

生 体 系 逆 問 題 と そ の 応 用

法政大学工学部 斎藤 兆古 (Yoshifuru Saito)

1. はじめに

本稿は生体系の逆問題が 100 年以上の歴史を持つ人類の課題である Inverse Source Problem の一種であることを示すため、逆問題の歴史的経緯、分類、及び数学的・物理的意味について述べる。その結果、生体系の逆問題が従来の古典的な解析理論では解析不可能な問題であり、生体系の逆問題の解析はデジタル計算機の強力な計算能力を前提とする 21 世紀にまたがる新しい科学・技術・学術分野の展開につながる可能性を示唆する。

2. 逆問題

a) 歴史的経緯 逆問題的発想は、恐らく 1823 年に数学者の Abel が、ある質量を持つ粒子をある速度で摩擦の無いス

ロープに投げ、粒子が投げた点に戻るまでの時間を測定し、スロープの形状を求めることを試みた時点まで遡ることができるであろう。即ち、逆問題的発想の原点は形状や媒質等が未知の対象に対して、外部からのある入力に対する応答を調べることで対象の形状や媒質等を求めんとすることにある。

Abel の問題は対象の性質・媒質が既知であり、形状のみを未知としている。このような形状や媒質等の スカラー量を外部からの入力とその応答を既知情報として求める問題 を本稿では 弱形式の逆問題 と呼ぶ。一般に、弱形式の逆問題は解析的に解くことができ、Abel の問題も Abel 型の積分方程式を解くことに帰し、スロープの形状を求めることに成功した [1]。

他の弱形式の逆問題の例として Computed Tomography (CT) がある。1917 年数学者の Radon が、ある対象に対してすべての方向からの投影データを得れば、対象物体の形状が求まることを証明した [1]。その後、 γ 線を用いた Oldendorf の実験や RI を用いた Kuhl の実験成果を基礎として、Hounsfield と Ambrose が CT の実現に成功した [2]。このようにスカラー量を求める弱形式の逆問題は入出力情報が理想的に得られれば解くことが可能である。他方、100 年以上の歴史を持つ逆問題として、地球表面上の引力分布の測定から地球内部の密度分布を求めんとする逆問題がある。弱形式の逆問題との

本質的な違いは、A) 求める対象が形状や媒質等のスカラー量でなく地球表面上に引力を与える引力源分布であり、またB) 得られる情報が地球表面における引力分布のみであって、地球内部の情報は得られない点であろう。このような求める対象がフィールド源であり、且つ情報として得られるフィールドが局部的である問題を本稿では強形式の逆問題と呼ぶ。

Stokes(1867) や Neumann(1906) 等によると、強形式の逆問題は情報量(対象物内のフィールド)の欠落から、一意的な解が求まらずある程度の曖昧さを持つ解しか得られないとの結論を示している[1]。

以上の歴史的経緯から、現在我々の直面している問題は、局所的フィールド分布の測定からフィールド源を求める強形式の逆問題であることは自明であろう。

b) 分類 いま、 λ を媒質のパラメータ、 ϕ をポテンシャル、さらに σ をフィールド源密度としたとき、次式で支配される系を考える、

$$\lambda \nabla^2 \phi = -\sigma. \quad (1)$$

(1)式で、全空間の λ と σ が与えられたとき、 ϕ を求める問題が古典的な解析問題であり順問題と呼ばれる。次に、全空間の λ と ϕ が与えられたときフィールド源 σ を求める問題は

直接問題 (Direct Problem) と呼ばれる。この直接問題は λ と ψ を (1) 式の右辺に代入するのみであるから、順問題と同様に一意的な解が容易に得られる。順問題と直接問題では媒質を表すパラメータ λ は常に全空間で既知とした。しかし、 λ が未知で、ポテンシャル ψ とフィールド源 σ が全空間で既知のとき、 λ を求める問題は明らかに逆問題である。この場合、全空間の ψ と σ が既知であるため弱形式の逆問題であり、解析的に解くことが可能である。例えば CT では、既知フィールド源として x 線等を対象物に照射し、 λ の x 線吸収率を位置に関して指数関数的とすれば、対象物を通過した x 線量は照射点から受端点間で一次元フーリエ変換された値となる。従って、x 線透過量を対象物の周辺に沿って一周することで二次元フーリエ変換を行い、その後逆フーリエ変換すれば、対象物の λ に関する断層分布図を得ることができる [2]。

