

Exponential group のユニタリ表現の制限について

近畿大学九州工学部 藤 原 英 徳

(Hidenori Fujiwara)

$G = \exp \mathfrak{g}$ をリー環 $\mathfrak{g}$ をもつ exponential group とし、つまり指数写像 $\exp$ が G 上への微分同相写像であるとし、 π を G の既約ユニタリ表現、 K を G の解析部分群とする。我々は π の K への制限 $\pi|_K$ の既約分解を与え、この状況で Frobenius の相互律が成立することを見よう。

この為我々は軌道の方法を用いるが、その枠組の中で Kirillov によって触れられたこの問題は、ベキ零群に対し Corwin-Greenleaf により、又完全可解リー群に対し Lipsman により解決されている。 π に対応する G の余随伴軌道を $\Omega_G(\pi)$ で表し、 $\Omega_G(\pi)$ 上の Kostant 測度を $\mathfrak{g}^*$ 上の測度とみなしこれに同値な $\mathfrak{g}^*$ 上の有限測度 μ_π を取る。

$\mathfrak{k}$ を K のリー環、 $\hat{K}$ を K のユニタリ双対とし、 $p = p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{k}^*$ を制限写像としよう。Kirillov-Bernat 写像 $\theta_K : \mathfrak{k}^* \rightarrow \hat{K}$ は軌道空間 $\mathfrak{k}^*/K$ から $\hat{K}$ 上への Borel 同形写像を誘導する。そこで $\nu = \nu_K^\pi = (\theta_K \cdot p)_*(\mu_\pi)$ を写像 $\theta_K \cdot p : \mathfrak{g}^* \rightarrow \hat{K}$ による μ_π の像とする。最後に $\sigma \in \hat{K}$ に対し、 $\Gamma(\pi, \sigma) = \Omega_G(\pi) \cap p^{-1}(\Omega_K(\sigma))$ に含まれる K -軌道の数 $n_\pi(\sigma)$ で表す。

$$\text{定理 1.} \quad \pi|_K \simeq \int_{\hat{K}}^{\oplus} n_\pi(\sigma) \sigma d\nu(\sigma).$$

G の2つの既約ユニタリ表現 π_1, π_2 に対し、外部 Kronecker 積 $\pi_1 \times \pi_2$ は軌道 $\Omega_{G \times G}(\pi_1 \times \pi_2) = (\Omega_G(\pi_1), \Omega_G(\pi_2)) \subset \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ に対応する。 G を $G \times G$ の対角成分からなる部分群と同一視しよう。

系 1. $p = p(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, \mathfrak{g}) : \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ とし、 $\nu = (\theta_G \cdot p)_*(\mu_{\pi_1 \times \pi_2})$ 又 $(\Omega_G(\pi_1), \Omega_G(\pi_2)) \cap p^{-1}(\Omega_G(\pi))$ に含まれる G -軌道の数 $m(\pi)$ とすると、

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\nu(\pi).$$

他方我々は誘導表現の既約分解を知っている。 K の既約ユニタリ表現 σ から出発する。 $\Omega_G(\sigma)$ 上の Kostant 測度と零化空間 $\mathfrak{k}^\perp = \{f \in \mathfrak{g}^* ; f|_{\mathfrak{k}} = 0\}$ 上のルベーク測度は $\mathfrak{g}^*$ の部分多様体 $p^{-1}(\Omega_K(\sigma))$ 上に測度 μ を与える。

今 μ を $\mathfrak{g}^*$ 上の測度とみてそれに同値な有限測度 $\tilde{\mu}$ を取り、その $\hat{G}$ 上における像 $\nu = \nu_G^\sigma = (\theta_G)_*(\tilde{\mu})$ を考える。

$$\text{定理 2 (cf. [4]).} \quad \text{ind}_K^G \sigma \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} n_\pi(\sigma) \pi d\nu(\pi).$$

