

実 3 次元上半空間上の保型関数

北海道大学大学院理学研究科 松本圭司 (Keiji Matsumoto)
Division of Mathematics, Graduate School of Science,
Hokkaido University

1 序

上半空間 $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\}$ には $SL_2(\mathbb{R})$ が

$$g \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \tau \in \mathbb{H}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

で作用している。 $SL_2(\mathbb{R})$ のある離散部分群の作用で不変な $\mathbb{H}$ 上の有理型関数はたくさん知られている。

Example 1 *Eisenstein Series*

$$E_k(\tau) = \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}}, \quad (k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$$

定義より $E_k(\tau)$ は上半空間 $\mathbb{H}$ 上の正則関数で

$$E_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{2k} E_k(\tau), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

をみたすことはすぐにわかる。 $E_k(\tau)^m / E_{km}(\tau)$ は $\mathbb{H}$ 上の有理型関数で $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用で不変となる。

Example 2 *Jacobi's theta constants*

$$\vartheta_{a,b}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i(n+a)^2 \tau + 2\pi i(n+a)b)$$

$$(a, b) = (0, 0), (0, 1/2), (1/2, 0)$$

ラムダ関数 $\lambda(\tau) = \vartheta_{0,0}(\tau)^4 / \vartheta_{0,1/2}(\tau)^4$ は $\mathbb{H}$ 上有理型で

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid a-1, b, c, d-1 \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

の作用で不変となる。また、 j 関数

$$j(\tau) = \frac{4}{27} \frac{(1 - \lambda(\tau) + \lambda(\tau)^2)^3}{\lambda(\tau)^2(1 - \lambda(\tau))^2}$$

は $\mathbb{H}$ 上の有理型関数で $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用で不変となる。

Remark 1 $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_2$ は 3 次対称群 S_3 と同型。 $j(\tau)$ は $\lambda(\tau)$ の S_3 不変式となっている。

一方、実 3 次元上半空間

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\}$$

上の実解析的関数で $\mathbb{H}^3$ の自己同型群の離散部分群 Γ の作用で不変となるものはほとんど知られていない。

この講演ではいくつかの離散群 Γ の作用に関して不変な $\mathbb{H}^3$ 上の実解析的関数を具体的に構成する。そしてそれらを並べてできる $\mathbb{H}^3/\Gamma$ から射影空間への写像に対し、像を決定し同相写像であることを紹介する。

2 $\mathbb{H}^3$ に作用する離散群

$\mathbb{H}^3$ の自己同型群は $GL_2(\mathbb{C})$ と involution T で生成されている。また、 $\mathbb{H}^3$ は 3 次元球

$$\mathbb{B}^3 = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \mid t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 < 1\}$$

と同型で $\mathbb{H}^3$ の自己同型群は直交群

$$O_H(\mathbb{R}) = \{g \in GL_4(\mathbb{R}) \mid {}^t g H g = H = \text{diag}(-1, -1, -1, 1)\}$$

をその中心で割った群と同型である。これらの事実を良く理解するには以下の線型空間を考えるとよい。

V を 2×2 Hermite 行列からなる実 4 次元線型空間で 2 次形式 $\det(v)$ が定義されているとする。

$$V = \{v \in M_{\mathbb{C}}(2, 2) \mid v^* = v\}, \quad \det : V \ni v \mapsto \det(v) \in \mathbb{R}.$$

$$V^\times = \{v \in V \mid \det(v) > 0\},$$

$$SV = \{v \in V^\times \mid v > 0, \det(v) = 1\},$$

と定めると $V^\times/\mathbb{R}^\times \simeq SV$ となっている。 $\mathbb{H}^3$ は $V^\times/\mathbb{R}^\times$ と以下の写像により同型となっている:

$$j_1 : \mathbb{H}^3 \ni (z, t) \mapsto \frac{1}{t} \begin{pmatrix} t^2 + |z|^2 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix} \in SV \simeq V^\times/\mathbb{R}^\times.$$

