

多値しきい値関数について

相原恒博 (愛媛大学工学部)

あらまし

三値しきい値関数実現の簡便な方法を求めるため、筆者は
よえに三値 $=$, $\equiv$ 変数しきい値関数と生成する数列表を公表
したが、ここではその数列表を求める方法についてまず報告
し、この数列表に基づいて三値 $=$, $\equiv$ 変数しきい値関数の特
徴パラメータの算出について述べる。この特徴パラメータ表
によれば、三値 $=$, $\equiv$ 変数しきい値関数の実現はきわめて容
易となる。

つぎに r 値論理における完全単調性を定義し、その性質に
ついて考察する。この完全単調性の概念を、等しい変数をも
つ r 値 n 変数論理関数の集合に対して敷衍し、完全単調集合
なるものを定義する。論理関数の集合に属するすべての関数
が、共通の荷重ベクトルをとりうるしきい値関数であるため
の必要条件は、その集合が完全単調集合であることが示され
る。

また、二値論理における summable, asummable と r 値論理
関数に対して拡張し、 r 値 2-asummable と r 値完全単調性

の関係について考察する。そしてこの完全単調性と三値論理に適用し、三値論理における完全単調性は、三値三変数しきい値関数の必要十分条件となることの検証について述べる。

最後に、三値 n (≤ 3) 変数論理関数の集合を、出力素子は三値可変しきい素子を用い、他は通常の三値しきい素子を用いた二段回路で実現する方法を述べる。

1. まえがき

二値論理におけるしきい値関数の実現方法は、(i) 一次不等式系をとく、(ii) リンチャー・プログラミングによる、(iii) しきい値関数表（またはしきい値関数の特徴パラメータ表）による、(iv) しきい値関数の性質を用いる、などに分類されているが、多値しきい値関数の実現においても同様の手法が考えられる。

本文では、(iii)、(iv) の手法により、三値しきい値関数の実現、さらに任意の三値論理関数のしきい素子回路実現について述べる。

まず、三値しきい値関数表であるが、これは R.D. Merrill によって⁽¹⁾、二変数までの三値しきい値関数は作成されている。筆者は Merrill の方法を改良して、三値三変数しきい値関数に生成する数列表を作成した⁽²⁾。この数列表によれば、三値三変数しきい値関数の実現は容易である。一方、北橋⁽³⁾、藤田⁽⁴⁾

らは、三値論理関数に対する特徴パラメータを導入し、その性質について報告している。これによれば、三値しきい値関数の特徴パラメータさえ用意されれば、三値しきい値関数の実現はさわめて容易となることが予想される。そこで、前述の数列表に基づいて、三値三変数しきい値関数の特徴パラメータ表を作成した⁽⁵⁾。

しきい値関数の性質に基づく実現方法としては、完全単調性を用いている。二値論理における完全単調性は三値論理に拡張されているが⁽⁶⁾、ここでは r 値論理関数の完全単調性を定義した。この完全単調性は、 $r=2, 3$ とすれば、従来の二値、三値論理における完全単調性と同値である。

完全単調性の概念も、論理関数の集合に対して敷衍することにより、三値論理関数の集合を可変しきい素子回路で実現する方法も提案する。

2. 三値三変数しきい値関数の生成

$x_i \in \{-1, 0, +1\}$, 入力変数ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 入力荷重ベクトル $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, しきい値を T_1, T_2 ($T_1 > T_2$) とすると、三値しきい値関数はつぎのよう⁷に定義される。

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \Leftrightarrow w \cdot x \geq T_1 + \delta \\ 0 & \Leftrightarrow T_1 - \delta \geq w \cdot x \geq T_2 + \delta \\ -1 & \Leftrightarrow T_2 - \delta \geq w \cdot x \end{cases} \quad (1)$$

ただし, δ は正の実数である。

ある入力ベクトルを x_j , $j = \sum_{i=1}^n 3^{n-i} x_i + (3^n + 1)/2$, とすると x_i は x_j の i 番目の成分, $v_j = w \cdot x_j$ を入力の大きさと呼ぶことにする。

[定義 1] すべての v_j について, 大きさの等しいものが存在せず, $v_{(\min)} < \dots < v_j < \dots < v_{(\max)}$ のように並べられたものを荷重和数列と定義する。また, $v_{(\min)} < \dots < v_i = \dots = v_j < \dots < v_{(\max)}$ のように, 入力の大きさの等しいものがある場合を縮退荷重和数列という。

すなわち, 荷重和数列の Hasse 線図は一列となり, 節点の数は 3^n 個であるが, 縮退荷重和数列では 3^n より少ない。以後, 荷重和数列を単に数列ということもある。

集合 S_i, S_j において, $x \in S_i, y \in S_j$ なるすべての x, y に対して, $x < y$ ならば $S_i < S_j$ と書くことにする。関数の値が $+1, 0, -1$ となるような v_j の集合をそれぞれ, S^+, S^0, S^- とすると, 上記の値関数の定義から, $S^+ = \{v_j \mid v_j \geq T_1 + \delta\}, S^0 = \{v_j \mid T_1 - \delta > v_j > T_2 + \delta\}, S^- = \{v_j \mid T_2 - \delta \geq v_j\}$ である。したがって上記の値関数の必要十分条件は, $S^- < S^0 < S^+$ と書け