定理2は [4] において σ が K のユニタリ指標のとき証明されたが、 σ は単項故この制限は本質的でない。実際 $f \in \Omega_K(\sigma) \subset \mathfrak{k}^*$ において Pukanszky 条件 $B \cdot f = f + \mathfrak{z}^\perp$, $B = \exp \mathfrak{z}$, を満たす実 polarization $\mathfrak{z}$ を取れば σ は B のユニタリ指標

$\chi_f, \chi_f(\exp X) = e^{\sqrt{-1}f(X)} \quad (X \in \mathfrak{g})$, となりこれより容易に定理 2 が得られる。

系 2. 我々の状況で Frobenius の相互律が成り立つ。

この相互律は ‘殆ど至るところ’ 既に知られており [9]、ここで新しい点は、既に [3] で注意されたように、この相互律が至るところ成立することである。

定理 1 の証明を始める前に、後に繰り返し利用されるよく知られた結果を記しておこう。 $\mathfrak{q}_0$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルで $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{q}_0 = 1$ なるものとし、 $G_0 = \exp \mathfrak{q}_0$ 又記号を簡単にする為 $p = p(\mathfrak{g}, \mathfrak{q}_0)$ とおく。 $\mathfrak{q}_0$ に関し $\mathfrak{g}$ の余随伴軌道は、従って G の既約ユニタリ表現も 2 種類に分かれる。 $f \in \mathfrak{g}^*$ の G における固定群を $G(f)$ 、そのリー環を $\mathfrak{g}(f)$ で表す。

定理 0 ([5], [11]). Ω を G の余随伴軌道、 $f \in \Omega$ とし、 Ω に対応する G のユニタリ表現を $\pi(\Omega)$ で表す。このとき次のいずれか一方が生じる。

(i) $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{q}_0$ のとき、 Ω を飽和軌道という。このとき $p(\Omega)$ は G_0 -軌道 ω_t ($t \in \mathbb{R}$) の 1 変数族に分かれ、 $\Omega = p^{-1}(p(\Omega))$ となる。これに応じて $\pi(\Omega)|_{G_0} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi(\omega_t) dt$ かつ $\text{ind}_{G_0}^G \pi(\omega_t)$ は既約である。

(ii) $\mathfrak{g}(f) \not\subset \mathfrak{q}_0$ のとき、 Ω を非飽和軌道という。このとき $\omega = p(\Omega)$ は 1 つの G_0 -軌道で $p^{-1}(\omega)$ は G -軌道 Ω_t ($t \in \mathbb{R}$) の 1 変数族に分かれる。更に $\pi(\Omega_t)|_{G_0}$ は既約で他方 $\text{ind}_{G_0}^G \pi(\omega) \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi(\Omega_t) dt$ 。

以下定理 1 を示す。記号はそこで述べた意味とし、 G の次元に関する帰納法を用いる。まず最初に $\mathfrak{k}$ が余次元 1 の $\mathfrak{g}$ のイデアルのときは結果は既に知られている。又 $\mathfrak{k}$ が $\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{z}$ を含むとして構わないので以後これを仮定しよう。いま $\mathfrak{k}$ を含む $\mathfrak{g}$ の部分環 $\mathfrak{h}$ があると仮定し、 $p(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) * (\mu_\pi)$ を ν_H^π , $H = \exp \mathfrak{h}$ に関し分解する：

$$p(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) * (\mu_\pi) = \int_{\hat{H}} \mu_H^\rho d\nu_H^\pi(\rho).$$

μ_π は H の作用で準不変故ファイバー測度 μ_H^ρ は殆ど至るところ $\Omega_H(\rho)$ 上の Kostant 測度と同値である。 μ_H^ρ を $\mathfrak{h}^*$ 上に拡張して μ_ρ を得る。

