

球面上の S^3 -主バンドルのホモトピー同値類群

東工大理 笹尾 靖也 (Seiya Sasao)

位相空間 X から X へのホモトピー同値写像のホモトピー類はコンポジットを積として群をつくるから、この群を記号 $\mathcal{E}(X)$ で表わす。この群は一般に可換群でないので、その群の構造を決定することが困難である。多くの研究者によって、特別な性質をもった、あるいは具体的な空間によってこの群の構造の研究がおこなわれているが、本講も、空間 X が、 S^n 上の S^3 -主バンドルの全空間の場合に、 $\mathcal{E}(X)$ の構造を考察することを目標とする。この場合には、群 S^3 が X に自由に作用しているので、この点を利用して考えようという特徴がある。

$p: X \rightarrow S^n$ を特異類 α ($\in \pi_{n-1}(S^3)$) とある S^3 -主バンドルをしよう ($n \geq 6$)。 X が CW-分割:

$$X = S^3 \cup e^n \cup e^{n+3}, \quad A = S^3 \cup e^n$$

をもっていることは明らかである。他方、上記ファイバー空

間より次のフスバ-空間が得られることはよく知られている。

$$p^X : X^X \longrightarrow S^{nX}$$

==で一般に X^T は T から X への連続写像の空間で、コンパクト-開位相を与えられるものである。 X^X は S^{nX} の基点として、それぞれ、 1_X 及び p をえらぶこととする。 以下の完全系列が得られる：

$$\pi_1(X^X, 1_X) \longrightarrow \pi_1(S^{nX}, p) \longrightarrow \pi_0(p^{-1}(p), 1_X) \longrightarrow \pi_0(X^X, 1_X) \longrightarrow \pi_0(S^{nX}, p)$$

==で $p^{-1}(p)$ は空間 S^{3X} と同一視でき、更に S^{3X} に次の種を導入する：

$$f \star g(x) = f(g(x) \cdot x) \cdot g(x) \quad , \quad f, g \in \pi_0(S^{nX}, p)$$

するとこの種によって、 S^{3X} と $p^{-1}(p)$ は半群として同型になるから $\pi_0(p^{-1}(p), 1_X)$ と $\pi_0(S^{3X}, *)$ は半群として同型である。 一般の半群 G に対して、その正則元全体がつくる群を $\text{reg. } G$ とかくことにしよう。 すると以上の考察より、上記完全系列は更に次の完全系列へと変身する。

$$\pi_1(X^X, 1_X) \longrightarrow \pi_1(S^{nX}, p) \longrightarrow \text{reg. } [X, S^3] \longrightarrow \varepsilon(X) \longrightarrow \pi_0(S^{nX}, p)$$

これから我々の関心は

$$(1) \quad \varepsilon(X) \longrightarrow \pi_0(S^{nX}, p) \text{ の像を決定する}$$

$$(2) \quad \pi_1(S^{nX}, p) \longrightarrow \text{reg. } [X, S^3] \text{ の像を決定する}$$

の2つになる。 しかし、このためには、それぞれの群や集合をよく知られた概念で表わさねばならない。

命題 1. $E(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ について次の事項が成立する。

(1) onto 写像である。もし $2\xi=0$ ならば。

(2) $1 \times \mathbb{Z}_2$ への onto 写像である。それ以外の場合、

次に $E_+(X)$ を考察する。次の diagram を考えよう。

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \pi_{n+3}(S^n) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \times \pi_{n+3}(S^n) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 1 & \longrightarrow & E_+(X) & \longrightarrow & E(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \wedge \mathbb{Z}_2 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 1 & \longrightarrow & \text{reg.}[X, S^3]_0 & \longrightarrow & \text{reg.}[X, S^3] & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & & \pi_1(S^{nX}, p) & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & & \pi_1(X^X, 1_X) & & & &
 \end{array}$$

命題 2. $E_+(X)$ の $\pi_{n+3}(S^n)$ への像について次のことがいえる。

(1) $2\xi=0$ ならば

$$\pi_{n+3}(S^n) \supset \{ \alpha \mid \xi \circ E^{-1}\alpha \in \{ \tau \circ E^3 \} \} = G_\xi$$

