

1 次元反射壁 Markov 過程の 確率微分方程式による構成

東大 理 田 中 洋

§1. 序.

$R_+ = [0, \infty)$ 上の反射壁 Brown 運動の構成法としては、例えば、(1) 折返し (R^1 上の Brown 運動の絶対値をとる操作) によるもの、(2) infimum process を用いるもの、(3) Skorohod の確率微分方程式によるもの、等とあげることが出来る。一方、paths が不連続な Markov 過程、例えば安定過程の場合には、渡辺信三氏 [5]、Elliott [2] の研究があり、これらの研究からわかることであるが、一般に paths が不連続の場合は R_+ での反射壁過程の構成として (1) の方法は通用しない。実際、[5] にあって R_+ での反射壁安定過程の paths は (2) の方法によって構成されている。このノートでは、不連続な Markov 過程でとくに確率微分方程式の解として与えられる場合について、(3) の Skorohod の方法の拡張を与える。この方法は、最初に与えられた確率微分方程式が定数係数の場合、すなわち、Lévy 過程の場合には、(2) の方法に他ならないことがわかる。

多次元で不連続 paths の場合でも, ここでの方法の拡張として, 境界条件をもつ Markov 過程を確率微分方程式を用いて構成することがある程度可能と思われるが, これについては後述する. 境界以外で paths が連続な場合のこのような研究については, 池田氏 [1] および最近の渡辺信三氏 [6] の結果がある.

§2. 不連続 paths の場合の Skorohod's equation.

Skorohod の確率微分方程式 ([4] [3] ~~[5]~~) は paths が連続な場合である. これを paths が不連続な場合に拡張する.

$R_+ \times R^1$ の Borel 集合 A に対して, $\lambda(A) = \int_A |u|^{-2} dt du$ とおく. $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を適当な確率空間とし, ω の上で定義された 1 次元 Brown 運動 $\beta(t)$ ($\beta(0) = 0$ とおく) および測度 λ に対応する Poisson 加法系 $\{p(A)\}$ を考へる. そして, Brown 運動 $\beta(t)$ と Poisson 加法系 $\{p(A)\}$ とは独立であると仮定する. $\lambda(A) < \infty$ であるような A に対して $g(A) = p(A) - \lambda(A)$ とおく. さらに $t \in R_+$ に対し $\mathcal{B}_t = \sigma\{\beta(s), p(A) : 0 \leq s \leq t, A \in [0, t] \times R^1\}$ とおく.

一般に, $x(t)$ を R_+ の中へ値をもつ確率過程で, paths が右連続かつ左極限をもつものとするとき, 次の条件を満たす $\varphi(t)$ を $x(t)$ に対応する increasing functional と呼ぶことにする.

(i) $\varphi(t)$ は右連続, 単調非減少, $\varphi(0) = 0$.

- (ii) $x(t) > 0$ かつ $x(t-) > 0$ であるような時刻 $t > 0$ においては, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $\varphi(t-\varepsilon) = \varphi(t+\varepsilon)$.
- (iii) $x(t) > 0$ であるような時刻 t においては $\varphi(\cdot)$ は連続.

今, R_+ において定義された実数値 Borel 函数 $a(x)$, $b(x)$, および $R_+ \times R^1$ において定義された実数値 Borel 函数 $c(x, u)$ が与えられたとして, 次のような確率微分方程式を考える.

$$(I) \quad \begin{aligned} x(t) = & x + \int_0^t a(x(s)) d\beta(s) + \int_0^t b(x(s)) ds \\ & + \int_0^t \int_{|u| \leq 1} c(x(s), u) f(ds du) + \int_0^t \int_{|u| > 1} c(x(s), u) p(ds du) + \varphi(t) \end{aligned}$$

ただし, $x(t)$ と共に $\varphi(t)$ も未知であるとして次の条件を与えるものとする:

- $$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad x(t) \text{ は右連続, 左極限をもつ, } x(t) \geq 0. \text{ かつ任意の } t \text{ に対して } x(t) \text{ は } \mathcal{B}_t\text{-可測である.} \\ (b) \quad \varphi(t) \text{ は } x(t) \text{ に対応する increasing functional である.} \end{array} \right.$$

方程式 (I) の解の存在と一意性を示すために, 係数 a , b , c に対して次のような仮定をおく.