Borel 集合 $E \subset \hat{K}$ に対し

$$\begin{aligned} \nu_K^\pi(E) &= \mu_\pi(p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{-1}(\theta_K^{-1}(E))) = \mu_\pi(p(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^{-1}(p(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})^{-1}(\theta_K^{-1}(E)))) \\ &= p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) * (\mu_\pi)(p(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})^{-1}(\theta_K^{-1}(E))) \\ &= \int_{\hat{H}} \mu_H^\rho(\Omega_H(\rho) \cap p(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})^{-1}(\theta_K^{-1}(E))) d\nu_H^\pi(\rho) \\ &= \int_{\hat{H}} p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) * (\mu_\rho)(\theta_K^{-1}(E)) d\nu_H^\pi(\rho) = \int_{\hat{H}} \nu_K^\rho(E) d\nu_H^\pi(\rho). \end{aligned}$$

そこで $\pi|_H$ に対し定理 1 を認めるなら、 $\pi|_K$ の分解に現われる測度が得られ、又もし $f|_{\mathfrak{k}} \in \Omega_K(\sigma)$ なるすべての $f \in \Omega_G(\pi)$ に対し $H(f|_{\mathfrak{h}}) \cdot f \subset K \cdot f$ となっていれば重複度に関する主張も得られる。更に H が G の余次元 1 の正規部分群のときは $\pi|_K$ における重複度に関する主張が Lipsman [8] により得られている。

以上のことより我々は K を含む G の正規部分群は G のみと仮定して推論を進めよう。 $f \in \Omega_G(\pi)$ における polarization $\mathfrak{z}$ を用いて π を実現し、 $\pi \simeq \text{ind}_{\mathfrak{g}}^G \chi_f$, $B = \exp \mathfrak{z}$, $\chi_f(\exp X) = e^{\sqrt{-1}f(X)} \quad (X \in \mathfrak{z})$ とする。ここで f は $\mathfrak{g}$ のいかなるイ

デアル ($\neq \{0\}$) 上でも消えてないとしてよい。従って $\dim \mathfrak{z} \leq 1$ で、もし $\dim \mathfrak{z} = 1$ なら f の $\mathfrak{z}$ への制限 $f|_{\mathfrak{z}}$ は 0 でない。 $\mathfrak{g}$ の中心に含まれないイデアルの族で極小なものを 1 つ取り $\mathfrak{a}$ で表す。 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a}^f = \{X \in \mathfrak{g}; f([X, Y]) = 0, \forall Y \in \mathfrak{a}\}$, $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$ とおくと、よく知られているように (cf. [2]) $\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{g}_1$ の中に取りれる。すると $\pi \simeq \text{ind}_{G_1}^G \pi_1$, $\pi_1 = \text{ind}_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{g}_1} \chi_f$. $\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{g}_1$ の補空間 $\mathfrak{t}$ を $G = TG_1$, $T = \exp \mathfrak{t}$, となるように選ぶ (cf. [2], [12], [13]).

まず $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a}$ の場合を考える。明らかに $G = KG_1$. Mackey [10] の部分群定理より $K_1 = K \cap G_1$ として

$$\pi|_K \simeq \text{ind}_{K_1}^{K_1} (\pi_1|_{K_1}).$$

K_1 のリ一環を $\mathfrak{k}_1$ とする。このとき $\pi_0 = \pi_1|_{K_1}$ は既約で $f|_{\mathfrak{k}_1} \in \mathfrak{k}_1^*$ を通る K_1 -軌道に対応している。定理 2 より

$$\pi|_K \simeq \int_K^{\oplus} m(\sigma) \sigma d\nu_{\pi_0}^K(\sigma) \quad (1)$$