$GL_2^T(\mathbb{C})$ を $GL_2(\mathbb{C})$ と involution T で生成され関係式 $T \cdot g = \bar{g} \cdot T$ をみたす群とする。 $GL_2^T(\mathbb{C})$ は半直積 $GL_2(\mathbb{C}) \rtimes \langle T \rangle$ であり、 $V^\times$ や SV に

$$T \cdot v = {}^t v, \quad g \cdot v = \frac{1}{|\det(g)|^2} g v g^*$$

で作用している。この作用を同型 j_1 を用いて $\mathbb{H}^3$ に誘導すると

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (z, t) \\ &= \left(\frac{a\bar{c}t^2 + (az+b)\overline{(cz+d)}}{|c|^2t^2 + (cz+d)\overline{(cz+d)}}, \frac{|\det(g)|t}{|c|^2t^2 + (cz+d)\overline{(cz+d)}} \right), \\ & T \cdot (z, t) = (\bar{z}, t) \end{aligned}$$

となる。 $GL_2^T(\mathbb{C})$ の離散部分群たちを

$$\begin{aligned} \Gamma &= GL_2(\mathbb{Z}[i]), \\ S\Gamma &= \{g \in GL_2(\mathbb{Z}[i]) \mid \det(g) = \pm 1\}, \\ \Gamma(1-i) &= \{g \in \Gamma \mid g \equiv I_2 \pmod{1-i}\}, \\ \Gamma(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a-d, b, c \equiv 0 \pmod{2} \right\}, \\ \Gamma(3) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a-d, b, c \equiv 0 \pmod{3} \right\}, \\ S\Gamma(3) &= \Gamma(3) \cap S\Gamma. \end{aligned}$$

で与える。 $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群 G に対して $G^T = G \rtimes \langle T \rangle$ とする。 $\Gamma^T, \Gamma(1-i)^T, \Gamma(2)^T$ は reflections で生成される。

一方、2次形式 $\det$ の符号数は $(1, 3)$ のなので $V^\times/\mathbb{R}^\times$ は3次元球 $\mathbb{B}^3$ と同型である。実際 V の基底を

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ v_3 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

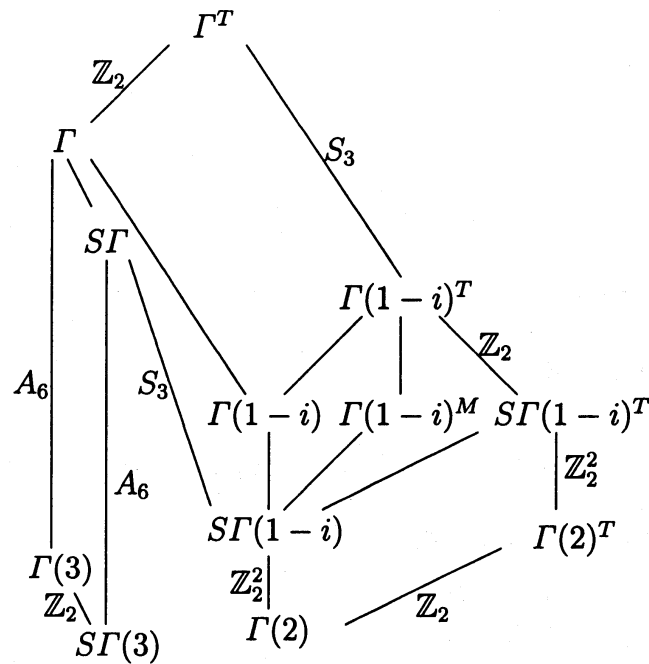
で定めると

$$2 \det\left(\sum_{j=1}^4 y_j v_j\right) = {}^t y H y,$$

$$H = \text{diag}(-1, -1, -1, 1), \quad y = (y_1, \dots, y_4)$$

となるので

$$V^\times/\mathbb{R}^\times = \{y \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 < y_4^2\} \simeq \mathbb{B}^3$$