もとで、さらに細かい条件を考えて、図1の半順序集合から荷重和数列に変換すると26種類の荷重和数列が得られる⁽⁷⁾。

ところがこの26種類の数列のうち、いくつかの数列から得られるしきい値関数はすべて、残りの数列から得られるしきい値関数と同じものとなる。すなわち、いくつかの数列は冗長である。最小の w_3 をもつ数列から、もっとも多くのしきい値関数が生成されるようにして冗長な数列をとり除くと、18種類の数列をうる。これを表1に示す。ただし表1では v_j の添字のみで示し、 $v_j \geq 0$ のもののみを、左端の位置に最小、右へ進むにつれて大きくなるように配列してある。 $j = \sum_{i=1}^3 3^{i-1} v_i + (3^3+1)/2$ と定義されているから、 $i+j=28$ ならば、 $v_i = -v_j$ の関係があるから、 $v_j < 0$ なるものの大小関係もただし

表1 荷重和数列とその荷重

荷重和数列														w_1	w_2	w_3
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	9	3	1
14	15	19	20	21	16	17	18	22	23	24	25	26	27	9	6	1
14	16	15	17	19	18	20	22	21	23	25	24	26	27	9	3	2
14	16	15	17	18	19	20	22	21	23	25	24	26	27	11	3	2
14	15	16	19	17	20	18	21	22	23	24	25	26	27	11	5	2
14	19	15	20	16	21	17	22	18	23	24	25	26	27	9	6	2
14	15	19	16	20	17	21	18	22	23	24	25	26	27	11	6	2
14	19	15	20	21	16	17	22	18	23	24	25	26	27	11	8	2
14	16	19	15	17	20	22	18	21	23	25	24	26	27	9	4	3
14	19	16	15	20	17	22	21	18	23	25	24	26	27	9	5	3
14	9	20	15	16	21	22	17	23	18	24	25	26	27	9	7	3
14	20	9	15	21	16	22	17	23	18	24	25	26	27	9	8	3
14	9	16	20	15	22	17	21	23	18	25	24	26	27	9	6	4
14	16	9	20	22	15	17	21	23	25	18	24	26	27	9	6	5
14	20	16	22	9	15	21	17	23	25	18	24	26	27	8	7	5
14	20	9	16	15	22	21	17	23	18	25	24	26	27	11	9	5
14	16	20	22	9	15	17	21	23	25	18	24	26	27	9	7	6
14	20	16	9	22	15	21	17	23	25	18	24	26	27	11	9	6

にわかる。条件(3)において, w_1, w_2, w_3 の置換, 符号の与え方を考慮すれば, 条件(2)を満足する条件として, $2^3 \times 3!$ とおりの条件が与られ, これらに対する数列は, 表1の数列から導くことができる。⁽²⁾

3. 三値しきい値関数の特徴パラメータ表

三値 n 変数論理関数 $f(x)$ の特徴パラメータ c_f はつぎのように定義される。

$$c_f = (m_f, p_f, c_{f1}, c_{f2}, \dots, c_{fn}) \quad (4)$$

ただし, m_f, p_f はそれぞれ, 関数値 -1 , および $+1$ をとる入力ベクトルの数, c_{fi} は文献(3)の c_{fi} と同一のものである。

表2 三値二変数しきい値関数の特徴パラメータ

M	P	C1	C2	J	M	P	C1	C2	J	M	P	C1	C2	J
0	8	1	1	1	0	7	2	1	1	0	6	2	2	2
0	6	3	0	1	0	5	3	1	1	0	4	3	1	1
0	3	2	2	2	0	3	3	0	1	0	2	2	1	1
0	1	1	1	1										
1	8	2	2	1	1	7	3	2	1	1	6	3	3	2
1	6	4	1	1	1	5	4	2	1	1	4	4	2	1
1	3	3	3	2	1	3	4	1	1	1	2	3	2	1
1	1	2	2	1										
2	7	4	2	1	2	6	4	3	2	2	6	5	1	1
2	5	5	2	1	2	4	5	2	1	2	3	4	3	2
2	3	5	1	1	2	2	4	2	1					
3	6	4	4	2	3	6	6	0	1	3	5	5	3	2
3	5	6	1	1	3	4	5	3	2	3	4	6	1	1
3	3	4	4	2	3	3	6	0	1					
4	5	6	2	1	4	4	6	2	1					

表 3

J	w_1	w_2	J	w_1	w_2
1	3	1	2	3	2

$c_{fi} > c_{f(i+1)}$, かつ $m_f = p_f$ であるような関数を標準関数と呼ぶ。表1より, 三値三変数標準しきい値関数の特徴パラメータが算出される⁽⁵⁾。パラメータ表の例として, 標準三値三変数しきい値関数の特徴パラメータを表2に示す。表2では, $M, P, C1, C2$ は, それぞれ, m_f, p_f, c_{f1}, c_{f2} を示し, J はそのパラメータに対する荷重ベクトルを示す指標で, 表3にその荷重ベクトルを示す。このようなパラメータ表を用いれば, 三値三変数しきい値関数の判別, 実現はきわめて容易となる。

4. r値論理関数の完全単調性と assumability

4.1. 完全単調性

r値論理の真理値を, $r = 2m + 1$ (m は正の整数) のとき; $0, \pm 1, \dots, \pm m$ とし, $r = 2m$ のとき; $0, \pm 1, \dots, \pm(m-1), +m$ とする。真理値の大小関係は数値のそれに対応づける。本文では, $r = 2m + 1$ として議論するが, $r = 2m$ のときも同様の議論が成立する。真理値の集合を V で表わすことにする。

r値しきい値関数は, 式(1)の拡張としてつぎのように定義される。入力変数ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in V$, 荷重ベクトル $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, しきい値 $\pi, \tau_2, \dots, \tau_{r-1}$, $(T_i > T_{i+1})$ とすると,

