

The Grothendieck-Teichmüller group and the adelic beta function

京大・数理研 伊原 康隆
(Y. Ihara)

以前, G. Anderson は, 有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の各元 σ に対して 超アデール・ベータ関数 $B_{\sigma}(s, t)$ ($s, t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) を定義し, その基本的諸性質を研究しました([A])(これは筆者による, “universal l -adic power series for Jacobi sums” $F_{\sigma}^{(u)}(u, v)$ の一般化でもありました。)

今日の話は, $G_{\mathbb{Q}}$ を含む群 $GT = \text{Grothendieck-Teichmüller}$ 群の各元 σ に対してもベータ関数 $B_{\sigma}(s, t)$ を定義し, B_{σ} ($\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$) の主な性質のうちでどれが $\sigma \in GT$ でも成立つかを論じるものです。

- i) “ Γ 分解” は $\sigma \in GT$ でも成立つ。
- ii) “ Γ の等分公式” は 多分 $\sigma \in GT$, $\sigma \notin G_{\mathbb{Q}}$ では成立たないだろう, というのが現在得られている結果と推測です。(とくに, $G_{\mathbb{Q}} \subsetneq GT$ であるらしい)

§1 まず記号.

F_n : 階数 n の自由群 ($n \geq 1$),

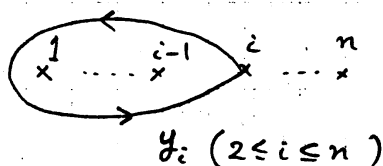
B_n : n 本系の Artin braid 群 $= \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$,

P_n : 同 pure braid 群 $= \langle x_{ij} \rangle_{1 \leq i < j \leq n}$,

ただし,



また



とおき, $\omega_n = y_2 \cdots y_n \in P_n$ とおく. $\langle \omega_n \rangle \cong \mathbb{Z}$ は B_n の中心である. また B_n, P_n の商群

$B_n^* = B_n / \langle y_n, \omega_n \rangle$, $P_n^* = P_n / \langle y_n, \omega_n \rangle$ を考え, 一般に

$b \in B_n$ の B_n^* にあたる像を b^* とかく.

以下, $\wedge$ は profinite completion を表わす. 又一般に位相群 G の交換子群を G' で表わす. $G'' = (G')'$.

さて

$F_2 = \langle x, y \rangle$ とするとき, Grothendieck-Teichmüller 群 GT (cf. [D], [IR]) の定義は

$$GT = \left\{ \sigma \in \text{Aut } \hat{F}_2 \mid \begin{array}{l} \sigma x = x^\lambda \\ \sigma y = f^{-1} y^\lambda f \end{array} \mid \begin{array}{l} \exists \lambda \in \hat{\mathbb{Z}}^\times \\ \exists f \in \hat{F}_2' \end{array}, (i)(ii)(iii) \right\}$$

ここで条件 (i)(ii)(iii) は,

$$(i) \quad f(x, y)f(y, x) = 1,$$

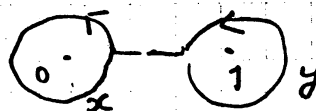
$$(ii) \quad f(z, x)z^m f(y, z)y^m f(x, y)x^m = 1 \quad \text{ただし } \begin{cases} m = \frac{1}{2}(\lambda-1), \\ xyz=1, \end{cases}$$

$$(iii) \quad f(x_{12}^*, x_{23}^*)f(x_{34}^*, x_{45}^*)f(x_{51}^*, x_{12}^*)f(x_{23}^*, x_{34}^*)f(x_{45}^*, x_{51}^*) = 1$$

(P_5^* にあて).

GT は $\text{Aut } \hat{F}_2$ の部分群をなし, $G_{\mathbb{Q}}$ の

$$\hat{F}_2 = \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 - \{0, 1, \infty\}; \vec{01}) = \langle x, y \rangle$$



への作用により, $G_{\mathbb{Q}} \subset GT$

と埋めこまれることが知られている.