仮定 A (i) ある定数 K が存在して

$$\begin{aligned} & |a(x) - a(y)|^2 + |b(x) - b(y)|^2 \\ & + \int_{|u| \leq 1} |c(x, u) - c(y, u)|^2 \frac{du}{|u|^2} \leq K^2 |x - y|^2 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \int_{|u| \leq 1} |c(x, u)|^2 \frac{du}{|u|^2} < \infty$$

(iii) $c(x, u)$ は $[0, \infty) \times [-1, 1]$ の各コンパクト集合の上で有界.

定理 I. 仮定 A のもとでは, 任意の $x \in R_+$ に対して, 方程式 (I) の解は存在して一意である.

証明はすべて §4 で与えるが, 次の特別な場合をまず証明するので, それを定理と見做しておく. 方程式 (I) の代りに

$$(I_0) \quad \begin{aligned} x(t) = & x + \int_0^t a(x(s)) d\beta(s) + \int_0^t b(x(s)) ds \\ & + \int_0^t \int_{R^1} c(x(s), u) g(ds du) + \varphi(t) \end{aligned}$$

を考へ, 仮定 A の代りに

仮定 A₀. (i) ある定数 K があつて

$$\begin{aligned} & |a(x) - a(y)|^2 + |b(x) - b(y)|^2 \\ & + \int_{R^1} |c(x, u) - c(y, u)|^2 \frac{du}{|u|^2} \leq K^2 |x - y|^2 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad c(x, u) \text{ は有界, } \int_{R^1} |c(x, u)|^2 \frac{du}{|u|^2} < \infty.$$

定理 I₀. 仮定 A₀ のもとで, 任意の $x \in R_+$ に対して, (I₀) の解が存在して一意である. $x(t)$ は初期値 x に対応する (I₀) の解, $y(t)$ は初期値 y に対応する (I₀) の解とすると

$$E\{|x(t) - y(t)|^2\} \leq |x - y|^2 e^{(K^2 + 1)t}.$$

§3. 基本的な補題.

この節では, 前節の定理の証明の基礎となる補題をあげる.

補題 $f(t) \in R_+$ で定義された実数値函数で, 右連続, 左極限をもつ, かつ $f(0) \geq 0$ であるとする. $x(t) \in R_+$ で定義され R_+ の中に値をもつ函数で, 右連続, 左極限をもつものとし, $\varphi(t) \in x(t)$ に対応する increasing functional とする. このとき, もし

$$(3.1) \quad x(t) = f(t) + \varphi(t)$$

であれば,

$$(3.2) \quad x(t) = \begin{cases} f(t) & t < 0 \text{ のとき} \\ f(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} f(s) & t \geq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$(3.3) \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ のとき} \\ -\inf_{0 \leq s \leq t} f(s) & t \geq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし $\sigma = \inf \{t \geq 0 : f(t) < 0\}$.

証明. (3.2) (3.3) で与えられる $x(t)$, $\varphi(t)$ が補題でのべた性質をもつ, かつ (3.1) をみたすことは容易にわかる. ゆえに, 補題の中でのべた性質をもつ (3.1) の解が一意的であることと証明すれば十分である.

$(x(t), \varphi(t))$, $(y(t), \hat{\varphi}(t))$ をまた (3.1) の解で, 補題でのべた性質をもつものとする. $\psi(t) = \varphi(t) - \hat{\varphi}(t)$ とおき, $\psi(t)$ の連続部分を $\psi_0(t)$, 不連続部分を $\psi_1(t)$ とする. すなわち,

$$\psi_1(t) = \sum_{0 \leq \tau \leq t} \{\psi(\tau) - \psi(\tau-)\}, \quad \psi_0(t) = \psi(t) - \psi_1(t).$$

$x(t), y(t)$ が (3.1) の解であることから

$$\begin{aligned} (x(t) - y(t))^2 &= \psi(t)^2 = \int_0^t \int_0^t \psi(dt_1) \psi(dt_2) \\ &= \iint_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t} \psi(dt_1) \psi(dt_2) + \iint_{0 \leq t_2 \leq t_1 \leq t} \psi(dt_1) \psi(dt_2) \\ &\quad - \sum_{0 \leq \tau \leq t} (\psi(\tau) - \psi(\tau-))^2 \leq 2 \int_0^t \psi(s) \psi(ds) \\ &= 2 \int_0^t \psi(s) \psi_0(ds) + 2 \sum_{0 \leq s \leq t} \psi(s) \{ \psi(s) - \psi(s-) \}. \end{aligned}$$