(2) それ以外ならば

$$\pi_{n+3}(S^n) \supset \{ \alpha \mid \xi_0 \in \alpha = 0 \} = G_\xi$$

ここで τ は Blaker-Massey 写像: $S^6 \rightarrow S^3$ である。

次に $[X, S^3]$ を考察しよう。 $[X, S^3]$ の積の定義を考
えてみると, $f \in [X, S^3]$ が $\text{reg.}[X, S^3]$ に入るためには
ある $g \in [X, S^3]$ があって

$$d_3(f)(d_3(g)+1) + d_3(g) = 0$$

が成り立たなければならない。つまり

$$(d_3(f)+1)(d_3(g)+1) = 1$$

となって, $d_3(f) = 0 = d_3(g)$ 又は $d_3(f) = -2 = d_3(g)$
でなければならない。更に $d_3(f) = -2$ の場合を考えてみ
ると次のことがわかる。

命題3. $f \in [X, S^3]$ のとき, 更に $f \in \text{Veg.}[X, S^3]$ と
なる必要十分条件は,

もし $2\xi = 0 = \tau_0 \in \xi$ なら $d_3(f) = 0$ 又は -2 ,

それ以外ならば $d_3(f) = 0$

そして $\text{Veg.}[X, S^3]$ の中で $d_3(f) = 0$ とあるものの部分
群を $\text{Veg.}[X, S^3]$ とかくわけである。(4ページの図)

ところで $[X, S^3]$ をもう少し考えてみる。 $[X, S^n]_f$ と同様に
して, 次の完全系列が得られる。

$$[EX, S^3] \longrightarrow [S^4, S^3] \longrightarrow [S^4 \vee S^{n+3}, S^3] \longrightarrow [X, S^3]_0 \longrightarrow 0$$

ここで最後の矢印は準同型になっていることを注意する。

つまり $[X, S^3]_0 = \text{reg.}[X, S^3]_0$ が成り立つわけである。
 かつ $[S^4, S^3] \rightarrow [S^n, S^3] \times [S^{n+3}, S^3]$ の像がわかれば $\text{reg.}[X, S^3]_0$ が得られることになる。

命題 4. $x \in [S^4, S^3]$ の像は $(x \circ E_3 \times x \circ J_3)$ である。
 最後に $\pi_1(X^X, 1_X) \rightarrow \pi_1(S^{nX}, p)$ の像を決定しなければならない。

命題 5. $\pi_1(S^{nX}, p) \cong \mathbb{Z}_2$

このことは次の完全系列を考慮すれば明らかである。

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(S^{nX}, *) & \rightarrow & \pi_1(S^{nX}, 1_X) & \rightarrow & \pi_1(S^{nX}, p) & \rightarrow & \pi_0(S^{nX}, *) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & & \pi_{n+1}(S^n) \oplus \pi_{n+4}(S^n) & & 0 & & (n \geq 6) \end{array}$$

したがって 1 階同型写像 $\pi_1(X^X, 1_X) \xrightarrow{P_*^X} \pi_1(S^{nX}, p)$ はゼロ写像か onto 写像かのいずれかである。そこで次の図を考える。

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_n(S^3) & & \\ & & \uparrow \partial = \xi \circ E^{-1} & & \\ \mathbb{Z}_2[\eta] \cong \pi_{n+1}(S^n) & & & & \pi_1(X^X, 1_X) \xrightarrow{P_*^X} \pi_1(S^{nX}, p) \cong \mathbb{Z}_2 \\ & & \uparrow P_* & & \downarrow \gamma_* \cong \\ i_{3*} \nearrow \pi_{n+1}(X) & \xrightarrow{\textcircled{1}} & \pi_1(X^A, 1_A) & \xrightarrow{P_*^A} & \pi_1(S^{nA}, p_A) \cong \mathbb{Z}_2 \\ & & \downarrow \textcircled{1} & & \\ \pi_{n+1}(S^3) & \xrightarrow{\textcircled{2}} & \pi_1(S^{3A}, x) & \xrightarrow{\textcircled{3}} & \pi_1(X^{S^3}, i_3) \cong \mathbb{Z}_2[\eta] \\ & & \downarrow \textcircled{2} & & \downarrow \textcircled{1} \\ \mathbb{Z}_2[\eta] \cong \pi_1(S^3, x) & & & & \pi_n(X) \ni i_3 \cdot \eta \cdot E_3 \quad (B-B \text{ Th}) \\ & & \downarrow \textcircled{2} & & \\ \eta \circ E_3 \nearrow \pi_n(S^3) & & & & \end{array}$$