§2 GT は $\hat{F}_2$ に, 従って $\hat{F}_2', \hat{F}_2'', \hat{F}_2'/\hat{F}_2''$ 等に作用する. GT, $G_{\mathbb{Q}}$ の $\text{Aut}(\hat{F}_2'/\hat{F}_2'')$ に於ける像を調べる. まず,

$$\hat{F}_2/\hat{F}_2' = \hat{\mathbb{Z}} \times \hat{\mathbb{Z}}$$

$\hat{F}_2'/\hat{F}_2''$ は, 完備群環 $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{F}_2/\hat{F}_2']]$ 上の加群としては, $(x, y) = xy\bar{x}y^{-1} \pmod{\hat{F}_2''}$ で生成される階数 1 の自由加群であることが知られている.

次に, $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^n]]$ の元は $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$ 上の $\hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}^{ab}$ 値をとる関数全体のなす環 $\text{Fct}((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n, \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}^{ab})$ に, 以下のように埋めこめる (cf. [A]). ここで $\mathbb{Q}^{ab}$ は $\mathbb{Q}$ の最大アーベル拡大 (円分体), $n \geq 1$.

$$\begin{array}{ccc}
 (*) \quad \mathbb{Z}[\hat{\mathbb{Z}}^n] & \xhookrightarrow{\text{subring}} & \text{Fct}((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n, \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}_{ab}). \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
 \mathcal{G} & \xrightarrow{\quad} & B.
 \end{array}$$

$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$ の任意の元 $(s_1, \dots, s_n)$ をとり, $Ns_i = 0 \ (\forall i)$ なる自然数 N を選ぶ.

$\mathcal{G}$ の $\hat{\mathbb{Z}}[(\mathbb{Z}/N)^n]$ に於ける元

$$g_N = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/N)^n} c_a \cdot a \quad (c_a \in \hat{\mathbb{Z}})$$

$a = (a_1, \dots, a_n)$

とすると, B は

$$B(s_1, \dots, s_n) = \sum_a c_a \otimes \exp(2\pi i(a_1 s_1 + \dots + a_n s_n))$$

$\in \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}_{ab}$

で定める. n によって $\mathcal{G}$ の $(*)$ が定まる.

さて次に定義する群 Φ は, 実は GT を含んでいて, Φ の元 σ は $\hat{\mathbb{F}}_2/\hat{\mathbb{F}}_2' = \hat{\mathbb{Z}}^2$ に λ 倍で作用する. ($\sim$ は $\hat{\mathbb{F}}_2$ 内の共役).

$$\Phi = \left\{ \sigma \in \text{Aut } \hat{\mathbb{F}}_2 \mid \begin{array}{l} \sigma x \sim x^\lambda \\ \sigma y \sim y^\lambda \end{array}, \sigma z \sim z^\lambda \quad \exists \lambda \in \hat{\mathbb{Z}}^\times \right\}$$

$\cup$

GT

$\cup$

$G_{\mathbb{Q}}$

$$\sigma.(\overline{x, y}) = B'_\sigma(\overline{x, y}) \quad (\hat{\mathbb{F}}_2'/\hat{\mathbb{F}}_2'' \text{ で})$$

$$B'_\sigma \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]^\times,$$

におき B'_σ を定義し, 更に

$$B'_\sigma = \frac{x^\lambda - 1}{x - 1} \cdot \frac{y^\lambda - 1}{y - 1} B_\sigma \quad \text{におき } B_\sigma \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]^\times$$

を定め, $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ 上の同族をみる. このとき,

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \longrightarrow & \text{Fct}((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2, \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}_{ab}) \\ \psi & & \downarrow \\ \sigma & \longrightarrow & B_\sigma \end{array}$$

は 1-cocycle になる. $B_{\sigma\tau}(s, t) = B_\sigma(s, t) B_\tau(\lambda_\sigma s, \lambda_\sigma t)$.

又 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ のとき $B_\sigma(s, t)$ は G-Anderson の定義 (た [A] hyper-adelic beta 関数) と一致する.

§3 (以下の Prop は GT の条件 (i)(ii), Th は (iii) と, 2n2h, はほぼ対称的)

Proposition $\sigma \in GT$ とするとき,

(i) $B_\sigma(s, 0) = B_\sigma(0, t) = 1 \otimes 1,$

(i)' $B_\sigma(s, -s) = \lambda \otimes \frac{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}}{e^{i\pi s\lambda} - e^{-i\pi s\lambda}}; \quad \lambda = \lambda(\sigma), s \neq 0$

(ii) $B_\sigma(s_1, s_2) = B_\sigma(s_2, s_1)$

(iii) $B_\sigma(s_1, s_2) B_\sigma(s_3, -s_3)$ は $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ の上で

S_3 -対称である.