として重複度 $m(\sigma)$ は $\Omega_K(\sigma) \cap \Xi$, $\Xi = p(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}_1)^{-1}(\Omega_{K_1}(\pi_0)) \subset \mathfrak{k}^*$, における K_1 -軌道の数 $n_{\sigma}(\pi_0)$ で与えられる。公式 (1) を見直してやろう。上記 $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{k}$ の中に取りれば $\mathfrak{k} = \mathfrak{t} + \mathfrak{k}_1$ で $K = TK_1$. すると

$$\Omega_G(\pi) = T \cdot (K_1 \cdot f + \mathfrak{g}_1^+),$$

$$p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})(\Omega_G(\pi)) = T \cdot (K_1 \cdot (f|_{\mathfrak{k}_1}) + \mathfrak{k}_1^+) = T \cdot \Xi.$$

故に商空間 $p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})(\Omega_G(\pi))/K$ は Ξ/K と同一視され $\nu_{\pi_0}^K$ は我々の ν_K^{π} としての資格をもつ。重複度に関しては、 $\nu_{\pi_0}^K$ の台に属する σ に対し、 $\mathfrak{a}$ 上の評価点を固定して $n_{\sigma}(\pi_0) = n_{\pi}(\sigma)$ が示される。

次に $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{k} + \mathfrak{a}$ の場合を考える。最初に $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{k}$ と仮定しよう。もし $f \in \Omega_G(\pi)$ をどのように選んでも $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a}^f$ ならば上と同じような状況にあり、 $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{k}$ の中に取り (cf. [2], [13]) $G = KG_1$. Mackey の部分群定理より $K_1 = \exp \mathfrak{k}_1 = K \cap G_1$ として

$$\pi|_K \simeq \text{ind}_{K_1}^{K_1} (\pi_1|_{K_1}).$$

但し一般に $\pi_1|_{K_1}$ は既約でなく、帰納法の仮定より

$$\pi_1|_{K_1} \simeq \int_{K_1}^{\oplus} n_{\pi_1}(\rho) \rho d\nu_{K_1}^{\pi_1}(\rho).$$

従って

$$\pi|_K \simeq \text{ind}_{K_1}^K \int_{K_1}^{\oplus} n_{\pi_1}(\rho) \rho d\nu_{K_1}^{\pi_1}(\rho) \simeq \int_{K_1}^{\oplus} n_{\pi_1}(\rho) (\text{ind}_{K_1}^K \rho) d\nu_{K_1}^{\pi_1}(\rho).$$

この公式を詳しく調べる。 $\rho|_A$, $A = \exp \mathfrak{a}$, は $\chi_f|_A$ を並べたもので K_1 は K における $\chi_f|_A$ の固定群と一致する。故に Mackey の一定理 (cf. [2], [10]) によれば $\sigma = \text{ind}_{K_1}^K \rho$ はすべて既約で互いに同値でない。 $f_1 = f|_{\mathfrak{g}_1} \in \mathfrak{g}_1^*$ とおき、 $\mathfrak{g}_1^*$ を $\mathfrak{g}^*$ の部分空間 $\{\lambda \in \mathfrak{g}^*; \lambda|_{\mathfrak{t}} = 0\}$ と同一視し、 G (resp. G_1) の余随伴作用を $\dot{G}$ (resp. $\dot{G}_1$) で表すと、

$$\Omega_G(\pi) = G \cdot f = T \cdot (G_1 \dot{G}_1 f_1 + \mathfrak{g}_1^+) = T \cdot (A \dot{G} G_1 \dot{G}_1 f_1).$$

これより商空間 $p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})(\Omega_G(\pi))/K$ は $p(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k}_1)(\Omega_{G_1}(\pi_1))/K_1$ と同一視され T の作用は $\mathfrak{a}$ 上での値を変えるから、 $\nu_K^{\pi_1}$ は ν_K^{π} と見做せ、軌道とアフライン部分空間 $p(\mathfrak{k}, \mathfrak{a})^{-1}(f|_{\mathfrak{a}}) = (f|_{\mathfrak{k}}) + \mathfrak{a}^{\perp} \subset \mathfrak{k}^*$ との交わりを考えて、 $n_{\pi_1}(\rho)$ が $n_{\pi}(\sigma)$ に等しいことがわかる。