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} m \Leftrightarrow w \cdot x \geq T_1 + \delta \\ m-1 \Leftrightarrow T_1 - \delta \geq w \cdot x \geq T_2 + \delta \\ \vdots \\ 0 \Leftrightarrow T_m - \delta \geq w \cdot x \geq T_{m+1} + \delta \\ \vdots \\ -(m-1) \Leftrightarrow T_{r-2} - \delta \geq w \cdot x \geq T_{r-1} + \delta \\ -m \Leftrightarrow T_{r-1} - \delta \geq w \cdot x \end{array} \right. \quad (5)$$

ただし, δ は正の実数である。

[定義2] 入力ベクトル x_a, x_b の i 番目の成分をそれぞれ, x_i^a, x_i^b とする。 $x_i^a - x_i^b = -1$, かつ i 以外のすべての j について $x_j^a = x_j^b$ であるとき, x_a と x_b は成分 i で連結されるといい, $x_a \xrightarrow{i} x_b$ と表わす。ここに, 矢印は連結の向きを示すという。 $x_a \xrightarrow{i} x_b, x_b \xrightarrow{j} x_c, \dots, x_g \xrightarrow{k} x_h$ であるとき, $x_a \xrightarrow{i} x_b \xrightarrow{j} x_c \xrightarrow{k} x_h$ と表わし, x_a と x_h は成分 $i, j, \dots, k$ で連結されるという。

[定義3] 入力ベクトル x_{a0}, x_{ak} が, $x_{a0} \xrightarrow{i_1} x_{a1} \xrightarrow{i_2} x_{a2} \dots x_{a(k-1)} \xrightarrow{i_k} x_{ak}$ のように, 同一の成分のみで連結されているとき, x_{a0} と x_{ak} は成分 i で直線状に連結されるといい, $x_{a0} \xrightarrow{i} x_{ak}$ と記す。

r 値論理では, 二つのベクトルが直線状に連結されている場合, $k \leq r-1$ である。

[定義4] x_a と x_e が m 個の成分で連結されているとする。このとき $x_{a'}$ と $x_{e'}$ が, x_a と x_e が連結されているのと同じ成分で連結され, かつ同一の成分においては連結の向きも等しいとき, ベクトルの組 $(x_a; x_e)$ と $(x_{a'}; x_{e'})$ とは平行であるといい, $(x_a; x_e) \parallel (x_{a'}; x_{e'})$ と書く。

たとえば,

$$\begin{array}{l} x_a \xrightarrow{k_1} x_b \xleftarrow{k_2} x_c \cdots x_d \xrightarrow{k_m} x_e \\ x_{a'} \xrightarrow{k_1'} x_{b'} \xleftarrow{k_2'} x_{c'} \cdots x_{d'} \xrightarrow{k_m'} x_{e'} \end{array} \quad (6)$$

であれば, $(x_a; x_e) \parallel (x_{a'}; x_{e'})$ である。また $x_{a'} \xrightarrow{k_1'} x_{b'} \xleftarrow{k_2'} x_{c'} \cdots x_{d'} \xrightarrow{k_m'} x_{e'}$, $x_{a'} \xleftarrow{k_2'} x_{b'} \xrightarrow{k_1'} x_{c'} \cdots x_{d'} \xrightarrow{k_m'} x_{e'}$ のように, 連結の成分の順序が同一でなくても, やはり $(x_a; x_e) \parallel (x_{a'}; x_{e'})$ である。

連結 (6) における $k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ の値を連結の度数 (K) と呼ぶことにすると, r 値 n 変数の場合には, $K \leq n(r-1)$ である。ただし, 平行なベクトルの特別の場合として, $(x_a; x_e) \parallel (x_a; x_e)$ も認めるものとする。

定義4から, つぎの定理の成立は明らかである。

[定理1] $(x_a; x_e) \parallel (x_{a'}; x_{e'})$ であるための必要十分条件は,

$x_e - x_a = x_{e'} - x_{a'}$ であることである。

[系1] $(x_a; x_e) \parallel (x_{a'}; x_{e'})$ であれば, $(x_a; x_{a'}) \parallel (x_e; x_{e'})$ である。

[定義5] $f(x)$ を r 値 n 変数論理関数とする。連結の度数が K ($1 \leq K \leq l$ なるすべての K を考える) であるようなすべての $(x_a; x_e) // (x_{a'}; x_{e'})$ に関して, $f(x_e) - f(x_a) = d$, $f(x_{e'}) - f(x_{a'}) = d'$ としたとき, $dd' < 0$ となるようなベクトルの組が一つも存在しないとき, $f(x)$ は単調であるという。

[定義6] $f(x)$ が $n(r-1)$ 単調であれば, $f(x)$ は完全単調であるという。

[定理2] $f(x)$ がしきい値関数であるための必要条件は, $f(x)$ が完全単調であることである。

[証明] $f(x)$ は完全単調でないとしよう。すると,

$$f(x_e) - f(x_a) = d, \quad f(x_{e'}) - f(x_{a'}) = d' \quad (7)$$

としたとき, $dd' < 0$ となるような $(x_a; x_e) // (x_{a'}; x_{e'})$ が少なくとも一つは存在する。便宜上, $d > 0$, $d' < 0$ としておく。しきい値関数の定義および式(7)から

$$\left. \begin{aligned} w \cdot x_e - w \cdot x_a &> 0 \\ w \cdot x_{e'} - w \cdot x_{a'} &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

定理1により, 連立不等式(8)が矛盾することはい明らかであり, $f(x)$ はしきい値関数ではない。

[性質1] $f(x)$ が単調であれば, $x_{a_0} \xrightarrow{k_1} x_{a_1} \xrightarrow{k_2} x_{a_2} \cdots x_{a_{l(k-1)}} \xrightarrow{k_m} x_{a_k}$ なる x_{a_0}, x_{a_k} に対して ($k_1 + k_2 + \cdots + k_k = l$),

$$f(x_{a_k}) - f(x_{a_0}) \geq 0 \Rightarrow k_1 w_1 + k_2 w_2 + \cdots + k_r w_m \geq 0 \quad (9)$$

