$\int_{S_r} |\tilde{x} \cdot \theta| |u| dS = \frac{1}{\mu \varphi_1} \int_{S_r} \sqrt{\varphi_1'} |\theta| \sqrt{\mu} |u| dS$$

と変形すれば $\mu \varphi \notin L^1(\mathbf{R}_+)$ であるから

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} |\tilde{x} \cdot \theta| |u| dS = 0$$

が得られ, (ii) が示される.

(iii) を示すのに $\chi = \chi(r)$ を $\chi(r) = 1$ ($r \leq R$), $= 0$ ($r > R+1$) を満たす滑らかな実数値関数とし, (9) の両辺に $\chi \bar{u}$ を乗じて部分積分すると

$$\operatorname{Re} \int \chi \{f \bar{u} + \kappa^2 |u|^2\} dx = \int \chi \{|\nabla_b u|^2 + c(x) |u|^2\} dx + \operatorname{Re} \int \chi' (\tilde{x} \cdot \nabla_b u) \bar{u} dx.$$

ここで (3) より

$$\int \chi \frac{(n-2)^2}{4r^2} |u|^2 dx + \int \chi' |u|^2 dx \leq \int \chi |\nabla_b u|^2 dx.$$

また (A1) より $c(x) \geq \frac{\beta}{r^2} - C_\infty$ であるから

$$\epsilon = 1 \quad (n = 2), \quad = \left(\frac{(n-2)^2}{2} + \beta \right)^{-1} \left(\frac{(n-2)^2}{4} + \beta \right) \quad (n \geq 3)$$

とにおいて

$$\begin{aligned} \epsilon \int \chi \left\{ |\nabla_b u|^2 + \left(\frac{(n-2)^2}{4} + \beta \right) \frac{1}{r^2} |u|^2 \right\} dx &\leq \int \chi \{ |f \bar{u}| + (C_\infty + |\kappa|^2) |u|^2 \} dx \\ &\quad - \int \chi' \{ |(\tilde{x} \cdot \nabla_b u) \bar{u}| + |u|^2 \} dx. \end{aligned} \quad (20)$$

故に $B_{R,R+1}$ での (9) の楕円性に注意すれば, (iii) が示される. $\square$

補題 7 $\kappa \in K_\pm$, f, u を定義 1 のものとする. このとき定数 $C_3 = C_3(K_\pm) > 0$ が存在して

$$\|\theta\|_{\varphi'_1, B'_{R_0}}^2 \leq C_3 \left\{ \|f\|_{\mu^{-1}}^2 + \|f\|_\mu^2 \right\}.$$

[証明] 命題 1 で $R = R_0$, $t > R_0 + 1$ とし, $\sigma = 0$, $\varphi = (1 - \chi)\varphi_1$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} \int_{S_t} \varphi_1 \left(-|\tilde{x} \cdot \theta|^2 + \frac{1}{2} |\theta|^2 \right) dS + \int_{B_{R,t}} (1 - \chi) \varphi_1 \left\{ \left(2 \operatorname{Im} \kappa + \frac{\varphi'_1}{2\varphi_1} |\theta|^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{r} - \frac{\varphi'_1}{\varphi_1} \right) (|\theta|^2 - |\tilde{x} \cdot \theta|^2) + \operatorname{Re} [J(x, \kappa) - f \tilde{x} \cdot \bar{\theta}] \right\} dx \\ \left. - \int_{B_{R,R+1}} \chi' \varphi_1 \left(-|\tilde{x} \cdot \theta|^2 + \frac{1}{2} |\theta|^2 \right) dx = 0. \right. \end{aligned} \quad (21)$$

(17) より

$$\mu(t) \varphi_1(t) \int_{S_t} \varphi_1 |\tilde{x} \cdot \theta|^2 dS = \int_{S_t} \varphi'_1 |\tilde{x} \cdot \theta|^2 dS.$$

放射条件により右辺は t の L^1 関数で, $\mu(t) \varphi_1(t) \notin L^1(\mathbf{R}_+)$ であるから

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{S_t} \varphi_1 |\tilde{x} \cdot \theta|^2 dS = 0$$

となる. また (A2) と (17) とから $r > R_0$ で

$$\varphi_1 |J(x, \kappa)| \leq \varphi_1 C_0 \mu |u| |\theta| \leq C_0 \mu^{1/2} |u| \varphi_1'^{1/2} |\theta|$$

であり, 補題 6 (iii) の場合と同様に

$$\int_{B_{R,R+1}} |\theta|^2 dx \leq C(R, K_\pm) \left(\|u\|_\mu^2 + \|f\|_{\mu^{-1}}^2 \right).$$

更に (18) を考慮すれば, (21) で $t \rightarrow \infty$ とすることにより補題の不等式が得られる.
□

以下, 上の 2 つの補題と定理 2 を用いて定理 3 の証明を行う.