もし $\psi(s) > 0$ ならば, $x(s) > 0$, したがって, $\psi(s) - \psi(s-) \leq 0$.
 (これは?)

$$(x(t) - y(t))^2 \leq 2 \int_0^t \psi(s) \psi_0(ds).$$

今, $I^+ = [0, t] \cap \{s: \psi(s) > 0\}$, $I^- = [0, t] \cap \{s: \psi(s) < 0\}$

とすると

$$(3.4) \quad (x(t) - y(t))^2 \leq 2 \int_{I^+} \psi(s) \psi_0(ds) + 2 \int_{I^-} \psi(s) \psi_0(ds).$$

よって

$$I_1^+ = I^+ \cap \{s: x(s) > 0, x(s-) > 0\}$$

$$I_2^+ = I^+ \cap \{s: x(s) > 0, x(s-) = 0\}$$

とすると, $I^+ = I_1^+ \cup I_2^+$ である. さらに increasing functional の性質によつて, $\psi_0(\cdot)$ は I_1^+ のある近傍において, 単調非増大, I_2^+ は (高々) 可算集合であることがわかる.

$$\text{よって} \quad \int_{I_1^+} \psi(s) \psi_0(ds) \leq 0, \quad \int_{I_2^+} \psi(s) \psi_0(ds) = 0.$$

ゆえに
$$\int_{I^+} \psi(s) \psi_0(ds) \leq 0.$$

全く同様に
$$\int_{I^-} \psi(s) \psi_0(ds) \leq 0.$$

(7) によって, (3.4) より $(x(t) - y(t))^2 \leq 0$ を得る.

§4. 定理の証明.

補題. $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ を σ -fields の増大族とし, $M_1(t)$, $M_2(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $X_1(t)$, $X_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ はどれも有界な確率過程で, $\{\mathcal{F}_t\}$ に適合してあり, おつ paths は右連続, 左極限をもつものとする. さらに, $M_1(t)$, $M_2(t)$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ につき martingales で, $A_1(t)$, $A_2(t)$ は有界変動過程で, total variations も有界であるとする. $X_1(t)$, $X_2(t)$ は非負であるとして, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ はそれぞれ $X_1(t)$, $X_2(t)$ の increasing functionals であるとする. このとき, も

$$X_1(t) = M_1(t) + A_1(t) + \varphi_1(t) \quad \text{a.s.}$$

$$X_2(t) = M_2(t) + A_2(t) + \varphi_2(t) \quad \text{a.s.}$$

である,

$$\begin{aligned} E\{|X_1(t) - X_2(t)|^2\} &\leq E\{|M_1(t) - M_2(t)|^2\} \\ &\quad + 2 E\left\{\int_0^t (X_1(s) - X_2(s))(A_1 - A_2)(ds)\right\} \end{aligned}$$

が成立する.

証明.

$$X(t) = X_1(t) - X_2(t)$$

$$M(t) = M_1(t) - M_2(t)$$

$$A(t) = A_1(t) - A_2(t)$$

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$$

$$\tilde{\varphi}(t) = A(t) + \varphi(t)$$

とあると, $\tilde{\varphi}(t)^2 \leq 2 \int_0^t \tilde{\varphi}(s) \tilde{\varphi}(ds)$.

$$\begin{aligned} M(t) \tilde{\varphi}(t) &= \int_0^t M(t) \tilde{\varphi}(ds) \\ &= \int_0^t M(s) \tilde{\varphi}(ds) + \int_0^t \{M(t) - M(s)\} \tilde{\varphi}(ds). \end{aligned}$$

したがって,
$$\begin{aligned} X(t)^2 &= M(t)^2 + 2M(t) \tilde{\varphi}(t) + \tilde{\varphi}(t)^2 \\ &\leq M(t)^2 + 2 \int_0^t X(s) \tilde{\varphi}(ds) \\ &\quad + \int_0^t \{M(t) - M(s)\} \tilde{\varphi}(ds) \end{aligned}$$