Figure 1: Discrete subgroups of $GL_2^T(\mathbb{C})$

であり、 $GL_2^T(\mathbb{C})$ の作用は $\mathbb{B}^3$ の自己同型群 $O_H(\mathbb{R})$ の作用として翻訳される。 $\mathbb{H}^3$ と $\mathbb{B}^3$ との具体的な同型は

$$\mathbb{H}^3 \ni (z, t) \mapsto \frac{1}{t} \begin{pmatrix} -|z|^2 - \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) - t^2 \\ -\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) - 1 \\ \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) \\ |z|^2 + \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) + t^2 + 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{B}^3$$

で与えられる。

$O_H(\mathbb{R})$ の離散部分群を

$$\begin{aligned} G_H &= O_H(\mathbb{R}) \cap GL_4(\mathbb{Z}), \\ SG_H &= \{g \in G_H \mid \mathbf{1} g^t \mathbf{1} \equiv 0 \pmod{4}\}, \\ G_H(3) &= \{g \in G_H \mid g \equiv \pm I_4 \pmod{3}\}, \\ SG_H(3) &= SG_H \cap G_H(3), \end{aligned}$$

で与える。ここで $\mathbf{1} = (1, 1, 1, 1)$ とする。

Lemma 1

$$P\Gamma^T \simeq PG_H, \quad P\Gamma(3) \simeq PG_H(3), \quad PS\Gamma(3) \simeq PSG_H(3).$$

以下で $SG(3), \Gamma(2)^T, \Gamma(1-i)^T, \Gamma^T$ の作用に関して不変な実解析的な関数を構

3 $ST(3)$ の作用で不変な関数

前節でみたように $\mathbb{H}^3$ と $\mathbb{B}^3$ とは同型であり、 $\mathbb{B}^3$ は 4 次ジーゲル上半空間

$$\mathbb{S}_4 = \{\tau \in M_{\mathbb{C}}(4, 4) \mid {}^t\tau = \tau, \operatorname{Im}(\tau) > 0\}$$

へ以下のように埋め込むことができる。

$$\mathbb{B}^3 \ni y \mapsto \frac{1}{2}H - \frac{\sqrt{3}i}{2}[H - 2(y {}^ty)/({}^tyHy)] \in \mathbb{S}_4.$$

この埋め込みにより、準同型写像

$$O_H(\mathbb{R}) \ni g \mapsto \begin{pmatrix} g & O \\ O & HgH \end{pmatrix} \in Sp(8, \mathbb{R})$$

が引き起こされる。ここで $Sp(8, \mathbb{R})$ は $\tau \in \mathbb{S}_4$ に

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \tau = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}$$

で作用している。したがって $\mathbb{H}^3$ から $\mathbb{S}_4$ への埋め込み j が得られる。4 次 Siegel 上半空間 $\mathbb{S}_4$ 上には theta constants が定義されている。

$$\vartheta_{a,b}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^4} \exp(\pi i {}^t(n+a)\tau(n+a) + 2\pi i {}^t(n+a)b)$$

ここで $\tau \in \mathbb{S}_4$, $a, b \in \mathbb{Q}^4$ とする。

Proposition 1 $\mathbb{H}^3$ 上の関数

$$f_a(z, t) = \exp\left(\frac{\pi i}{12}\right) \vartheta_{a, aH}^3(j(z, t))$$

は $\mathbb{H}^3$ 上の実解析的関数で、 $g \in \Gamma(3)$ に対し

$$f_a(g \cdot (z, t)) = \det(g)^2 f_a(z, t)$$

をみたす。ここで a は $\frac{\mathbb{Z}^4}{6}$ の元で $6a$ の各成分は $\pm 1, \pm 3$ であり、 $(6a)H^t(6a) \equiv -2 \pmod{24}$ をみたすものとする。このような a は差が整数ベクトルとなるものや符号が異なっているものを同一視すると 15 個ある。

Theorem 1 15 個の f_a を用いて定まる写像

$$\eta_3 : \mathbb{H}^3 \ni (z, t) \mapsto [\dots, f_a(z, t), \dots] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{14}$$