第 1 段 任意の $\kappa \in \bar{\Pi}_\pm$, $f \in L^2_{\mu-1}$ に対して (9) の outgoing (または incoming) 解は一意的である. $\kappa \in \Pi_\pm$ であれば, この解は存在して $R(\kappa^2)f$ に一致する.

[証明] $\text{Im}\kappa > 0$ のときは, 補題 6 (ii) により, 放射条件を満たす解は L^2 に属す. 逆に L^2 解 $R(\kappa^2)f$ は放射条件を満たすから, これが唯一の解になる. そこで $\text{Im}\kappa = 0$ とする. 解が 2 つあったとして, その差を u とすれば, u は $\lambda = \kappa^2 > 0$ とした固有方程式 (12) を満たし, さらに放射条件より

$$\int_0^\infty \varphi'(r) dr \int_{S_r} |\theta|^2 dS < \infty.$$

$\varphi' \notin L^1(\mathbf{R}_+)$ に注意すれば

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} |\theta|^2 dS = 0$$

が従うが, これは定理 2 の結論に反する. 故に u は compact support を持つことになり, 一意接続定理から $u \equiv 0$ が示される. □

$\{(\kappa_k, f_k)\} \subset \bar{\Pi}_\pm \times L^2_{\mu-1}$ に対して, $\{u_k\}$ を放射条件を満たす (9) の解の列とする. $\{u_k\}$ が存在し, $k \rightarrow \infty$ と共に $(\kappa_k, f_k) \rightarrow (\kappa_0, f_0) \in \bar{\Pi}_\pm \times L^2_{\mu-1}$ とすると

第 2 段 $u_k \rightarrow u_0 \in L^2_\mu$ であれば, u_0 は $\kappa = \kappa_0$ に対応する放射条件を満たす.

[証明] $R \geq R_0$, $K_\pm = \{\kappa_k\} \cup \{\kappa_0\}$ とする.

$$\|\theta(\cdot, \kappa_k)\|_{B_R} \leq \|\nabla_b u\|_{B_R} + \left\| \frac{n-1}{2r} u \right\|_{B_R} + |\kappa_k| \|u\|_{B_R}$$

であるから, 仮定と補題 6 (iii) より $\|\theta(\cdot, \kappa_k)\|_{B_R}$ は有界になる. これと補題 7 を合わせれば $\{\theta_k = \theta(x, \kappa_k)\}$ が $L^2_{\varphi'}$ で有界であることがわかり, 従って $\{\theta_k\}$ は $L^2_{\varphi'}$ で弱収束する部分列をもつ. それをまた $\{\theta_k\}$ で表し, 極限を $\theta_0(x)$ とする. $\theta_0 \in L^2_{\varphi'}$ で, 任意の $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$(\tilde{x} \cdot \theta_k, h) = \left(u_k, -\nabla_b \cdot (\tilde{x}u) + \frac{n-1}{2r} u - i\kappa_k h \right) \rightarrow \left(u_0, -\tilde{x} \cdot \nabla_b h - \frac{n-1}{2r} u - i\kappa_0 h \right).$$

故に $\tilde{x} \cdot \nabla_b u + \left(\frac{n-1}{2r} - i\kappa_0 \right) u = \tilde{x} \cdot \theta_0$ が従い u_0 は放射条件を満たす. □

第 3 段 $\{u_k\}$ が L^2_μ で有界なら同じ空間で compact である.

[証明] $\operatorname{Re} \kappa_k$ は一様に正で $\{(f_k, u_k)\}$ が $L_{\mu-1}^2 \times L_{\mu}^2$ で有界だから, 補題 6 (i) と補題 7 を合わせれば $\|u_k\|_{\mu, B'_R}$ は十分大きな R に対して一様に小さくなり, 補題 6 (iii) より $\{u_k\}$ は $H_{b, \text{loc}}^1$ で有界になる. 従って, Rellich の compactness criterion が使え, 主張が示される. $\square$

第4段 $\{u_k\}$ は L_{μ}^2 で有界である.