前節の補題の証明と同様に

$$\int_0^t X(s) \varphi(ds) \leq 0$$

が示されるから

$$(4.1) \quad X(t) \leq M(t)^2 + 2 \int_0^t X(s) A(ds) + \int_0^t \{M(t) - M(s)\} \tilde{\varphi}(ds)$$

$M(t)$ は martingale であるから

$$E \left\{ \int_0^t (M(t) - M(s)) \tilde{\varphi}(ds) \right\} = 0,$$

したがって (4.1) の両辺の平均をとると

$$E \{ X(t)^2 \} \leq E \{ M(t)^2 \} + 2 E \left\{ \int_0^t X(s) A(ds) \right\}.$$

定理 I. の証明 逐次近似法による.

$$x_0(t) \equiv x$$

とあき, 一般に $x_n(t)$ が定義されたとき, $x_{n+1}(t)$ を

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) = & x + \int_0^t a(x_n(s)) d\beta(s) + \int_0^t b(x_n(s)) ds \\ & + \int_0^t \int_{R^1} c(x_n(s), u) f(ds du) + y_{n+1}(t) \end{aligned}$$

によ, z 定義する. したがって $x_{n+1}(t) \geq 0$ とし, $y_{n+1}(t)$ は $x_{n+1}(t)$ の increasing functional とする. 前節の補題によ, z , β のような $x_{n+1}(t)$, $y_{n+1}(t)$ は一意に定まる.

$$z_{n+1}(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$$

$$\begin{aligned} M_n(t) = & \int_0^t \{a(x_n(s)) - a(x_{n-1}(s))\} d\beta(s) \\ & + \int_0^t \int_{R^1} \{c(x_n(s), u) - c(x_{n-1}(s), u)\} f(ds du) \end{aligned}$$

とあくと, この節の補題によ, z (*)

$$\begin{aligned} E\{|z_{n+1}(t)|^2\} & \leq E\{M_n(t)^2\} + 2 \int_0^t E\{z_{n+1}(s) \{b(x_n(s)) - b(x_{n-1}(s))\}\} ds \\ & \leq E\{M_n(t)^2\} + \int_0^t E\{|z_{n+1}(s)|^2\} ds + \int_0^t E\{|b(x_n(s)) - b(x_{n-1}(s))|^2\} ds \end{aligned}$$

(*) 補題においては, z に出てくる確率過程がすべて有界であったので, 先ず次のような truncation が必要である. stopping time T で, 今関係している確率過程がすべて $[0, T]$ において有界となるものを取り, t, s の代りに $t \wedge T, s \wedge T$ とあきかえて, 補題を適用し, 最後の式(次頁の (4.2))において, $T \uparrow \infty$ とする.

$$\leq K^2 \int_0^t E|z_n(s)|^2 ds + \int_0^t E|z_{n+1}(s)|^2 ds$$

したがって

$$E|z_{n+1}(t)|^2 \leq K^2 \int_0^t E|z_n(s)|^2 ds \cdot e^t.$$

これより, $0 \leq t \leq t_0$ (t_0 は任意) なる t に対し

$$(4.2) \quad E|z_{n+1}(t)|^2 \leq \frac{(K^2 e^t)^n t^{n+1}}{(n+1)!} K^2 x^2 e^{t_0}$$

よって

$$y_n(t) = \int_0^t a(x_n(s)) d\beta(s) + \int_0^t b(x_n(s)) ds \\ + \int_0^t \int_{R^1} c(x_n(s), u) g(ds du)$$

とあると, Chebyshev の不等式, submartingale に関する Doob の不等式を用いて

$$P\{y_n(t) \text{ converges uniformly on each compact } t\text{-interval}\} = 1.$$

したがって

$$P\{x_n(t) \rightarrow x(t) \text{ uniformly on each compact } t\text{-interval}\} = 1$$

$$P\{\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t) \text{ uniformly on each compact } t\text{-interval}\} = 1$$

であるような $x(t)$, $\varphi(t)$ があり, これが方程式 (I_0) の解であることは容易にわかる.