の像は

$$\{[x_0, \dots, x_5] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5 \mid \sum_{j=0}^5 x_j = 0, \sum_{j=0}^5 x_j^3 = 0\}$$

と同型な $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{14}$ 内の 1 次式と 3 次式で与えられる代数多様体に含まれる。写像 η_3 は $\mathbb{H}^3/\Gamma(3)$ と Segre cubic から 10 個の特異点を除いた集合との同相写像を引き起

Remark 2 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ 上の 6 点の配置空間

$$GL_2(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{16} \\ x_{21} & \cdots & x_{26} \end{pmatrix} \mid d_{k_p k_q}(x) \neq 0 \ (p \neq q) \right\} / (\mathbb{R}^\times)^6$$

は

$$(x_{jk}) \mapsto [\dots, d_{k_1 k_2}(x) d_{k_3 k_4}(x) d_{k_5 k_6}(x), \dots]$$

$(\{k_1, \dots, k_6\} = \{1, \dots, 6\})$ により $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{14}$ に埋め込める。ここで

$$d_{k_p k_q}(x) = \det \begin{pmatrix} x_{1k_p} & x_{1k_q} \\ x_{2k_p} & x_{2k_q} \end{pmatrix}$$

とする。Theorem 1 における f_a がみたす 1 次関係式と 3 次関係式は $d_{k_1 k_2}(x) d_{k_3 k_4}(x) d_{k_5 k_6}(x)$ がみたす関係式と一致している。

Remark 3 $\mathbb{H}^3/\Gamma(3)$ の基本領域は Figure 2 で与えられる。cusps は 10 個ある。

4 $\Gamma(2)^T, \Gamma(1-i)^T, \Gamma^T$ の作用で不変な関数

$\mathbb{H}^3$ 上の関数 $\Theta_{a,b}(z, t)$ を

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}[i]^2} \exp(-\pi(n + \frac{a}{1-i})W(n + \frac{a}{1-i})^* + 2\pi i \operatorname{Re}(\frac{nb^*}{1+i})),$$

$$W = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} t^2 + |z|^2 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix}, \quad (z, t) \in \mathbb{H}^3, \quad a, b \in \mathbb{Z}[i]^2$$

で定める。

Proposition 2 $\Theta_{a,b}(z, t)$ は実解析的関数で

$$\Theta_{a,b}(\bar{z}, t) = \Theta_{a,b}(z, t)$$

をみたし、 $g \in \Gamma(2)$ に対して

$$\Theta_{a,b}(g \cdot (z, t)) = \Theta_{a,b}(z, t)$$

をみたす。また、 $g \in \Gamma(1-i)$ に対して

$$\Theta_{a,b}^2(g \cdot (z, t)) = \Theta_{a,b}^2(z, t)$$

をみたす。 $\Theta(z, t) = \Theta_{00,00}(z, t)$ は正値で $g \in \Gamma$ に対して

$$\Theta(g \cdot (z, t)) = \Theta(z, t)$$

をみたす。

Theorem 2 $\mathbb{H}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$\eta_2 : (z, t) \mapsto \frac{1}{\Theta(z, t)} (\Theta_{11,11}(z, t), \Theta_{10,01}(z, t), \Theta_{01,10}(z, t))$$

の像は正八面体

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}$$

から 6 個の頂点 $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$ を除いた集合 Z_2 (Figure 3) となる。写像 η_2 は $\mathbb{H}^3/\Gamma(2)^T$ と Z_2 との同相写像を引き起こす。

Remark 4 $\mathbb{H}^3/\Gamma(2)^T$ の基本領域は Figure 4 で与えられる。cusps は 6 個ある。

Corollary 1 $\mathbb{H}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$\eta_{1-i} : (z, t) \mapsto \frac{1}{\Theta^2(z, t)} (\Theta_{11,11}^2(z, t), \Theta_{10,01}^2(z, t), \Theta_{01,10}^2(z, t))$$