$f \in \Omega_G(\pi)$ を適当に選ぶと $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a}^f$ となる場合。 $\mathfrak{k}$ における $\mathfrak{a}$ の可換子環

を $\bar{k}_0$ とすれば $\dim \bar{k}/\bar{k}_0 = \dim (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}) = \dim \mathfrak{z} = 1$ (cf. [2], [13]). 定理1は $\pi|_{K_0}$, $K_0 = \exp \bar{k}_0$, に対しては成立することに注意しておこう。

求める既約分解を

$$\pi|_K \simeq \int_{\hat{K}}^{\oplus} m^*(\sigma) \sigma d\nu^*(\sigma) \quad (2)$$

とすれば、両辺を K_0 に制限して $\pi|_{K_0}$ に対する既約分解

$$\pi|_{K_0} \simeq \int_{\hat{K}}^{\oplus} m^*(\sigma) (\sigma|_{K_0}) d\nu^*(\sigma) \quad (3)$$

を得るはずである。定理0を考慮すれば、これより測度 ν^* は ν_K^π と同値であることがわかる。更に定理0の(ii)の場合が生じるのは $\mathcal{Q}_K(\sigma)$ がアファイン部分空間 $(f|_{\bar{k}}) + \mathfrak{a}^\perp \subset \bar{k}^*$ に含まれるときのみ故、公式(3)において殆ど至るところ定理0の(i)の場合が生じる。こうして重複度 $m^*(\sigma)$ に関する主張も得られ、結局公式(2)は我々の求めるものに他ならない。

以上見てきたことより測度に関する主張は一般的に確立され、又 $\bar{k}$ が余既約、即ち $\mathfrak{g}/\bar{k}$ への $\bar{k}$ -作用が既約であるときは $\mathfrak{g} = \bar{k} + \mathfrak{a}$ 又は $\mathfrak{a} \subset \bar{k}$ 故定理1は成立する。

そこで以下 Lipsman [8] の推論を借用して重複度公式を示そう。

まず最初に $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 = 1$ となる $\mathfrak{g}$ のあるイデアル $\mathfrak{g}_0$ に関し $\mathcal{Q}_G(\pi)$ が飽和であると仮定して結果を導こう。 $f \in \mathcal{Q}_G(\pi)$, $f_0 = p(f)$, $p = p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ とし、 $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ の軌道 $G_0 \cdot f_0$ に対応する既約ユニタリ表現を π_0 で表す。従って $\pi \simeq \text{ind}_{G_0}^G \pi_0$. $\bar{k} \not\subset \mathfrak{g}_0$ と仮定してるので $G = KG_0$. そこで $K_0 = K \cap G_0 = \exp \bar{k}_0$ とおきもう一度 Mackey の部分群定理を使い、更に帰納法の仮定を用いれば

$$\begin{aligned} \pi|_K &\simeq \text{ind}_{K_0}^K (\pi_0|_{K_0}) \simeq \text{ind}_{K_0}^K \int_{\hat{K}_0}^{\oplus} n_{\pi_0}(\rho) \rho d\nu_{K_0}^{\pi_0}(\rho) \\ &\simeq \int_{\hat{K}_0}^{\oplus} n_{\pi_0}(\rho) \text{ind}_{K_0}^K \rho d\nu_{K_0}^{\pi_0}(\rho). \end{aligned} \quad (4)$$

定理0より $\sigma = \text{ind}_{K_0}^K \rho$ は既約であるか又は $\text{ind}_{K_0}^K \rho \simeq \int_{\hat{R}}^{\oplus} \sigma_t dt$. 第2の場合(4)における σ_t の重複度が $n_{\pi}(\sigma_t)$ に等しいことは容易にわかる。第1の型の $\sigma \in \hat{K}$ に対し重複度を計算しよう。 ν_K^π の台に属する $\sigma \in \hat{K}$ に対し $m(\sigma)$ で $G_0 \cdot f \cap p(\mathfrak{g}, \bar{k})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma))$ に含まれる K_0 -軌道の個数を表すと、 $G \cdot f = K \cdot G_0 \cdot f$ より $n_{\pi}(\sigma)$ は $m(\sigma)$ に他ならない。