[証明] $\{u_k\}$ の部分列, 簡単のため $\{u_k\}$ と書く, で $k \rightarrow \infty$ で $\|u_k\|_{\mu} \rightarrow \infty$ となるものがあるとする. $v_k = u_k / \|u_k\|_{\mu}$ とおけば,

$$(\kappa_k, f_k / \|u_k\|_{\mu}) \rightarrow (\kappa_0, 0) \in \bar{\Pi}_{\pm} \times L_{\mu-1}^2$$

で $\|v_k\|_{\mu} = 1$ であるから, 上に見たように $\{v_k\}$ は収束する部分列を持ち, その極限を v_0 と書けば, それは $\lambda = \kappa_0^2$ として固有方程式 (12) の解になり, 更に放射条件

$$\|v_0\|_{\mu} = 1, \quad \left\| \tilde{x} \cdot \nabla_b v_0 + \left(\frac{n-1}{2r} - i\kappa_0 \right) v_0 \right\|_{\varphi'_1} < \infty$$

を満たす. 故に第1段から $u \equiv 0$ が結論される. しかし, これは $\|v_0\|_{\mu} = 1$ に矛盾し, 主張が示される. $\square$

[定理 3 の証明] 任意の $(\kappa_0, f_0) \in \mathbf{R}_{\pm} \cup L_{\mu-1}^2$ に対して $\{\kappa_k\} \subset \Pi_{\pm}$ を k と共に κ_0 に収束するようにとり, $u_k = R(\kappa_k^2) f_0$ とおく. 上の主張 (iv), (iii), (ii) をたどって $\{u_k\}$ は (κ_0, f_0) に対応する (9) の outgoing (incoming) 解 u_0 に収束する部分列を持つことがわかる. 解の一意性 (主張 (i)) を用いれば, 部分列をとる必要はなく, $\{u_k\}$ 自体が収束列になっていること, また, u_0 は列 $\{\kappa_k\}$ のとり方に依らないことがわかる. 従って, $R(\kappa^2) : L_{\mu-1}^2 \rightarrow L_{\mu}^2$ は $\bar{\Pi}_{\pm}$ 全体延長された. これの κ に対する連続性は主張 (ii) と (i) から明らかである. $\square$

5. 一様な resolvent 評価

この節と次節の結果は Mochizuki [14] による. 問題は resolvent $R(\kappa^2)$ の $\kappa \in \Pi_{\pm}$ での一様評価とその応用であるが, そのために以下では $n \geq 3$ とし, $\max\{|\nabla \times b(x)|, |c(x)|\}$ に減衰条件だけでなく, 小ささの条件も仮定する.

定理 4 $\kappa \in \Pi_{\pm}$, $f \in L^2$ に対して $u = R(\kappa^2)f$ を考える.

(i) Let (A1) と共に次の (A4) を仮定する

$$(A4) \quad \max\{|\nabla \times b(x)|, |c(x)|\} \leq \epsilon_0 r^{-2}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

ここに $0 < \epsilon_0 < 1/4\sqrt{2}$ ($n = 3$), $< \sqrt{(n-1)(n-3)/8}$ ($n \geq 4$). このとき

$$\int \frac{1}{r^2} |u|^2 dx \leq C_4 \int r^2 |f|^2 dx,$$

ただし $C_4 = \frac{8}{1-32\epsilon_0^2}$ ($n = 3$), $= \frac{8}{(n-1)(n-3)-8\epsilon_0^2}$ ($n \geq 4$) である.

(ii) (A1) と共に次の (A5) を仮定する.

$$(A5) \quad \max\{|\nabla \times b(x)|, |c(x)|\} \leq \epsilon_0 \min\{\mu(r), r^{-2}\}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

ここに $\mu(r)$ は $r > 0$ の滑らかな, 正の L^1 -関数で, 更に

$$\mu'(r) \leq 0, \quad r \in \mathbf{R}_+ \quad (22)$$

を満たすものとする. このとき

$$\int \left\{ \mu(|\nabla_b u|^2 + |\kappa u|^2) - \mu' \frac{n-1}{2r} |u|^2 \right\} dx \leq C_5 \int \max\{\mu^{-1}, r^2\} |f(x)|^2 dx,$$

ただし $C_5 = 4\|\mu\|_{L^1} (5 + 4\epsilon_0^2 C_4)$ である.

以下, 補題を重ねてこの定理を示そう.

補題 8 $\varphi = \varphi(r)$, $r > 0$, を正の増加関数で

$$\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} \leq \frac{1}{r} \quad (23)$$

を満たすものとする. このとき

$$\begin{aligned} & \int \varphi \left(\operatorname{Im} \kappa + \frac{\varphi'}{2\varphi} \right) \left\{ |\theta|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} |u|^2 \right\} dx \\ & \leq \int \varphi (|f| + \max\{|\nabla \times b|, |c|\} |u|) |\theta| dx. \end{aligned}$$