の像は、集合 $\{(t_1, t_2, t_3) \mid t_1, t_2, t_3 \geq 0, F(t_1, t_2, t_3) \geq 0\}$ から $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ を除いた集合の $(0, 0, 0)$ を含む連結成分 Z_{1-i} (Figure 5) となる。。ここで F は

$$\begin{aligned} & F(t_1, t_2, t_3) \\ &= \frac{1}{16} (t_1 + t_2 + t_3 + 1)^4 - 4t_1 t_2 t_3 \\ & \quad + (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 + t_2 + t_3)^2 \\ & \quad - \frac{1}{2} (t_1 + t_2 + t_3 + 1)^2 (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 + t_2 + t_3) \end{aligned}$$

とする。写像 η_{1-i} は $\mathbb{H}^3/\Gamma(1-i)^T$ と Z_{1-i} との同相写像を引き起こす。

Remark 5 $\mathbb{H}^3/\Gamma(1-i)^T$ の基本領域は Figure 6 で与えられる。cusps は 3 個ある。

$\Gamma(1-i)^T/\Gamma^T$ は 3 次対称群 S_3 と同型で $\Theta_{11,11}^2(z, t), \Theta_{10,01}^2(z, t), \Theta_{01,10}^2(z, t)$ たちの置換として作用している。 $\Phi_j(z, t)$ をこれらの関数たちの j 次基本対称式として定める。

Proposition 3 $\Phi_j(z, t)$ は Γ^T の作用で不変な関数である。

Corollary 2 写像

$$\eta : (z, t) \mapsto \left(\frac{\Phi_1(z, t)}{\Theta^2(z, t)}, \frac{\Phi_2(z, t)}{\Theta^4(z, t)}, \frac{\Phi_3(z, t)}{\Theta^6(z, t)} \right)$$

の像は

$$\begin{aligned} & t_3 \geq 0, \quad t_3 \geq \frac{1}{64} (4t_2 - (t_1 - 1))^2, \\ & -\frac{2}{27} t_1^3 + \frac{1}{3} t_1 t_2 + \frac{2}{27} (t_1^2 - 3t_2)^{3/2} \geq t_3 \geq -\frac{2}{27} t_1^3 + \frac{1}{3} t_1 t_2 - \frac{2}{27} (t_1^2 - 3t_2)^{3/2}, \end{aligned}$$

から $(1, 0, 0)$ を除いた集合 Z となる。この写像 η は $\mathbb{H}^3/\Gamma^T$ と Z との同相写像を引き起こす。

Remark 6 $\mathbb{H}^3/\Gamma^T$ の基本領域は Figure 7 で与えられる。cusps は 1 個ある。

References

- [Igu] J. Igusa, *Theta Functions*, Springer, 1972.
- [Hu] B. Hunt, *The geometry of some special Arithmetic Quotients*, LNM 1637, Springer, 1996.
- [MN] K. Matsumoto and H. Nishi, A fundamental domain for the principal congruence subgroup of $GL(2, \mathbb{Z}[i])$ of level 3, preprint.
- [MSY] K. Matsumoto, T. Sasaki and M. Yoshida, The monodromy of the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the Aomoto-Gel'fand hypergeometric function of type (3,6), *Internat. J. of Math.*, **3** (1992), 1–164.
- [MT] K. Matsumoto and T. Terasoma, Theta constants associated to cubic three folds, math.AG/0008024.
- [MY] K. Matsumoto and M. Yoshida, Invariants for some real hyperbolic groups, Kyushu Univ. preprints 2001-2.
- [Ma1] K. Matsumoto, Theta functions on the bounded symmetric domain of type $I_{2,2}$ and the period map of 4-parameter family of K3 surfaces, *Math. Ann.* **295** (1993), 383–408.
- [Ma2] K. Matsumoto, Theta constants associated with the triple coverings of the complex projective line branching at six points, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **37** (2001), 419–440.
- [SH] C.F. Schwartz and W. Hoyt, Sections of height one of Yoshida elliptic K3 surfaces, preprint.
- [S1] R.E. Schwartz, Degenerating the complex hyperbolic ideal triangle groups, *Acta Math.* **186** (2001), 105–154.
- [S2] R.E. Schwartz, Ideal triangle groups, dented tori, and numerical analysis, *Annals of Math.* **153** (2001), 533–598.
- [Yo1] M. Yoshida, *Hypergeometric Functions, My Love*, Vieweg, 1997.
- [Yo2] M. Yoshida, The real loci of the configuration space of six points on the projective line and a Picard modular 3-fold, *Kumamoto J. Math.*, **11** (1998), 43–67.
- [Yo3] M. Yoshida, A hyperbolic structure on the real locus of the moduli space of marked cubic surfaces, *Topology* **40** (2001), 469–473.