一意性の証明: $(x(t), \varphi(t)), (y(t), \psi(t))$ 共に (I_0) の解であれば, 存在証明の場合と同様な計算で

$$E|x(t) - y(t)|^2 \leq (K^2 + 1) \int_0^t E|x(s) - y(s)|^2 ds$$

これより

$$E|x(t) - y(t)|^2 = 0.$$

定理 I_0 の後半の部分も今までと同様な計算で容易にわかる。

定理 I は定理 I_0 を用いて証明されるわけであるが、単なる技術的部分が多いので省略する。

§5. 方程式 (I) の解が定める Markov 過程

仮定 A のもとで方程式 (I) の解が一意的に存在する。初期値を添数とする解の族から R_+ を state space とする Markov 過程が定義される。この事情は通常の確率微分方程式の場合と全く同じである。この Markov 過程を方程式 (I) から定まる R_+ における反射壁 Markov 過程と呼ぶことにする。方程式 (I_0) に対しても、同様なことをする。定理 I_0 の後半の評価式からわかるように、仮定 A_0 のもとで (I_0) から定まる反射壁 Markov 過程は Feller 過程である。

generator についてふれておく。以下 $a(x), b(x), c(x, u)$ は仮定 A_0 をみたし、かつ $a(x), b(x)$ は有界であるとする。このとき方程式 (I_0) が定める反射壁 Markov 過程を $X = \{x(t), P_x\}$ とし、その semigroup を T_t とする。 $C_0(R_+)$ を R_+ において連続で $x \rightarrow \infty$ のとき 0 に tend するような函数全体のなる Banach 空間 (max ノルム) とすると、 T_t は $C_0(R_+)$ の上の強連続な semigroup になる。この Hille-Yosida の意味での generator を A とする。次に $\mathcal{D}_0$ を、コンパクト supports をもつ $C^2(R_+)$

の函数 f で $f'(0) = f''(0) = 0$ (右微分!) をみたすものの全体

とし, $f \in \mathcal{D}_0$ に対して $\bar{f}(x) = f(x \vee 0)$, $x \in R^1$, とおく.

$a(x)$, $b(x)$, $c(x, u)$ を $x < 0$ に対して次のように拡張する:

$$\bar{a}(x) = a(x \vee 0), \quad \bar{b}(x) = b(x \vee 0), \quad \bar{c}(x, u) = c(x \vee 0, u).$$

そして

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = x &+ \int_0^t \bar{a}(\bar{x}(s)) d\beta(s) + \int_0^t \bar{b}(\bar{x}(s)) ds \\ &+ \int_0^t \int_{R^1} \bar{c}(\bar{x}(s), u) \delta(ds du), \quad x \in R^1 \end{aligned} \quad (\bar{I}_0)$$

が定める R^1 上の Markov 過程 $\bar{X} = \{\bar{x}(t), \bar{P}_x, x \in R^1\}$ と

し, $\bar{\sigma} = \inf\{t > 0 : \bar{x}(t) \leq 0\}$ とおく.

$f \in \mathcal{D}_0$ ならば $\bar{f} \in C^2(R^1)$ であるから, 確率積分の変換公式を用いることにより, $\bar{f}$ は $\bar{X}$ の generator をほとんどこした形は計算出来て,

$$\begin{aligned} (\bar{\mathcal{L}} \bar{f})(x) = & \frac{1}{2} \bar{a}(x)^2 \bar{f}''(x) + \bar{b}(x) \bar{f}'(x) \\ & + \int_{R^1} \{\bar{f}(x + \bar{c}(x, u)) - \bar{f}(x) - \bar{c}(x, u) \bar{f}'(x)\} \frac{du}{|u|^2} \end{aligned}$$

で与えられる. そして Dynkin の公式により, $x > 0$ に対して

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\bar{E}_x \{\bar{f}(\bar{x}(\bar{\sigma} \wedge t))\} - \bar{f}(x)}{\bar{E}_x \{\bar{\sigma} \wedge t\}} = (\bar{\mathcal{L}} \bar{f})(x).$$

一方 $\sigma = \inf\{t > 0 : x(t) = 0\}$ とおくと, $x > 0$ に対して

$$\bar{E}_x \{\bar{\sigma} \wedge t\} = E_x \{\sigma \wedge t\}, \quad \bar{E}_x \{\bar{f}(\bar{x}(\bar{\sigma} \wedge t))\} = E_x \{f(x(\sigma \wedge t))\}$$