" P_*^X が onto $\Rightarrow P_*^A$ が onto" 又は " P_*^A が zero ならば P_*^X も zero" が成り立つから、やはり P_*^A を考えよう。このとき次のことが成り立つ。(証明を省略する)

命題 6 $\xi \circ \eta \neq 0$ である。

(1) $\eta \circ \xi \notin \{\xi \circ \eta\}$ ならば P_*^A は zero である。なぜならば $\pi_1(X^A, i_A) \rightarrow \pi_1(X^S, i_S)$ が onto であるから。

(2) $\eta \circ \xi = 0$ ならば P_*^A は zero である。これは $\pi_1(S^A, *) \rightarrow \pi_1(X^A, i_A)$ が onto であるから。

(3) $\eta \circ \xi = \xi \circ \eta$ (すなわち $\eta \circ \xi \neq 0$ で " $\eta \circ \xi \in \{\xi \circ \eta\}$ ") のとき P_*^A は onto である。なぜならば、 $\pi_1(X^A, i_A)$ の元で $\pi_1(S^A, *) \rightarrow \pi_1(X^A, i_A)$ の像に 入らないもの があるから。

次に $\xi \circ \eta = 0$ としよう。このとき $\pi_{n+1}(X)$ の元 η_x で $P_*(\eta_x) = \eta$ ($\in \pi_{n+1}(S^n)$) とあるものがある。そこで $\pi_{n+1}(X) \rightarrow \pi_{n+1}(X^A, i_A)$ による η_x の像を $\hat{\eta}_x$ とおこう。

命題 7 $\hat{\eta}_x$ は $\pi_1(X^A, i_A) \rightarrow \pi_1(X^A, i_A)$ の像に含まれるものは Whitehead product $[\eta_x, i_S]$ ($\in \pi_{n+3}(X)$) によって生成される。

証: $[\eta_x, i_S]$ は η_x のセリオに無関係に定まる。 η_x の像は $P_*(\eta_x) = \eta$ のみである。

前節上記命題7を使うと次の命題が得らる。

命題8 $\xi \eta = 0$ とする。

(1) $[u_3, \eta] = 0$ なら P_*^X は onto である。

(2) $[u_3, \eta] \neq 0$ なら P_*^X はゼロ である。

これらを合せて、最終的な結果として次の命題が得らる。

命題9 $\pi_1(X^A, 1_X) \longrightarrow \pi_1(S^n, p)$ によって、

(1) $\xi \eta = 0 = [u_3, \eta] \implies$ onto である。

(2) $\xi \eta = 0 \neq [u_3, \eta] \implies$ ゼロ である。

(3) $\xi \eta \neq 0 \implies$ ゼロ である。 但し $\eta \cdot E \xi = \xi \eta$ を除く。

注意 $0 \neq \xi \eta = \eta \cdot E \xi$ の場合が結局未解決の場合として残った。

具体的な M についての計算は、高次元球面のホモトピー群についての知識により重なるので一般的には困難である。たとえば $M=7$ の場合に J. W. Rutter 氏の完全な結果があるが、巾の巾の一般的な結果から与えられるものと、そのレベルでは一致している。巾の巾の方法は一般的であるために extension の形を決定するのが困難であるが、J. W. Rutter 氏の場合は $M=7$ の特殊性を完全に使うことで、extension を完全に決定している巾である。なお、三村一義氏も巾の巾の場合を考慮し与えられることであるが、これは 条件付き のことである。

Rutter氏や三村一謙氏の方法は Barcus-Bennett の方法を用いるものでゆれゆれの方法とは違っている。ゆれゆれの方法は、更に Barcus-Bennett の方法を組み合わせ、条件付きであるが、ある場合には extension の形を部分的に決めさせてはいる。むしろゆれゆれの定理における extension の形も完全に決定しているものである。

以 上

参 考 文 献

1. Barcus .W.D and M.G.Barratt, On the homotopy classification of the extensions of a fixed map. Tran. Amer. Math. Soc., 88, (1958), 57-74.
2. J.W.Rutter, The group of self-homotopy equivalences of principal three bundles over the seven sphere. Math. Camb. phil. Soc., 84(1978), 303-311.