[証明] 命題 1 の等式に戻って $\sigma \equiv 0$ とおき, $R \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned} & \int \varphi \left\{ \left(\frac{1}{r} - \frac{\varphi'}{\varphi} \right) (|\theta|^2 - |\tilde{x} \cdot \theta|^2) + \left(\operatorname{Im} \kappa + \frac{\varphi'}{2\varphi} \right) |\theta|^2 + \operatorname{Re} J(x, \kappa) \right\} dx \\ & = \operatorname{Re} \int \varphi f \overline{\tilde{x} \cdot \theta} dx. \end{aligned} \quad (24)$$

次に注意しよう.

$$\varphi \left| J(x, \kappa) - \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} u \bar{x} \cdot \theta \right| \leq \varphi \max\{|\nabla \times b|, |c|\} |u| |\theta|,$$

$$\operatorname{Re} \int \varphi \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} u \bar{x} \cdot \theta dx = \int \varphi \left(\operatorname{Im} \kappa - \frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{1}{r} \right) \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} |u|^2 dx.$$

これらを (24) に代入し, 条件 (23) を考慮すれば, Schwarz の不等式から補題の不等式が導かれる. $\square$

補題 9 次の不等式が成り立つ.

$$\int \frac{1}{4r^2} |u|^2 dx \leq \int |\tilde{x} \cdot \theta|^2 dx.$$

[証明] 第2節の等式 (3) に戻ろう. この両辺に重み関数 $\xi = \xi(r)$ を乗じて $B_{\epsilon, t}$ で積分すれば

$$\begin{aligned} \int_{B_{\epsilon, t}} \xi |\tilde{x} \cdot \nabla_b u|^2 dx &= \int_{B_{\epsilon, t}} \left| \tilde{x} \cdot \nabla_b (\sqrt{\xi} u) + \frac{\alpha}{r} \sqrt{\xi} u \right|^2 dx \\ &\quad - \left[\int_{S_t} - \int_{S_{\epsilon}} \right] \left(\frac{\xi'}{2\xi} + \frac{\alpha}{r} \right) |\sqrt{\xi} u|^2 dS \\ &\quad + \int_{B_{\epsilon, t}} \left\{ \frac{(n-2)\alpha - \alpha^2}{r^2} + \frac{(n-1)\xi'}{2r\xi} + \frac{2\xi''\xi - \xi'^2}{4\xi^2} \right\} |\sqrt{\xi} u|^2 dx \end{aligned}$$

が得られる. ここで u を $v = e^{-i\kappa r} r^{(n-1)/2} u$ でおきかえ, $\xi = e^{-2\operatorname{Im}\kappa r} r^{-n+1}$, $\alpha = \frac{n-2}{2}$ とすれば

$$\begin{aligned} \xi |v|^2 &= |u|^2, \quad \xi |\tilde{x} \cdot \nabla_b v|^2 = |\tilde{x} \cdot \theta|^2, \\ \frac{(n-2)\alpha - \alpha^2}{r^2} + \frac{(n-1)\xi'}{2r\xi} + \frac{2\xi''\xi - \xi'^2}{4\xi^2} &= \frac{1}{4r^2} + (\operatorname{Im}\kappa)^2 \end{aligned}$$

であるから, $\epsilon \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ での極限をとって, 補題の不等式が示される. $\square$

[定理 4 (i) の証明] 補題 8 で $\varphi(r) = r$ とおく. (A4) に注意すれば, 任意の $0 < \epsilon \leq 1$ に対して

$$\frac{1}{2} \int \left\{ (1-\epsilon) |\theta|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} |u|^2 \right\} dx \leq \frac{1}{\epsilon} \int (r^2 |f|^2 + \epsilon_0^2 r^{-2} |u|^2) dx.$$

これと補題 9 を合わせれば

$$\frac{-\epsilon^2 + (n-2)^2\epsilon - 8\epsilon_0^2}{8\epsilon} \int \frac{1}{r^2} |u|^2 dx \leq \frac{1}{\epsilon} \int r^2 |f|^2 dx$$

が得られる. そこで $\epsilon = \min\{\sqrt{8}\epsilon_0, 1\}$ とおけば (i) が成り立つ. $\square$

補題 10 $c(x) \geq -\frac{(n-2)^2}{4r^2}$ とする. このとき (22) を満たす $\mu \in L^1(\mathbf{R}_+)$ に対して

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \left\{ \mu \operatorname{Im} \kappa \frac{1}{r} |u|^2 - \mu' \frac{n-1}{r} |u|^2 + \mu (|\nabla_b u|^2 + |\kappa u|^2) \right\} dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int \mu \left(|\theta|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} |u|^2 \right) dx + \|\mu\|_{L^1} \int |f(x)| |i\kappa u| dx \end{aligned}$$

が成り立つ.