が成り立つから, $x > 0$ に対す

$$(5.1) \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{E_x \{ f(x(\sigma \wedge t)) \} - f(x)}{E_x \{ \sigma \wedge t \}} = (\overline{\sigma f})(x).$$

今 $\mathcal{Q}_1 \subset C_0(R^1)$ の函数 f で (5.1) の左辺の極限が任意の $x > 0$ に対す存在し, かつその極限を $g(x)$ としたとき $g(x)$ が次の条件 (5.2) (5.3) をみたすような f の全体とする:

$$\left\{ \begin{array}{l} (5.2) \quad g(x) \text{ は } x=0 \text{ まで連続的に拡張出来て, その拡張を } \sigma f \text{ としたとき } \sigma f \in C_0(R_+). \\ (5.3) \quad f \text{ が } x \in R_+ \text{ において最大値をとれば } (\sigma f)(x) \leq 0, \\ \text{かつ } -f \text{ が } y \in R_+ \text{ で最大値をとれば } (\sigma f)(y) \geq 0. \end{array} \right.$$

このとき Dynkin の公式により $\mathcal{Q}(A) \subset \mathcal{Q}_1$, また (5.1) と σf の形より $\mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{Q}_1$ がわかる. ところで $\mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{Q}(A)$ を証明しよう. そのためには $\mathcal{Q}(A) = \mathcal{Q}_1$ を示せば十分である.

$\alpha > 0$ とすると $\alpha - A$ は $\mathcal{Q}(A)$ から $C_0(R_+)$ の上への 1-1 写像を与える. 一方 $\alpha - \sigma$ は $\alpha - A$ の拡張であり, (5.3) を用いると $\mathcal{Q}_1$ から $C_0(R_+)$ への 1-1 写像を与えることがわかる. したがって $\mathcal{Q}(A) = \mathcal{Q}_1$ であることがわかる.

$\mathcal{Q}(A)$ を明確に定める問題はまだ残っているが, 以上の考察から $f \in \mathcal{Q}_0$ に対すは Af の形を与えることが出来る.

$$n(x, \Gamma) = \int_{\{u: x + c(x, u) \in \Gamma\}} \frac{du}{|u|^2}, \quad x > 0, \Gamma \in \mathcal{B}(R^1)$$

とおく.

定理 II (*) $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}(A)$ であらう, $f \in \mathcal{D}_0$ ならば, $x > 0$

に対して

$$\begin{aligned} (Af)(x) = & \frac{1}{2} a(x)^2 f''(x) + b(x) f'(x) \\ & + \int_{(0, \infty)} \{f(y) - f(x) - (y-x) f'(x)\} n(x, dy) \\ & + (f(0) - f(x)) n(x, (-\infty, 0]) + f'(x) \int_{(-\infty, 0]} (y-x) n(x, dy). \end{aligned}$$

引用文献

- [1] N. Ikeda: On the construction of two-dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problems. Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. 33(1961), 367-427.
- [2] J. Elliott: The boundary value problems and semigroups associated with certain integro-differential operators. Trans. Amer. Math. Soc., 76(1954), 300-331.
- [3] H. P. McKean: A Skorohod's integral equation for a reflecting barrier diffusion. J. Math. Kyoto Univ., 3(1963), 86-88.
- [4] A. V. Skorohod: Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region 1, 2. Teor. Veroyat. 6(1961), 249-274; 7(1962), 3-23.
- [5] S. Watanabe: On stable processes with boundary conditions. J. Math. Soc. Jap. 14(1962), 170-198.
- [6] S. Watanabe: On stochastic differential equations for multi-dimensional diffusion processes with boundary conditions. (to appear)

(*) (追加) この定理は次の枠に述べた方がよい.

$C_0[-\infty, \infty)$ を R^1 において定義された実数値連続函数で, $x \rightarrow \infty$ のとき 0 に tend し, $x \rightarrow -\infty$ のとき有限な極限値をもつようなもの全体のなす Banach 空間 (max ノルム) とする. X の semigroup T_t は $C_0[-\infty, \infty)$ 上の強連続半群になる. $C_0[-\infty, \infty)$ における T_t の generator を A とする. R_+ において定義された函数 f が, $\bar{f} \in \mathcal{D}(A)$ となり得るならば, $f \in \mathcal{D}(A)$ であらう, $(Af)(x) = (A\bar{f})(x)$, $x \in R_+$.