主な結果:

Theorem $\sigma \in GT$ なら $B_\sigma(s_1, s_2) B_\sigma(s_1 + s_2, s_3)$ は S_3 -対称.

(これは次と同値である):

$B_\sigma(s_1, s_2) B_\sigma(s_3, s_4) B_\sigma(s_1 + s_2, s_3 + s_4)$ は $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0$ の上で S_4 -対称)

一方, $G_{\mathbb{Q}}$ の元に関しては更に, 次の結果が知られている.

Theorem (G.W. Anderson [A]) $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ なら

$$B_{\sigma}(s_1, s_2) = \frac{\Gamma_{\sigma}(s_1) \Gamma_{\sigma}(s_2)}{\Gamma_{\sigma}(s_1 + s_2)}$$

($\Gamma_{\sigma} \in \text{Fct}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}; \hat{W} \otimes \mathbb{Q}_{al})$, ただし $\hat{W} = \prod_p W(\bar{\mathbb{F}}_p)$, $W(\bar{\mathbb{F}}_p)$ は $\bar{\mathbb{F}}_p$ 上の Witt vectors の環) と分解し, 更に等分公式

$$(*) \quad \prod_{i \pmod{N}} \Gamma_{\sigma}\left(\frac{s+i}{N}\right) = \Gamma_{\sigma}(s) \prod_{i \pmod{N}} \Gamma_{\sigma}\left(\frac{i}{N}\right) (1 \otimes (N^{-\langle s \rangle})^{\sigma-1})$$

が任意の自然数 N に対して成立つ.

このうち, はじめの “ Γ 型分解” は 前頁の定理の帰結で, 従って $\sigma \in GT$ でも成立つ (Γ_{σ} のよい正規化は別問題として) が, 後半の等分公式までもが ($M_{0,4} \hookrightarrow M_{0,5}$ と関連した幾何学的条件において定義される群) GT の任意の元 σ に対して成立つと考えるのは無理がある. 又, ここでは述べないが, $\sigma \rightarrow B_{\sigma}$ の pro- ℓ 版における $G_{\mathbb{Q}}$ の像の研究 [Ic-K] と GT , 重の場合の考察からも, 多分 $G_{\mathbb{Q}} \subsetneq GT$ であり, B_{σ} ($\sigma \in GT, \sigma \notin G_{\mathbb{Q}}$) は (*) を満たさないことが推測される.

§4 定理の証明の概要

群 GT は $\hat{B}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$ に, $\sigma = (\lambda, f) \in GT$:

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_1^\lambda, \quad \sigma_i \rightarrow f(y_i, \sigma_i^2)^{-1} \sigma_i^\lambda f(y_i, \sigma_i^2) \quad (2 \leq i \leq n-1)$$

と作用する (DJ [IKM]). n によって

$$y_i \rightarrow y_i^\lambda, \quad \omega_n \rightarrow \omega_n^\lambda, \quad (2 \leq i \leq n) \text{ だから,}$$

この作用は, $\hat{B}_n^*, \hat{P}_n^*$ への作用を引き起こし, $\hat{B}_n^*$ に $\hat{P}_4^*, \hat{P}_5^*$ に作用する. $\hat{P}_4^*$ への作用が $\hat{F}_2$ への作用であり, n が $\hat{P}_5^*$ への作用に延びることを用いて定理の等式を示すのである.

まず $\hat{P}_4^* = \hat{F}_2 = \langle x, y \rangle$;

$$\begin{aligned} x_{12}^* &= x_{34}^* = x, & x_{13}^* &= x_{24}^* = z \\ x_{23}^* &= x_{14}^* = y, & & \end{aligned} \quad (xyz = 1)$$

次の完全系列を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} & \hat{F}_3 & & \hat{P} & & \hat{F}_2 & \\ & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\ 1 & \rightarrow N & \rightarrow & \hat{P}_5^* & \rightarrow & \hat{P}_4^* & \rightarrow 1 \\ & \parallel & & & & & \\ & \langle x_{15}^*, x_{25}^*, x_{35}^*, x_{45}^* \rangle & & & & & \\ & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & & \\ & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & & \end{array}$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$$

GT の $\hat{P}_5^* / \hat{P}_5^*$ への

作用を考えたのではダメ (3次元空間をうまくつかえなかった).