が成立する。ただし、複号同順とする。

4.2. assumability

二値論理における summable, assumable は三値論理に拡張されているが⁽³⁾、これを r 値論理に拡張する。

[定義7] 正規直交系を作る $(r-2)$ 次元ベクトル, あるいは $(r-2)$ 次元の 0 ベクトルを付加ベクトルという。

[定義8] n 次元入力ベクトル x に, 付加ベクトル, α , を付加して得られる $n+r-2$ 次元ベクトル $X = (x, \alpha)$ を変形入力ベクトルという。

$\{^p x\} = \{x \mid f(x) = p\}$, ただし $-m \leq p \leq m$, と表わし, 変形入力ベクトルを要素とするつぎのような行列 $[X]$ を考える。

$$[X] = \begin{bmatrix} (^m x, 1, 0, \dots, 0), (^m x, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (^m x, 0, \dots, 0, 1), (^m x, 0, \dots, 0) \\ (^{m-1} x, 1, 0, \dots, 0), (^{m-1} x, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (^{m-1} x, 0, \dots, 0, 1), (^{m-1} x, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ (^{-m+1} x, 1, 0, \dots, 0), (^{-m+1} x, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (^{-m+1} x, 0, \dots, 0, 1), (^{-m+1} x, 0, \dots, 0) \\ (^{-m} x, 1, 0, \dots, 0), (^{-m} x, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (^{-m} x, 0, \dots, 0, 1), (^{-m} x, 0, \dots, 0) \end{bmatrix} \quad (10)$$

行列 (10) の i 行 j 列の要素 (変形入力ベクトル) を X_{ij} で表わし, つぎの関数を定義する,

[定義9] X を変形入力ベクトルとし, つぎのように定義さ

れる関数を変形論理関数という。

$$F(X) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow X = X_{ij}, \text{ ただし } i = 1, 2, \dots, (r-1); j = i, i+1, \dots, (r-1) \\ 0 \Leftrightarrow X = X_{ij}, \text{ ただし } i = 2, 3, \dots, r; j = 1, 2, \dots, (i-1) \end{cases} \quad (11)$$

[定理3] r 値論理関数 $f(X)$ が r 値関数ならば変形論理関数 $F(X)$ も r 値関数となり

$$F(X) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow W \cdot X > T_{r-1} \\ 0 \Leftrightarrow W \cdot X < T_{r-1} \end{cases} \quad (12)$$

と表わされる。またこの逆も成立する。ただし、

$$W = (W, T_{r-1}-T_1, T_{r-1}-T_2, \dots, T_{r-1}-T_{r-2}) \quad (13)$$

で、 W, T_i は式 (5) の W, T_i である。(証明略)

式 (12) の解は定義により

$$\begin{aligned} F^{-1}(1) &\triangleq \{^1X\} = X_{ij}, i = 1, 2, \dots, (r-1); j = i, i+1, \dots, (r-1) \\ F^{-1}(0) &\triangleq \{^0X\} = X_{ij}, i = 2, 3, \dots, r; j = 1, 2, \dots, (i-1) \end{aligned} \quad (14)$$

であるが、 r 値の理論により式 (12) が式 (14) の解をもつための必要十分条件は

$$\sum_p a_p X_p = \sum_q b_q X_q \quad \text{かつ} \quad \sum_p a_p = \sum_q b_q \quad (15)$$

ただし、 $X_p \in \{^1X\}, X_q \in \{^0X\}$, かつかかる正の整数 a_p, b_q についても満足されないことである。

定理3を考慮すれば、 $f(X)$ が r 値 r 値関数であるための必要十分条件は、つぎのようになる。

[定理4] r 値論理関数 $f(x)$ が しきい値関数 であるための必要十分条件は, 式 (15) の関係が, いかなる正の整数 a_p, b_q についても満足されないことである。

[定義10] $\sum_p a_p = \sum_q b_q \triangleq j$ とするとき, $2 \leq j \leq k$ なるいずれかの j につき式 (15) が成立すれば, r 値論理関数 $f(x)$ は k -summable であるという。 $f(x)$ が k -summable でないとき, $f(x)$ は k -asummable であるという。

つぎの補題 1, 2 は変形論理関数の定義より明らかである。

[補題1] r 値論理関数 $f(x)$ の入力ベクトルを x_a, x_b とする。付加ベクトルを α とするとき, 変形論理関数 $F(x)$ が, $F(x_a, \alpha) = 1, F(x_b, \alpha) = 0$ であれば, $f(x_a) > f(x_b)$ である。

[補題2] $f(x_a) > f(x_b)$ であれば, $F(x_a, \alpha) = 1, F(x_b, \alpha) = 0$ となるような付加ベクトル α が, 少なくとも一つは存在する。

[定理5] r 値論理関数の完全単調性と 2-asummable とは同値である。

[証明] (i) 2-summable であれば完全単調でないことを証明する。 $f(x)$ が 2-summable であれば

$$\begin{array}{ll} F(x_a, \alpha) = 1 & F(y_a, \gamma) = 0 \\ F(x_b, \beta) = 1 & F(y_b, \delta) = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. \quad (16)$$