必要なら f を取り替えて $f|_{\bar{k}} \in \mathcal{Q}_K(\sigma)$ の状況で考える。もし $p(\lambda) \in \Gamma(\pi_0, \sigma)$ なるすべての $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ に対し $p^{-1}(p(\lambda)) \subset K \cdot \lambda$ ならば、 $m(\sigma)$ は公式(4)において $\sigma \simeq \text{ind}_{K_0}^K \rho$ となる $n_{\pi_0}(\rho)$ の和に等しい。又もし $p^{-1}(f_0) \not\subset K \cdot f$ なら明らかに $n_{\pi}(\sigma) = \infty$. 他方 $\sigma \simeq \text{ind}_{K_0}^K \rho$ として、

$$\begin{aligned} \dim G \cdot f_0 \cap p(\mathfrak{g}_0, \bar{k}_0)^{-1}(\mathcal{Q}_{K_0}(\rho)) &= \dim G \cdot f_0 - \dim K_0 \cdot f_0 + \dim \mathcal{Q}_{K_0}(\rho), \\ \dim \Gamma(\pi_0, \rho) &= \dim G_0 \cdot f_0 - \dim K_0 \cdot f_0 + \dim \mathcal{Q}_{K_0}(\rho). \end{aligned}$$

しかるに我々の仮定より

$$\dim K_0 \cdot f = \dim K_0 \cdot f_0, \quad \dim G \cdot f_0 = \dim G_0 \cdot f_0 + 1.$$

従って

$$\dim \Gamma(\pi_0, \rho) < \dim G \cdot f_0 \cap p(\mathfrak{g}_0, \bar{k}_0)^{-1}(\mathcal{Q}_{K_0}(\rho)). \quad (5)$$

$\bar{k} = R\bar{x} + \bar{k}_0$ とする。不等式(5)は、任意の $s \in R$ に対し f を $k(s) \cdot f$, $k(s) = \exp s\bar{x}$, で置き換えても成立する。一方

$$G \cdot f_0 \cap p(\mathfrak{g}_0, \bar{k}_0)^{-1}(\mathcal{Q}_{K_0}(\rho)) = \bigcup_{s \in R} (k(s) \cdot \mathcal{Q}_{G_0}(\pi_0) \cap p(\mathfrak{g}_0, \bar{k}_0)^{-1}(\mathcal{Q}_{K_0}(\rho))).$$

以上より

$$k(s) \cdot \mathcal{Q}_{G_0}(\pi_0) \cap p(\mathcal{Q}_0, \mathcal{K}_0)^{-1}(\mathcal{Q}_{K_0}(\rho)) \neq \phi$$

即ち

$$\mathcal{Q}_{G_0}(\pi_0) \cap p(\mathcal{Q}_0, \mathcal{K}_0)^{-1}(k(s) \cdot \mathcal{Q}_{K_0}(\rho)) \neq \phi$$

となる $s \in R$ の集合はルベーグ測度に関し無視できず、 $\pi|_K$ における σ の重複度は ∞ となり主張が得られる。

最後に $\mathcal{Q}_G(\pi)$ は余次元 1 のどんなイデアルに関しても非飽和であると仮定しよう。
 $\mathcal{K}$ を含む $\mathcal{Q}$ の余既約な部分リー環 $\mathcal{F} \neq \mathcal{Q}$ を取り、 $p = p(\mathcal{Q}, \mathcal{F})$, $H = \exp \mathcal{F}$ とおく。我々に残っているのは、公式

$$\begin{aligned} \pi|_K &= (\pi|_H)|_K \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} n_{\pi}(\rho) \rho|_K d\nu_H^{\pi}(\rho) \\ &\simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} n_{\pi}(\rho) d\nu_H^{\pi}(\rho) \int_{\hat{K}}^{\oplus} n_{\rho}(\sigma) \sigma d\nu_K^{\rho}(\sigma) \end{aligned}$$