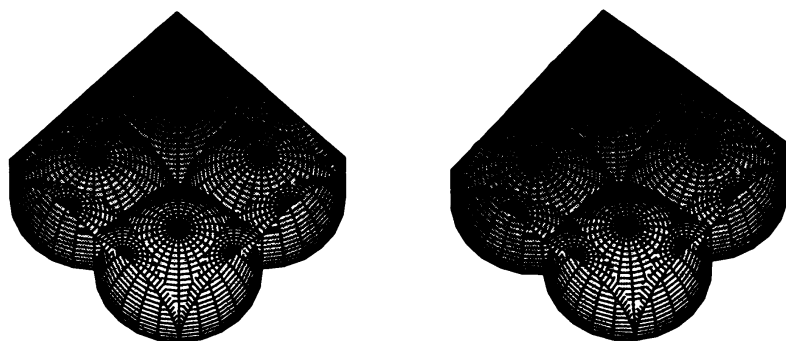
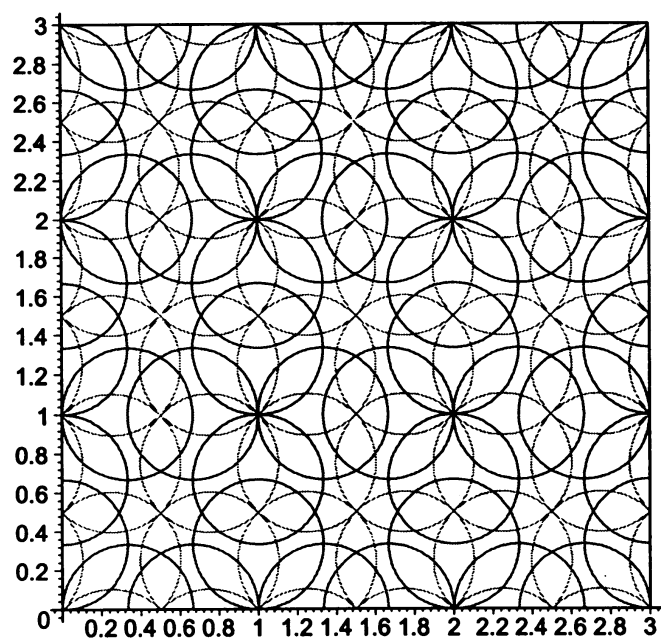