であるような入力ベクトル $x_a, x_b, y_a, y_b, \alpha, \gamma, \beta, \delta$ の付加ベ

トル $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に対して

$$(x_a, \alpha) + (x_b, \beta) = (y_a, \gamma) + (y_b, \delta) \quad (17)$$

が成立する。式 (17) から、つぎの関係が成り立つ。

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta \quad (18)$$

ところが、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は正規直交系のベクトル、あるいは 0 ベクトルであるから、式 (18) より

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \gamma \\ \beta = \delta \end{array} \right\} \text{ あるいは } \left. \begin{array}{l} \alpha = \delta \\ \beta = \gamma \end{array} \right\} \quad (19)$$

いま便宜上、 $\alpha = \delta, \beta = \gamma$ であるとし、この関係を式 (16) に代入して

$$\left. \begin{array}{ll} F(x_a, \alpha) = 1 & F(y_a, \beta) = 0 \\ F(x_b, \beta) = 1 & F(y_b, \alpha) = 0 \end{array} \right\} \quad (20)$$

となり、式 (17) は

$$(x_a, \alpha) + (x_b, \beta) = (y_a, \beta) + (y_b, \alpha) \quad (21)$$

すなわち

$$x_a - y_b = y_a - x_b \quad (22)$$

$$(y_b; x_a) \parallel (x_b; y_a) \quad (23)$$

式 (20) と補題 1 により

$$\left. \begin{array}{l} f(x_a) > f(y_b) \\ f(x_b) > f(y_a) \end{array} \right\} \quad (24)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} f(x_a) - f(y_b) &= d > 0 \\ f(y_a) - f(x_b) &= d' < 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ゆえに, $f(x)$ は完全単調でない。

式(19)において, $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ とし, 同様の結果をうる。

(ii) 完全単調でなければ 2-summable であることは, つぎのよう
に証明される。 $f(x)$ が完全単調でないとすると, $dd' < 0$
となるような平行なベクトルが少なくとも一つは存在する。
それを $(x_a; x_e) \parallel (x_{a'}; x_{e'})$ としよう。定理1により, $x_e -$
 $x_a = x_{e'} - x_{a'}$, すなわち

$$x_e + x_{a'} = x_{e'} + x_a \quad (26)$$

いま, $dd' < 0$ であるが, $d > 0$, $d < 0$ と仮定しよう。

$$f(x_e) > f(x_a) \quad (27)$$

$$f(x_{e'}) < f(x_{a'}) \quad (28)$$

となる。式(27)が成立すれば, 補題2により

$$F(x_e, \alpha) = 1, \quad F(x_a, \alpha) = 0 \quad (29)$$

となるような α が, 少なくとも一つは存在する。同様に式
(28) から

$$F(x_{a'}, \beta) = 1, \quad F(x_{e'}, \beta) = 0 \quad (30)$$

となるような β が少なくとも一つは存在する。式(29), (30)
の変形入力ベクトルをそれぞれ加えると

$$(x_e, \alpha) + (x_{a'}, \beta) = (x_e + x_{a'}, \alpha + \beta) \quad (31)$$

$$(x_a, \alpha) + (x_{e'}, \beta) = (x_a + x_{e'}, \alpha + \beta) \quad (32)$$

式(26)により, 式(31), (32)の右辺は等しい。したがって

$$(x_e, \alpha) + (x_{a'}, \beta) = (x_a, \alpha) + (x_{e'}, \beta) \quad (33)$$

すなわち, 2-summable である。(証明終)

4.3. 三値三変数しきい値関数の必要十分条件

三値論理においては, 完全単調性は三値 $n (\leq 2)$ 変数しきい値関数であるための十分条件でもあり, 三値 $n (\geq 6)$ 変数しきい値関数に対しては十分条件とはならないことが報告されている⁽⁶⁾。筆者は三値三変数しきい値関数に対しても, 完全単調性は十分条件となることを電子計算機により検証したが, その方法について述べる。

荷重ベクトル $w = (w_1, w_2, w_3)$ において, $w_1 > w_2 > w_3 > 0$ なる条件のもとで, $v_j = w \cdot x_j$ の大小関係は図1に示されている。図1で示される半順序集合を S とし, これをつぎのようなる三個の部分集合 S^1, S^0, S^{-1} に分割する。

S^1 : ある部分集合 S^1 と考えたとき, $v_i \in S^1$ ならば, v_i より大きい v_j は必ず S^1 に属しているような部分集合。

S^{-1} : ある部分集合 S^{-1} と考えたとき, $v_j \in S^{-1}$ ならば, v_j より小さい v_i は必ず S^{-1} に属しているような部分集合。

$$S^0: S^0 = S - S^1 - S^{-1}$$

$X^1 = \{x \mid f(x) = 1\}$, $X^{-1} = \{x \mid f(x) = -1\}$ と表わし, つぎの定義をする.

[定義 11] X^{-1} , X^1 のすべての元の添字が, それぞれ, S^{-1} , S^1 の元の添字と一致しているような三値論理関数 $f(x)$ は, 完全であるという.

図 1 の Hasse 図から, 完全な関数は作成されるが, この関数は 2-単調である. これを, 三値 n 変数の場合について述べる. つぎのようになる.

[定理 6] $w_1 > w_2 > \dots > w_n > 0$ なる条件下における v_j の Hasse 図から得られる完全な関数は 2-単調である. (証明略)

図 1 の Hasse 図から完全な関数を作成するプログラムは容易に作ることができ, したがって三値三変数の 2-単調関数は作成される. すべての 2-単調関数から完全単調関数を取り出し, その特徴パラメータを算出する (ここまでは, 愛媛大学電子計算機 HIPAC-103 により行なった). そのパラメータ, あるいは m_j と p_j を入れかえたものが, さきに示している特徴パラメータ表⁽⁵⁾にあるか否かを調べる. このようにして, すべての完全単調な関数は, しきい値関数であることが確かめられた.