において、 $\dim K \cdot f < \dim \Gamma(\pi, \sigma)$, $f \in \Gamma(\pi, \sigma)$, なるとき σ の重複度 $m(\sigma) = \infty$ を示すことである。ここでは $\dim \mathcal{Q}/\mathcal{F} = 2$ の場合を調べる。 $\dim \mathcal{Q}/\mathcal{F} = 1$ の場合もまったく同様に扱われる。

$\mathcal{Q}$ における $\mathcal{F}$ の余基底で写像 $R^2 \times H \ni ((s, t), h) \mapsto g(s, t)h \in G$, $g(s, t) = \exp(sX_1)\exp(tX_2)$, が G 上への微分同相写像となるものを取る。 $f \in \Gamma(\pi, \sigma)$, $f_{s, t} = g(s, t) \cdot f$, $f_{s, t}^0 = p(f_{s, t})$ とおく。従って $p(\mathcal{Q}_G(\pi)) = \bigcup_{(s, t) \in R^2} H \cdot f_{s, t}^0$ 。
 $\mathcal{Q}_G(\pi)$ は余次元 1 のイデアル $\mathcal{Q}_0 = \{X \in \mathcal{Q}; [X, \mathcal{Q}] \subset \mathcal{F}\}$ に関し非飽和故、 $\lambda \in p(\mathcal{Q}_G(\pi))$ に対し 2 つの H -不変な可能性が考えられる： $p^{-1}(\lambda) \cap \mathcal{Q}_G(\pi) = \{\lambda\}$ であるか $p^{-1}(\lambda) \cap \mathcal{Q}_G(\pi) = p^{-1}(\lambda)$ 。 $f_{s, t}^0$ が第 1 (resp. 第 2) の条件を満たす $(s, t) \in R^2$ の集合を E (resp. F) とする。 E は R^2 の開集合である。

$(s, t) \in E$ に対し $H \cdot f_{s, t}^0 \cap p(\mathcal{F}, \mathcal{K})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma)) \neq \phi$ ならば

$$\dim K \cdot f_{s, t}^0 < \dim (\bigcup_{(s, t) \in E} H \cdot f_{s, t}^0) \cap p(\mathcal{F}, \mathcal{K})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma)). \quad (6)$$

もし $\dim K \cdot f_{s, t}^0 < \dim H \cdot f_{s, t}^0 \cap p(\mathcal{F}, \mathcal{K})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma))$ となる $(s, t) \in E$ が存在すれば $H \cdot f_{s, t}^0$ に対応する $\rho \in \hat{H}$ に対し $n_{\rho}(\sigma)$ は ∞ である。もしそうでないなら (6) より $H \cdot f_{s, t}^0 \cap p(\mathcal{F}, \mathcal{K})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma)) \neq \phi$ となる $(s, t) \in E$ の集合はルベーグ測度に関し無視できない。これで望む結果が得られた。

次に $(\bigcup_{(s, t) \in E} H \cdot f_{s, t}^0) \cap p(\mathcal{F}, \mathcal{K})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma)) = \phi$ と仮定しよう。容易にわかるように

$$\begin{aligned} \dim p(\mathcal{Q}_G(\pi)) \cap p(\mathcal{F}, \mathcal{K})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma)) &= \dim \Gamma(\pi, \sigma) - 2 \\ &= \dim \mathcal{Q}_G(\pi) - \dim K \cdot f_{s, t} + \dim \mathcal{Q}_K(\sigma) - 2. \end{aligned} \quad (7)$$