[証明] (9) の両辺に $-\overline{i\kappa u}$ を乗じ B_r で部分積分すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{S_r} \left\{ -|\nabla_b u - i\kappa u|^2 + |\nabla_b u|^2 + |\kappa|^2 |u|^2 \right\} dS \\ & + \operatorname{Im} \kappa \int_{B_r} (|\nabla_b u|^2 + c|u|^2 + |\kappa u|^2) dx = -\operatorname{Re} \int_{B_r} f \overline{i\kappa u} dx. \end{aligned}$$

これに $\mu(r)$ を乗じ, 更に $(0, \infty)$ で積分すれば

$$\begin{aligned} \mu |\nabla_b u - i\kappa \tilde{x} u|^2 &= -\nabla \cdot \left\{ \tilde{x} \mu \frac{n-1}{2r} |u|^2 \right\} + \mu \left(|\theta|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} |u|^2 \right) \\ &+ \mu' \frac{n-1}{2r} |u|^2 - \mu \operatorname{Im} \kappa \frac{n-1}{r} |u|^2 \end{aligned}$$

に注意して

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \left\{ \mu \operatorname{Im} \kappa \frac{n-1}{r} |u|^2 - \mu' \frac{n-1}{2r} |u|^2 + \mu (|\nabla_b u|^2 + |\kappa u|^2) \right\} dx \\ & + \operatorname{Im} \kappa \int_0^\infty \mu dr \int_{B_r} (|\nabla_b u|^2 + c|u|^2 + |\kappa u|^2) dx \\ & = \frac{1}{2} \int \mu \left(|\theta|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} |u|^2 \right) dx + \operatorname{Re} \int_0^\infty \mu dr \int_{B_r} f(x) \overline{i\kappa u} dx \end{aligned}$$

が得られる. $c(x) \geq -\frac{(n-2)^2}{4r^2}$ に注意し, 補題 1 で $\alpha = \frac{n-2}{2}$, $\epsilon \rightarrow 0$ とすれば

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \kappa \int_0^\infty \mu dr \int_{B_r} (|\nabla_b u|^2 + c(x)|u|^2) dx \\ & \geq -\operatorname{Im} \kappa \int_0^\infty \mu dr \int_{S_r} \frac{n-2}{2r} |u|^2 dS = -\int \mu \operatorname{Im} \kappa \frac{n-2}{2r} |u|^2 dx \end{aligned}$$

となるから, これを上のに代入して補題の不等式が示される. $\square$

[定理 4 (ii) の証明] $\varphi(r) = \int_0^r \mu(\sigma) d\sigma$ として補題 8 と 10 を合わせる. この φ が (23) を満たすことは明らかであろう. 定義から $\varphi(r) \leq \|\mu\|_{L^1}$ であるから

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \left\{ -\mu' \frac{n-1}{2r} |u|^2 + \mu (|\nabla_b u|^2 + |\kappa u|^2) \right\} dx \\ & \leq 4\|\mu\|_{L^1}^2 \int \mu^{-1} (|f|^2 + |\max\{|\nabla \times b|, |c|\} u|^2) dx + \|\mu\|_{L^1} \int |f| |\kappa u| dx. \end{aligned}$$

従って

$$\|\mu\|_{L^1} \int |f| |\kappa u| dx \leq \|\mu\|_{L^1}^2 \int \mu^{-1} |f|^2 dx + \frac{1}{4} \int \mu |\kappa u|^2 dx$$

に注意すれば

$$\begin{aligned} & \int \left\{ \mu (|\nabla_b u|^2 + |\kappa u|^2) - \mu' \frac{n-1}{2r} |u|^2 \right\} dx \\ & \leq 4\|\mu\|_{L^1}^2 \int \mu^{-1} (5|f(x)|^2 + 4|\max\{|\nabla \times b|, |c|\} u|^2) dx. \end{aligned} \quad (25)$$

が結論される. (A5) と (i) の不等式から

$$\int \mu^{-1} |\max\{|\nabla \times b|, |c|\} u|^2 dx \leq \epsilon_0^2 C_4 \int r^2 |f|^2 dx,$$

が導かれるので (25) は求める不等式を与える. $\square$

注意 3 関数 $(1+r)^{-1-\delta}$ や $(1+r)^{-1}[\log(e+r)]^{-1-\delta}$ ($0 < \delta \leq 1$) は (11), (16), (22) を全て満たす $\mu(r)$ の具体例である.

6. 対応する発展方程式の平滑化効果

ここでは magnetic Schrödinger 作用素に対応する, 次の 2 つの発展方程式を考える.

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0, \quad u(0) = f \in L^2, \quad (26)$$

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{L + m^2} u, \quad u(0) = f \in L^2 \quad (27)$$

ただし $m \geq 0$. (27) は相対論的 Schrödinger 方程式と呼ばれるが, Klein-Gordon 方程式 ($m > 0$) や波動方程式 ($m = 0$) の解はこの解を用いて表示される.