Figure 2: Fundamental domain of $\Gamma(3)$

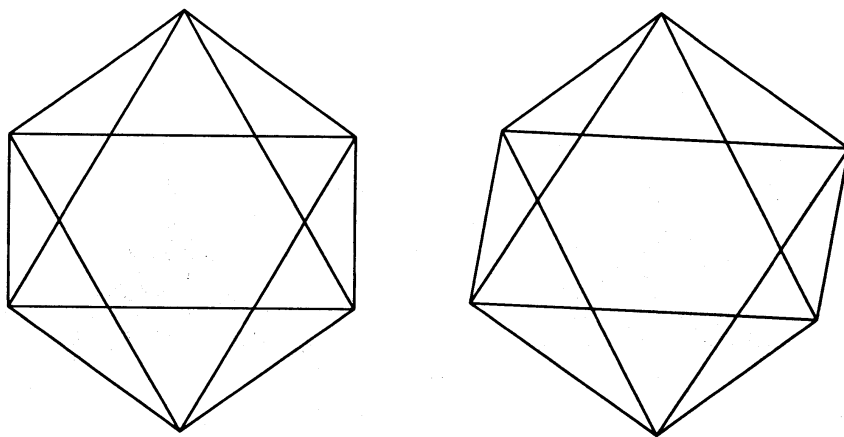


Figure 3: The image Z_2 of η_2

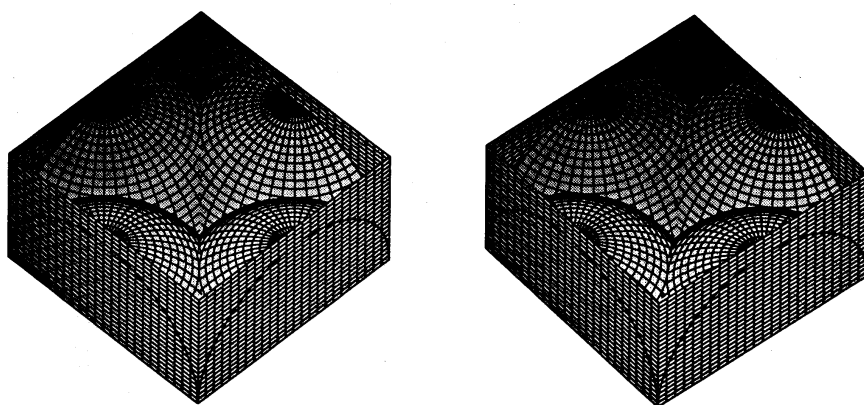
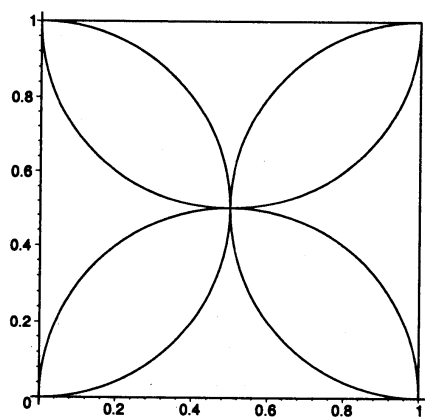
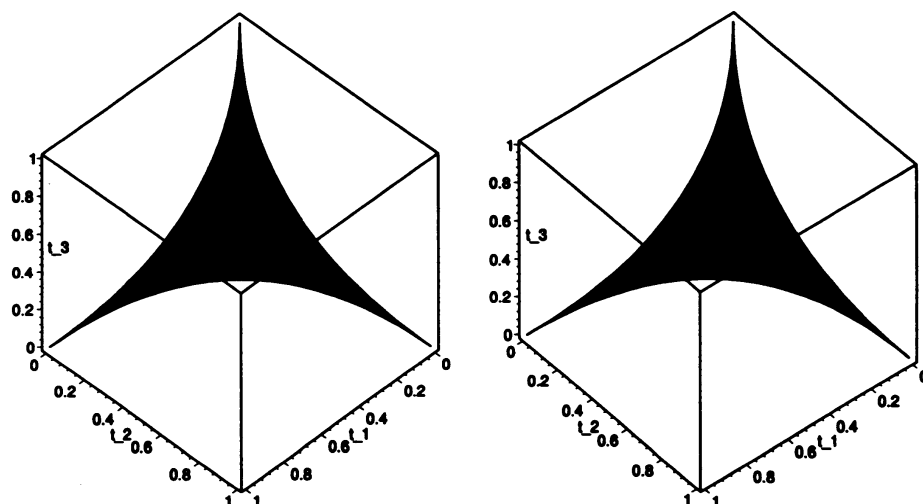
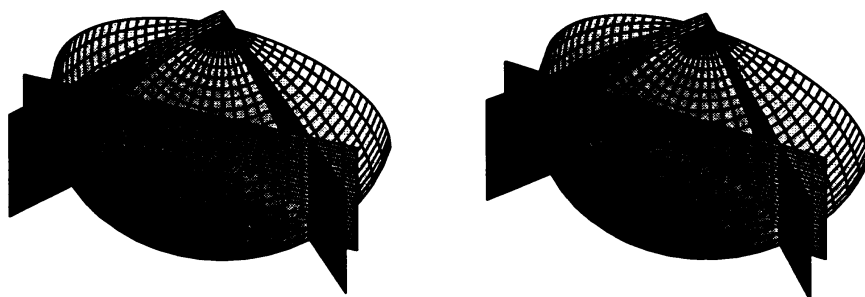
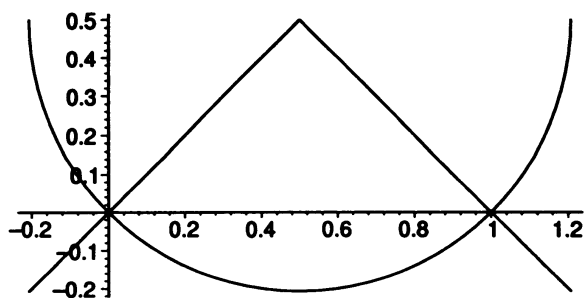