他方

$$\dim H \cdot f_{s, t}^0 \cap p(\mathcal{F}, \mathcal{K})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma)) = \dim H \cdot f_{s, t}^0 - \dim K \cdot f_{s, t}^0 + \dim \mathcal{Q}_K(\sigma), \quad \dots \quad (8)$$

$$\dim K \cdot f_{s, t} \leq \dim K \cdot f_{s, t}^0 + 2. \quad (9)$$

$\dim H \cdot f_{s, t}^0 = \dim \mathcal{Q}_G(\pi) - 4$ 故、(7), (8), (9) を用いて

$$\begin{aligned} &\dim H \cdot f_{s, t}^0 \cap p(\mathcal{F}, \mathcal{K})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma)) \\ &\leq \dim \mathcal{Q}_G(\pi) - 4 - (\dim K \cdot f_{s, t} - 2) + \dim \mathcal{Q}_K(\sigma) \\ &= \dim \mathcal{Q}_G(\pi) - \dim K \cdot f_{s, t} + \dim \mathcal{Q}_K(\sigma) - 2 \\ &= \dim p(\mathcal{Q}_G(\pi)) \cap p(\mathcal{F}, \mathcal{K})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma)). \end{aligned} \quad (10)$$

(10) で等式が成立するのは (9) で等式が成立するときであり、このとき

$\dim K \cdot f_{s,t}^0 = \dim K \cdot f_{s,t} - 2 < \dim H \cdot f_{s,t}^0 \cap p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma))$
 となり軌道 $H \cdot f_{s,t}^0$ に対応する $\rho \in \hat{H}$ に対し $n_\rho(\sigma) = \infty$. もし (10) において
 どこでも等式が成り立たないならば、関係式

$$p(\mathcal{Q}_G(\pi)) \cap p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma)) = \bigcup_{(s,t) \in F} H \cdot f_{s,t}^0 \cap p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma))$$

より $H \cdot f_{s,t}^0 \cap p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma)) \neq \emptyset$ なる $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ の集合はルベーグ測度に関し
 無視できない。従って $m(\sigma) = \infty$ となる。

Bibliographie

- [1] L.Auslander and C.C.Moore, Unitary representations of solvable Lie groups,
 Mem. Amer. Soc. No 62, 1966.
- [2] P.Bernat et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris
 1972.
- [3] L.Corwin and F.P.Greenleaf, Spectrum and multiplicities for restrictions of
 unitary representations in nilpotent Lie groups, Pacific J. Math., 135(1988)
 233-267.
- [4] H.Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie résolubles expone-
 ntiels, à paraître.
- [5] G.Grélaud, Désintégration des représentations induites des groupes de Lie
 résolubles exponentiels, Thèse de 3^e cycle, Univ. de Poitiers, 1973.
- [6] A.A.Kirillov, Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, Uspe-
 khi Mat. Nauk, 17(1962), 57-110.
- [7] R.Lipsman, Orbital parameters for induced and restricted representations, à
 paraître dans Trans. Amer. Math..
- [8] R.Lipsman, Restricting representations of completely solvable Lie groups, à
 paraître.
- [9] G.W.Mackey, Induced representations of locally compact groups II: the Froben-
 ius Reciprocity Theorem. Annals of Math., 58(1953), 193-221.
- [10] G.W.Mackey, The Theory of Unitary Group Representations, Chicago Lectures
 in Math., 1976.
- [11] S.R.Quint, Decomposition of induced representations of solvable exponential
 Lie groups, Dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1973.
- [12] O.Takenouchi, Sur la facteur-représentation d'un groupe de Lie résoluble de
 type (E), Math. J. Okayama Univ., 7(1957), 151-161.
- [13] M.Vergne, Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie
 résoluble exponentiel, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 3(1970), 353-384.