定理 4 の応用として, これらの方程式に対して次の定理を示すことができる. この定理は時空の重み付き L^2 -評価であるが, 解の平滑化効果とも呼ばれる.

定理 5 (i) (A4) を仮定すれば $r^{-1}h(t) \in L^2(\mathbf{R}_\pm \times \Omega)$ を満たす $h(t)$ に対して

$$\left| \int_0^{\pm\infty} \left\| r^{-1} \int_0^t e^{-i(t-\tau)L} h(\tau) d\tau \right\|^2 dt \right| \leq C_1 \left| \int_0^{\pm\infty} \|rh(t)\|^2 dt \right|.$$

また, $f \in L^2$ に対して

$$\left| \int_0^{\pm\infty} \|r^{-1}e^{-itL}f\|^2 dt \right| \leq 2\sqrt{C_1}\|f\|^2.$$

(ii) (A5) を仮定すれば $f \in L^2$ に対して

$$\left| \int_0^{\pm\infty} \left\| \min\{\sqrt{\mu(r)}, r^{-1}\} e^{-it\sqrt{L+m^2}} f \right\|^2 dt \right| \leq 4\sqrt{\max\{C_1, C_2\}}\|f\|^2.$$

(iii) $b(x) \equiv 0$, $c(x) \equiv 0$ であれば, L は通常の Laplace 作用素

$$L_0 = -\Delta, \quad \mathcal{D}(L_0) = H^2$$

であり, このときは $f \in L^2$ に対して

$$\left| \int_0^{\pm\infty} \left\| \sqrt{\mu(r)} e^{-it\sqrt{L_0}} f \right\|^2 dt \right| \leq 8\sqrt{5}\|\mu\|_{L^1}\|f\|^2.$$

同様の結果は数多くある (Yajima [16], Cuccagna-Schirmer [1], D'Ancona-Fanelli [2], Erdogan-Goldberg-Schlag [4], Georgiev-Stefanov-Tarulli [6] など). これらの結果は magnetic potential $b(x)$ については, それ自身に強い減衰条件が課せられている. この制限はここでは不要である.

定理 5 の証明には次の抽象的な結果を援用する.

命題 2 Λ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし, $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ に対して $\mathcal{R}(z) = (\Lambda - z)^{-1}$ とおく. A を $\mathcal{H}$ からもう 1 つの Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$ への閉作用素とする. $C > 0$ が存在して, 任意の $f \in \mathcal{D}(A^*)$ と $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ に対して

$$\sup_{z \notin \mathbf{R}} \|AR(z)A^*f\|_{\mathcal{H}_1} < \sqrt{C}\|f\|_{\mathcal{H}_1} \quad (28)$$

であれば, 各 $h(t) \in L^2(\mathbf{R}_\pm; \mathcal{H}_1)$, $f \in \mathcal{H}$ に対して次の 3 つの不等式が成り立つ.

$$\left| \int_0^{\pm\infty} \left\| \int_0^t A e^{-i(t-\tau)\Lambda} A^* h(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{H}_1}^2 dt \right| \leq C \left| \int_0^{\pm\infty} \|h(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 dt \right|, \quad (29)$$

$$\sup_{t \in \mathbf{R}_{\pm}} \left\| \int_0^t e^{i\tau\Lambda} A^* h(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2\sqrt{C} \left| \int_0^{\pm\infty} \|h(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 dt \right|, \quad (30)$$

$$\left| \int_0^{\pm\infty} \|Ae^{-it\Lambda} f\|_{\mathcal{H}_1}^2 dt \right| \leq 2\sqrt{C} \|f\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (31)$$

[証明] (29) の証明のために $h(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}; \mathcal{D}(A^*))$ としてよい.

$$v(t) = \int_0^t e^{-i(t-\tau)\Lambda} A^* h(\tau) d\tau$$

とおき, その Laplace 変換を

$$\tilde{v}(z) = \pm \int_0^{\pm\infty} e^{izt} v(t) dt, \quad \pm \operatorname{Im} z > 0.$$

で定義する. $\tilde{v}(z) = -i\mathcal{R}(z)A^*\tilde{h}(z)$ であるから, Plancherel の定理と resolvent 評価 (28) より, 任意の $g(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}; \mathcal{D}(A^*))$ に対して

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pm\infty} e^{\mp 2\epsilon t} (Av(t), g(t))_{\mathcal{H}_1} dt \right| &= \left| (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (A\tilde{v}(\lambda \pm i\epsilon), \tilde{g}(\lambda \pm i\epsilon))_{\mathcal{H}_1} d\lambda \right| \\ &\leq (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \|A\mathcal{R}(\lambda \pm i\epsilon)A^*\tilde{h}(\lambda \pm i\epsilon)\|_{\mathcal{H}_1} \|\tilde{g}(\lambda \pm i\epsilon)\|_{\mathcal{H}_1} d\lambda \\ &\leq \left| C \int_0^{\pm\infty} e^{\mp 2\epsilon t} \|h(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 dt \int_0^{\pm\infty} e^{\mp 2\epsilon t} \|g(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 dt \right|^{1/2} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $\epsilon \rightarrow 0$ とすれば (29) が得られる.