Figure 4: Fundamental domain of $\Gamma(2)^T$

Figure 5: Image of η_{1-i} Figure 6: Fundamental domain of $\Gamma(1-i)^T$

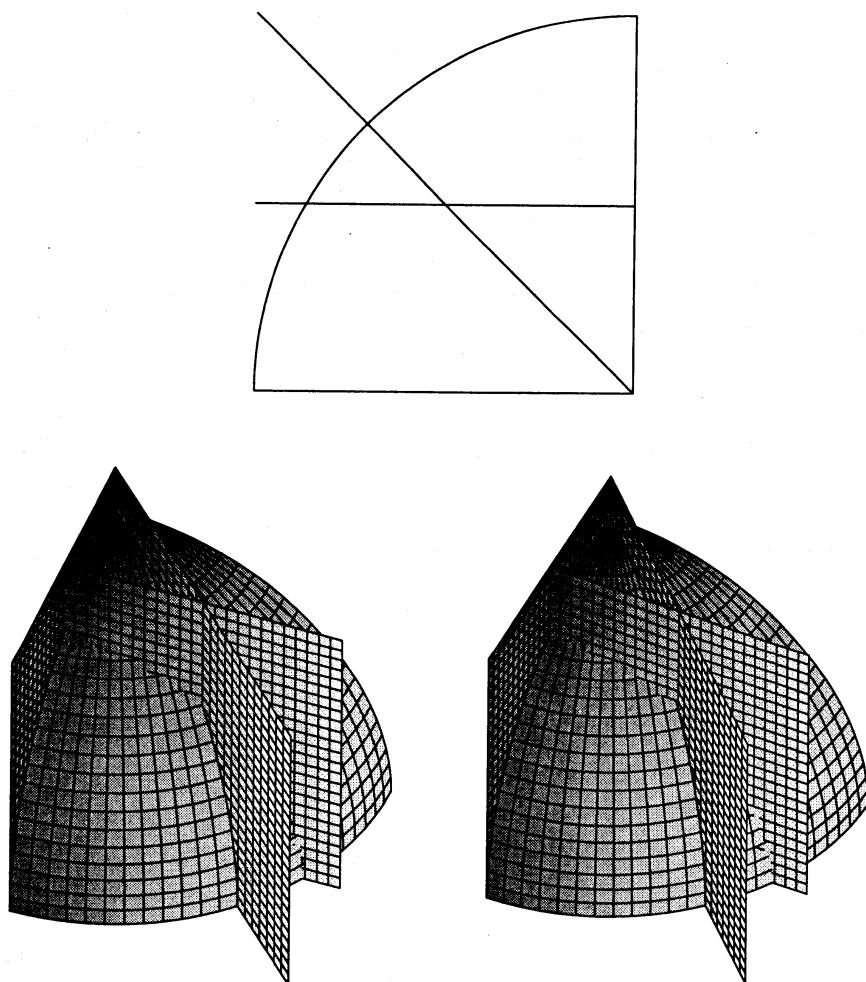


Figure 7: Fundamental domain of Γ^T