5. r 値論理関数の集合の完全単調性

4.1 で定義した完全単調性の概念を敷衍して、同じ変数をもつ r 値 n 変数論理関数の集合 F (以下単に集合 F という) に対して、完全単調集合と定義する。この完全単調集合の性質は、つぎの章で述べるように、三値論理関数の集合を可変しきい素子回路で実現する場合に用いられる。可変しきい素子とは、荷重ベクトルは一定で、しきい値を変化させるしきい素子である。

[定義12] 集合 $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ において、 $P_j = (f_1(x_j), f_2(x_j), \dots, f_n(x_j))$ を出力ベクトルという⁽⁸⁾。

出力ベクトル P_a と P_b の i 番目の成分をそれぞれ、 a_i, b_i とするとき、すべての i について、 $a_i \geq b_i$ ならば $P_a \geq P_b$ という。 $P_a \geq P_b$ または $P_a \leq P_b$ のとき、 P_a と P_b は比較可能であるという。

[定義13] 入力の大きさ $v_j = w' \cdot x_j$ 、ただし $w' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_n)$ は可変しきい素子の荷重ベクトル、の大小関係をつぎのように定義したものを入力の順位という： $P_i < P_j$ ならば $v_i < v_j$ 、 $P_i = P_j$ ならば v_i と v_j の大小関係は不定とする。

たとえば、 $P_i < P_j = P_k < P_l$ ならば、これにより定まる入力の順位は、 $v_i < \frac{v_j}{v_k} < v_l$ である。

v_j の入力の順位が、小さい方から k 番目であるとき、 $\tilde{o}(v_j) = k$ と記す。上述の例では、 $\tilde{o}(v_i) = 1$ 、 $\tilde{o}(v_j) = \tilde{o}(v_k) = 2$ 、

$\delta(v_e) = 3$ となる。

[定義14] 集合 F が与えられたとき、連結の度数が K ($1 \leq K \leq \infty$ なるすべての K を考える) であるようなすべての平行なベクトル $(x_a; x_e) // (x_{a'}; x_{e'})$ をとり、これらのベクトルに対応する $v_a, v_e, v_{a'}, v_{e'}$ に対して、 $\delta(v_e) - \delta(v_a) = D$, $\delta(v_{e'}) - \delta(v_{a'}) = D'$ とする。このとき、 $DD' < 0$ となるような平行なベクトルの組が一つも存在しないとき、集合 F は ℓ 単調集合であるという。ただし、すべての $\delta(v_i)$ は定義しうるものとする。

[定義15] 集合 F が $n(r-1)$ 単調集合であるとき、これを完全単調集合という。

[定理7] 集合 F が一個の可変しきい素子で実現されるならば、 F は完全単調集合である。(証明略)

定理7の、関数の集合が一個の可変しきい素子で実現される、という意味は、可変しきい素子のしきい値を変化させることにより、その集合に属する関数が順次実現されるということである。

すべての $f_i (i \in F)$ が完全単調であっても、 F が完全単調集合であるとは限らない。もし $F = \{f\}$ ならば、 F が完全単調集合であることと、 f が完全単調であることは同値である。これらの関係は定理8で述べられる。

[定理 8] 集合 F が完全単調集合であるための必要十分条件は, (i) F の仕意の出力ベクトルが比較可能であり, かつ (ii) F に属するすべての関数が完全単調であることである。

(証明略)

4.3 で述べた方法とほぼ同様に考えにより, 関数の集合が一個の可変しきい素子で実現されるための十分条件は電子計算機により検証され, つぎの定理を得る。

[定理 9] r 値 n (≤ 3) 変数論理関数の集合 F が一個の可変しきい素子で実現されるための必要十分条件は, F が完全単調集合であることである。

4.1 で述べた性質 1 は, 1 単調集合である関数の集合 F に対し 2 も同様に成立する。すなわち,

[性質 2] r 値 n 変数論理関数の集合 F が 1 単調集合であれば, $x_{a0} \xrightarrow{r_1} x_{a1} \xrightarrow{r_2} x_{a2} \cdots x_{a(k-1)} \xrightarrow{r_k} x_{ak}$ なる x_{a0}, x_{ak} に対して ($r_1 + r_2 + \cdots + r_k \leq k$),

$$\delta(v_{ak}) - \delta(v_{a0}) \geq 0 \Rightarrow r_1 w'_i + r_2 w'_j + \cdots + r_k w'_m \geq 0$$

(34)

ただし複号同順とし, $w'_i, w'_j, \dots, w'_m$ は可変しきい素子の荷重ベクトルの成分である。(証明略)

6. 三値可変しきい素子回路の実現

二値論理の場合においても、 n 変数論理関数の仕意の集合を、可変しきい素子回路で実現する問題はきわめて困難であり、W. S. Meise / がその実現方法を提案しているが⁽⁹⁾、それは全く発見的である。

この章では、三値 n 変数論理関数の集合を可変しきい素子回路で実現する問題を考察するが、仕意の集合の実現を考へるのではなくて、与えられた集合の仕意の出力ベクトル P_i 、 P_j が比較可能である場合と考察の対象とする。

以下に述べる実現方法は定理9に基づいている。すなわち与えられた集合が完全単調集合ならば、これを一個の可変しきい素子で実現し、完全単調集合でなければ、完全単調集合の定義に及している矛盾点を解消し、しきい素子の二段回路で実現しようとするものである。したがってこの実現方法は三値 n (≤ 3) 変数論理関数の集合に対して(その出力ベクトルが比較可能であれば)適用される。