次に, Fubini の定理を用いれば

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{i\tau\Lambda} A^* h(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{H}_1}^2 &= \int_0^t \left(\int_0^s Ae^{-i(s-\tau)\Lambda} A^* h(\tau) d\tau, h(s) \right)_{\mathcal{H}_1} ds \\ &\quad + \int_0^t \left(h(\tau), \int_0^\tau Ae^{-i(\tau-s)\Lambda} A^* h(s) ds \right)_{\mathcal{H}_1} d\tau. \end{aligned}$$

これと (29) から (30) が導かれる.

(31) は (30) の双対命題である. □

[定理 5 (i) の証明] 上の命題で $\Lambda = L$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 = L^2$, $A = r^{-1}$ (掛け算作用素) とおく. $A^* = A$ で $\mathcal{R}(z) = R(z)$ であるから, $z = \kappa^2$ に対する定理 4 (i) により

$$\|AR(z)A^*f\| = \|r^{-1}R(z)A^*f\| \leq \sqrt{C_1} \|rA^*f\| = \sqrt{C_1} \|f\|.$$

故に, (29) と (31) が次のように書き下せる.

$$\left| \int_0^{\pm\infty} \|r^{-1} \int_0^t e^{-i(t-\tau)L} h(\tau) d\tau\|^2 dt \right| \leq C_1 \left| \int_0^{\pm\infty} \|rh(t)\|^2 dt \right|,$$

$$\left| \int_0^{\pm\infty} \|r^{-1}e^{-itL}f\|^2 dt \right| \leq 2\sqrt{C_1}\|f\|^2.$$

これらは求める結果である. □

定理 5 (ii) の証明のために Klein-Gordon 方程式

$$i\partial_t u = \Lambda u, \quad u(t) = \{w(t), \partial_t w(t)\}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i(L+m^2) & 0 \end{pmatrix}$$

を energy 空間 $\mathcal{H} = H_b^1 \times L^2$ で考える. ただし, $\mathcal{H}$ の norm は

$$\|\{f_1, f_2\}\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \int \{|\nabla_b f_1|^2 + (c(x) + m^2)|f_1|^2 + |f_2|^2\} dx.$$

で定義している. 今の場合 $c(x)$ の原点での特異性が弱いから, Λ は

$$\mathcal{D}(\Lambda) = \{f_1 \in H_b^1; \Delta_b f_1 \in L^2\} \times \{f_2 \in H_b^1 \cap L^2\}$$

を定義域とする $\mathcal{H}$ での自己共役作用素を定め, その resolvent は

$$\mathcal{R}(z) = (L + m^2 - z^2)^{-1} \begin{pmatrix} z & i \\ -i(L + m^2) & z \end{pmatrix}$$

で与えられる. $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1 = L^2$ を

$$Af = \min\{\sqrt{\mu(r)}, r^{-1}\} \sqrt{L + m^2} f_1 \quad \text{for } f = \{f_1, f_2\} \in \mathcal{H}$$

で定義すると, 共役作用素 A^* は

$$A^*g = \left\{ \sqrt{L + m^2}^{-1} \min\{\sqrt{\mu(r)}, r^{-1}\}g, 0 \right\} \quad \text{for } g \in L^2$$

で与えられる.

[定理 5 (ii) の証明] 定義により任意の $g \in \mathcal{D}(A^*)$ に対して

$$A\mathcal{R}(z)A^*g = \min\{\sqrt{\mu(r)}, r^{-1}\} z(L + m^2 - z^2)^{-1} \min\{\sqrt{\mu(r)}, r^{-1}\}g. \quad (32)$$

そこで

$$\begin{aligned} \int \left| \min\{\sqrt{\mu}, r^{-1}\} z(L + m^2 - z - 2)^{-1} f \right|^2 dx &\leq m^2 \int r^{-2} |(L + m^2 - z^2)^{-1} f|^2 dx \\ &\quad + \int \mu | -m^2 + z^2 | |L(L + m^2 - z^2)^{-1} f|^2 dx \end{aligned}$$