N' / N への作用を考える.

また GT の任意の元 $\sigma = (\lambda, f)$ をとり, 簡単のため $\lambda = 1$ とする. N の作用は

$$\begin{aligned} t_4 &\rightarrow t_4, & t_3 &\rightarrow f(t_4, t_3)^{-1} t_3 f(t_4, t_3), \\ t_2 &\rightarrow g t_2 g^{-1}, & t_1 &\rightarrow g f(t_2, t_1)^{-1} t_1 f(t_2, t_1) g^{-1}, \end{aligned}$$

ただし $g = f(t_1 t_2, t_4) f(t_2, t_4^*) \in (N, \mathbb{R}) = (N, N)$.

σ は $N/N' \cong \hat{\mathbb{Z}}^3$ に自明に作用する. $\mathcal{C} = \hat{\mathbb{Z}}[[N/N']]$ とおくと, σ は N/N'' に $\mathcal{C}$ -加群としての自己同型として作用する. $\mathcal{C}$ の全商環を K とおくと, $V := N/N' \otimes K$ は K 上階数 2 の free module で, $(\overline{t_2}, \overline{t_1}), (\overline{t_4}, \overline{t_3})$ を底に持つ. 以上の元 σ の作用は

$$\sigma(\overline{t_2}, \overline{t_1}) = \alpha_\sigma(\overline{t_2}, \overline{t_1}), \quad \sigma(\overline{t_4}, \overline{t_3}) = \beta_\sigma(\overline{t_4}, \overline{t_3}),$$

ここで $\mathcal{C} \hookrightarrow \text{Fct}\left\{\{(t_1, t_2, t_3, t_4) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^4, \sum_i t_i = 0\}, \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}_{ab}\right\}$ と見るとき,

$$\alpha_\sigma = B_\sigma(t_2, t_1), \quad \beta_\sigma = B_\sigma(t_4, t_3) \in \mathcal{C}.$$

ところが, 以下に見るように, $\det(\sigma|_V) = \alpha_\sigma \beta_\sigma \in \mathcal{C}$ は S_4 -対称. 即ち $B_\sigma(t_2, t_1) B_\sigma(t_4, t_3)$ は $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$ の上で S_4 -対称. したがって (Prop 9.4.7) T_h と同値.

[$\det(\sigma|_V)$ の S_4 -対称性の理由]

(i) $(GT)_{\lambda=1} \curvearrowright B_5^*/(P_5^*)'$ は自明な作用である.

(ii) $P_5^* \sim B_5^*$ (の元による) conjugation の作用と $(GT)_\lambda = 1$ の元による作用は, mod $\text{Int}(P_5^{*'})$ で互いに可換.

(iii) $(\rho, N) = N'$.

よって (i) ~ (iii) より, $\text{Int } P$ は N/N' に自明に作用し, 従って V には K -linear に作用. よって $\text{Int } P'$ の V への作用の determinant = 1.

[文献]

- [A] G. W. Anderson, The hyperadelic gamma function,
Inv. math 95 (1989), 63-131
- [D] V. G. Drinfeld, On quasi-triangular quasi-Hopf algebras
and some group closely associated with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.
Algebra i Analiz 2 (1990) 114-148.
英訳 Leningrad Math J. 2 (1991), 829-860.
- [Ic-K] H. Ichimura, M. Kaneko, On the universal power series for
Jacobi sums and the Vandiver conjecture, J. Number Theory
31 (1989), 312-334
- [Ih] Y. Ihara, Braids, Galois groups and some arithmetic functions,
Proc ICM, Kyoto 1990, Vol 1, 99-120
- [Ih-M] Y. Ihara, M. Matsumoto, On Galois actions on profinite
completions of braid groups, Contemp. Math 186 (1993),
173-200