変数の数が四変数以上の関数の集合を実現するためには、変数の数に制限されない必要十分条件を見出すことが必要であろう。

図2の $g_1, \dots, g_i, \dots, g_k$ は通常9三値しきい素子で、これらを制御素子と呼ぶ。出力素子 g は可変しきい素子で、その出力

は式(1)において, $w \cdot x$ のかわりに, $w \cdot x + \sum_{j=1}^k h_j y_j(x)$ を代入すれば決定される。ただし w は可変しきい素子の荷重ベクトル, $y_j(x)$ は素子 g_j の出力 (y_j と表わすこともある), h_j は g_j から g への荷重係数, $T_{ij}, T_{2j} (T_{1j} > T_{2j})$ は g_j のしきい値である。 T_{i1}, T_{i2} は f_i (E.F.) のしきい値とする。

この章では議論の対象となる三値論理関数の集合 F は, その出力ベクトルが比較可能であるとしてゐるから, F が完全単調集合でないということは, 平行なベクトル, $(x_a; x_e) \parallel (x_a; x_e)$, に対応する入力の順位に,

$$\left. \begin{aligned} \delta(v_e) - \delta(v_a) &> 0 \\ \delta(v_e) - \delta(v_a) &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

となるものが存在することである。いま, $x_a \xrightarrow{p_{11}} x_b \xrightarrow{p_{21}} x_c \dots x_d \xrightarrow{p_{2m}} x_e$ とし, $y_j(x_a) = y_j^a$ と表わす。図2の回路で, 入力ベクトル x_a, x_e のときの, 出力

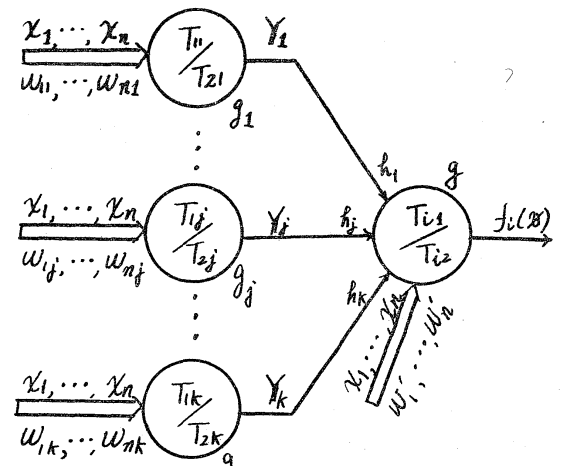


図2

素子 g に対する入力の総和を, それぞれ I_a, I_e とすれば

$$\left. \begin{aligned} I_a &= w \cdot x_a + \sum_{j=1}^k h_j y_j^a \\ I_e &= w \cdot x_e + \sum_{j=1}^k h_j y_j^e \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

定義より, y_j のかわりに I_a, I_e などを用いれば ($\delta(I_a) \equiv \delta(v_a)$ など), 不等式(35)はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \delta(I_e) - \delta(I_a) &> 0 \\ \delta(I_e) - \delta(I_{a'}) &< 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} (37) \end{array} \right.$$

$w \cdot x_e - w \cdot x_a = k_1 w_i' + k_2 w_j' + \dots + k_k w_m'$ に留意すれば, 不等式 (37) は次式を意味することになる。

$$\begin{aligned} k_1 w_i' + k_2 w_j' + \dots + k_k w_m' + \sum_{j=1}^k h_j (\sigma_j^e - \sigma_j^a) &> 0 \\ k_1 w_i' + k_2 w_j' + \dots + k_k w_m' + \sum_{j=1}^k h_j (\sigma_j^{e'} - \sigma_j^{a'}) &< 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} (38) \end{array} \right.$$

連立不等式 (38) において

$$\sum_{j=1}^k h_j (\sigma_j^e - \sigma_j^a) = \sum_{j=1}^k h_j (\sigma_j^{e'} - \sigma_j^{a'}) \quad (39)$$

の関係があれば, 連立不等式 (20) は矛盾しない。不等式 (35) を生じるようなすべてのベクトルの組において, 式 (21) の関係を満足させるように制御素子 g_j の出力を決定すれば, 集合 F は完全単調集合と同じ性質をもつことになる。

集合 F が完全単調集合でない場合, これを図 2 の回路で実現するためには制御素子の出力を決定せねばならない。そのため, つぎの手順により定める制御行列を導入する。連立不等式 (35) を矛盾する不等式と呼ぶことにしておく。

(i) すべての平行なベクトルについて, 矛盾する不等式が存在するか否かを調べる。

(ii) 矛盾する不等式があるときは, それに対応して不等式 (39) を定める。すなわち

$$\sum_{j=1}^k h_j (-\sigma_j^a + \sigma_j^e + \sigma_j^{a'} - \sigma_j^{e'}) = 0 \quad (40)$$

とする。ここで 3^n 次元のベクトル b を作る。 b の成分の配置番号として、左端の位置を $-(3^n-1)/2$ とし、右へ進むにつれて大きくなり、右端は $(3^n-1)/2$ とする。 b の a, e, a', e' の位置にはそれぞれ、不等式 (40) の括弧内の $y_j^a, y_j^e, y_j^{a'}, y_j^{e'}$ の係数を置き、他の成分はすべて 0 とする。ただし、 y_j^α の添字 α は、 $\alpha = \sum_{i=1}^n 3^{n-i} x_i^\alpha$ 、 x_i^α は x_α の第 i 番目の成分である。

たとえば、不等式 (40) から求めた b は、

$$b = \left(0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0 \right) \quad (41)$$