に注意すれば, 定理 4 (ii) を用いて

$$\|A\mathcal{R}(z)A^*g\| \leq \sqrt{m^2C_1 + C_2}\|g\|.$$

が得られる. この評価式と共に命題 2 に戻れば (31) は

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pm\infty} \|Ae^{-it\Lambda}f\|^2 dt \right| &= \left| \int_0^{\pm\infty} \|\min\{\sqrt{\mu(r)}, r^{-1}\}\sqrt{L+m^2}w(t)\|^2 dy \right| \\ &\leq 2\sqrt{m^2C_1 + C_2}\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

のように表せる.

$$w(t) = \cos(t\sqrt{L+m^2})f_1 + \sqrt{L+m^2}^{-1} \sin(t\sqrt{L+m^2})f_2$$

であるから, $g \in L^2$ に対して $f = \{(L+m^2)^{-1/2}g, 0\}$ また $f = \{0, g\}$ とおけば

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pm\infty} \|\min\{\sqrt{\mu(r)}, r^{-1}\}\cos(t\sqrt{L+m^2})g\|^2 dy \right| &\leq \sqrt{m^2C_1 + C_2}\|g\|^2, \\ \left| \int_0^{\pm\infty} \|\min\{\sqrt{\mu(r)}, r^{-1}\}\sin(t\sqrt{L+m^2})g\|^2 dy \right| &\leq \sqrt{m^2C_1 + C_2}\|g\|^2 \end{aligned}$$

が得られる. これらの不等式から (ii) が示される. $\square$

[定理 5 (iii) の証明] このときは (25) からわかるように定理 4 (ii) の不等式が $C_2, \max\{\mu^{-1}, r^2\}$ をそれぞれ $20\|\mu\|_{L^1}, \mu^{-1}$ に変えて成り立つ. これを基に上の証明をたどれば, 求める結果が得られる. $\square$

REFERENCES

- [1] S. Cuccagna and P. P. Schirmer, *On the wave equation with magnetic potential*, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), 135-152.
- [2] P. D'Ancona and L. Fanelli, *Strichartz and smoothing estimates for dispersive equations with magnetic potentials*, Comm. Partial Differential Eqs. **33** (2008), 1082-1112.
- [3] D. M. Eidus, *The principle of limiting amplitude*, Uspekhi Math. Nauk, **24** (1969), 91-156.
- [4] M. B. Erdogan, M. Goldberg and W. Schlag, *Strichartz and smoothing estimates for Schrödinger operators with large magnetic potentials in $\mathbf{R}^3$* , J. Eur. Math. Soc. **10** (2008), 507-531.
- [5] K. O. Friedrichs, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*, Math. Ann. **109** (1934), 469-487, 685-713; **110** (1935), 777-779.
- [6] V. Georgiev, A. Stefanov and M. Tarulli, *Smoothing-Strichartz estimates for the Schrödinger equation with small magnetic potential*, Disc. Cont. Dyn. Syst.-A **17** (2007), 771-786.
- [7] T. Ikebe and J. Uchiyama, *On the asymptotic behavior of eigenfunctions of second-order elliptic operators*, J. Math. Kyoto Univ. **11** (1971), 425-448.

- [8] W. Jäger and P. Rejto, *On a theorem of Mochizuki and Uchiyama about oscillating long range potentials*, Operator Theory and its Applications (Winnipeg, MB, 1998), 305-329, Fields Inst Commun. 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [9] H. Kalf, U.-W. Schmincke, J. Walter and R. Wiist, *On the spectral theory of Schrödinger and Dirac operators with strongly singular potentials*, Lecture Notes in Math. **44** (1975), 182-226.
- [10] T. Kato, *Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators*, Math. Ann. **162** (1966), 255-279.
- [11] T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Reviews in Math. Phys. **1** (1989), 481-496.
- [12] K. Mochizuki, *Spectral and scattering theory for second order elliptic differential operators in an exterior domain*, Lecture Notes Univ. Utah, Winter and Spring 1972.
- [13] K. Mochizuki, *Jäger-Rejto approach on growth estimates of generalized eigenfunctions and principle of limiting absorption* (Japanese), スペクトル散乱理論とその周辺 (Kyoto 2000), 数理研講究録 No.1208 (2001), 38-51.
- [14] K. Mochizuki, *Uniform resolvent estimates for magnetic Schrödinger operators and smoothing effects for related evolution equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. (to appear).
- [15] F. Rellich, *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten*, Jahresber. Deitch. Math. Verein., **53** (1943), 57-65.
- [16] K. Yajima, *Schrödinger evolution equation with magnetic fields*, J. d'Analyse Math. **56** (1991), 29-76.