(iii) すべての矛盾する不等式について b を求め、これを行とする行列を作る。

(iv) この行列で、等しい行が存在するときは、そのうちの一つの行のみを残し、他は除去する。このようにして得られた行列を制御行列 (B) という。

ある行列 B のすべての要素が非零であれば、 $B \neq 0$ と表わすことにしておく。

[定理 10] 三値 $n (\leq 3)$ 変数論理関数の集合 F が完全単調集合でない場合に、制御素子 g_j の出力 y_j がつぎの条件を満足すれば、 F は図 2 の回路で実現できる。

$$B(h_1 y_1 + h_2 y_2 + \dots + h_k y_k) \neq 0 \quad (42)$$

ただし、 y_j は $3^n \times 1$ 行列で、

$$Y_j = \left[r_j^{-\frac{(3^j-1)}{2}}, \dots, r_j^{-1}, r_j^0, r_j^1, \dots, r_j^{\frac{3^j-1}{2}} \right]^t \quad (43)$$

ここに、 t は行列の転置を表わす。(証明略)

三値 = 変数および三変数しきい値関数の荷重和数列表は求められているが、この数列表の仕意の一つの荷重和数列表から得られる $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ で式(42)を満足させることができる。

このことは、荷重和数列表から得られるしきい値関数 f_i (すなわち Y_i) は、希望する j , $j = \sum_{i=1}^n 3^{n-i} x_i$, について、 $f_i(x_j) + f_i(x_{j+1})$ とすることができるとを考慮すれば明らかである。

定理10において、なるべく少ない数の制御素子で式(42)を満足させるための目安として、つぎの定義を導入する。

[定義16] $B Y_i$ の非零の要素の個数を N_{iR} , 制御行列 B の行数を R とするとき, N_{iR}/R を Y_i の消去度という。

定義より明らかに、 Y_i の消去度が1であれば、いま考えている集合 F は一つの制御素子を付加することにより実現される。制御素子数をなるべく少なくする方法は、つぎのような考えによる。

ある荷重和数列表から得られる制御素子出力(すなわち、しきい値関数)のうち、最大の消去度をもつものを Y_j とする。制御行列 B_j の行から、 $B_j Y_j$ の非零となる行を除いて得られる行列を B_{j+1} とする。つぎに B_{j+1} に対して最大の消去度をもつ

制御素子出力を決定する。以上の操作を繰り返す。

つぎに、三値 $n (\leq 3)$ 変数論理関数の集合 F を、図 2 の回路で実現する手順を述べる。

手順 1. 与えられた集合 F の出力ベクトル P_i, P_j がすべて比較可能か否かを調べる。比較可能でない P_i, P_j があれば、 F は実現不可能である。

手順 2. P_i, P_j がすべて比較可能ならば、矛盾する不等式 (不等式 (35)) が存在するか否かを調べる。性質 2 に基づいて、 $l = 1, 2, \dots, n(3-1)$ において得られる不等式を記録しておく。完全単調集合ならば、 F は一個の可変しきい素子で実現される。

手順 3. 完全単調集合でなければ、制御行列 B を作る。

手順 4. $B(a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_k Y_k) \neq 0$ とする Y_j を定める。

手順 5. 手順 4 で求めた Y_j を不等式 (38) に代入する。

手順 6. 計算実行表⁽¹⁰⁾を作り、 w, a_i を求める。

手順 7. 各関数に対するしきい値を決める。

7. むすび

二値しきい値関数の重要な性質である完全単調性と、*asummability*, *summability* を多値論理に拡張し、その性質を調べ、完全単調性と 2-*asummable* とは同値であることなどを示した。

この完全単調性の概念を多値論理関数の集合に対して敷衍し、完全単調集合を定義し、論理関数の集合が一個の可変しき素子で実現されるための必要条件は、その集合が完全単調集合であることを示した。完全単調集合の性質に基づき、三値 n (≤ 3) 変数論理関数の集合を、可変しき素子回路で実現する方法を求めた。

しかしながら、この実現方法は論理関数の変数の数に制限があること、最小素子実現でないこと、なほ問題点が残っている。

謝辞 有益なご助言をいただいた大阪大学工学部手塚慶一助教授、同基礎工学部北橋忠宏氏に厚く感謝申し上げます。また、協力をしていただいた高松雄三君（佐賀大学）、および片岡正次郎君、赤木道弘君、矢野純君、村上研二君らの協力に感謝する。

参考文献

- (1) R.D. Merrill: "Ternary threshold logic", Lockheed Missiles and Space Co., Rept. No. RTP-TDR-63-4173 ^{11, P.B-187(1963)}
- (2) 相原, 赤木: "三変数までの三値しき値関数の作成", 信学論(C), 53-C, 9, p. 591 (1974-09)
- (3) 北橋他: "三値論理関数の特徴パラメータとしき値関数への応用", 信学論(C), 52-C, 10, p. 641
- (4) 三根, 藤田: "三値しき値関数について", 京大数理解析研究所講究録 81, p. 46 (1970年3月)
- (5) 相原: "三値三変数しき値関数の特徴パラメータ表", 信学論投稿中
- (6) 北橋他: "三値しき値論理関数の必要十分条件と2の完全単調性", 信学論(C), 53-C, 8, p. 507
- (7) 相原, 赤木: "三値三変数しき値関数の数について", 信学論(C), 52-C, 9, p. 571
- (8) 相原, 高松, 矢野: "多値可変しき値論理", 信学論(C), 53-C, 11, p. 863
- (9) W.S. Meisel: "Nets of Variable-threshold threshold Elements", IEEE Trans., C-17, 7, p. 667
- (10) 相原, 高松: "多値論理関数のしき素子による段実現", 電算機研資 EC-70-23 (1970-09)