これは、対象物の外側に既知のフィールド源 σ が存在し、対象物内の ψ は x 線ビームに相当し一定値と仮定できるから、x 線の減衰は λ によるものと解釈できる。これまでは、(1) 式で既知パラメータが二個で未知パラメータが残り一個の問題であったが、媒質のパラメータ λ とフィールド源 σ が未知量であり、ポテンシャル ψ が全空間で既知とする問題を考える。(1) 式を変形して、

$$\nabla^2 \phi = -(\sigma / \lambda), \quad (2)$$

とし， ϕ がすべての空間で既知であるから，直接問題となり，(2)式に ϕ を代入することで σ / λ は一意的に求められる。

しかし， σ と λ を分離することはできない。仮に，対象物の媒質パラメータ λ が既知であつても，対象空間周辺の ϕ ，即ち局所的な ϕ からフィールド源 σ は一意的に求まらず，強形式の逆問題となる。最後に，対象物の λ と σ の両者が未知量であり，ポテンシャル ϕ が対象物の周辺の一部で既知としたとき，この問題は強形式の逆問題となり一意的な解は期待できない。換言すれば，強形式の逆問題は本質的に古典的な解析手法が適用できない問題であり，デジタル計算機の強力な計算能力を前提とする21世紀にまたがる課題である。

c) 数学的意味 (2)式は(1)式の媒質に関する項 λ が右辺に移されているため媒質に無関係となっている。従ってその積分形は， v をフィールド源が含まれる空間の体積として，

$$\phi = \int G(\sigma / \lambda) d v, \quad (3)$$

で与えられる。(3)式で G はグリーン関数であり，また，フィールド源 σ が電荷密度のような Divergent Field Source であれば， ϕ はスカラーポテンシャルとなり，フィールド E は

$E = -\nabla \phi$ で与えられ，フィールド源 σ が電流密度のような Rotational Field Source であれば， ϕ はベクトルポテンシャルとなり，フィールド H は， $H = \nabla \times \phi$ で与えられる。いま， E や H のフィールドを一般的に F と書き，このフィールドが n 個の点で測定されたとする。さらに，フィールド源を含む体積 V の空間が m 個の微小体積 $v_i (i=1 \sim m)$ に分割され，各微小体積の中で σ と λ が一定値 σ_i, λ_i を取るとする。 ∇G 又は $\nabla \times G n_r$ (n_r は単位方向ベクトル) 演算を G' と書くとするれば，(3)式より

$$U = \sum_{i=1}^m \alpha_i d_i, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} U &= [F_1, F_2, \dots, F_n]^T, \\ d_i &= [G_{i1}', G_{i2}', \dots, G_{in}']^T, \\ \alpha_i &= (\sigma_i / \lambda_i) v_i, \quad i=1 \sim m, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

の関係が得られる。(3)式も微小体積 v_i 中で σ_i と λ_i が一定値を取るとすれば，(4)式と同様な形に離散化できる。但し，(5)式中の既知ベクトル U と距離ベクトル d_i はそれぞれ次式のように変形される。

$$\left. \begin{aligned} U &= [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T, \\ d_i &= [G_{i1}, G_{i2}, \dots, G_{in}]^T. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

静電界系では、 σ_i と λ_i がそれぞれ電荷密度と誘電率に対応し、未知数 α_i (=電荷/誘電率)は電圧双極子[v-m]となる。

静電流系では、 σ_i と λ_i がそれぞれ湧き出し電流密度の発散と導電率に対応し、未知数 α_i (=電流/導電率)は静電界系と同様に電圧双極子[v-m]となる。これは電圧又は電界の測定だけでは静電界系か静電流系かの区別はできないことを意味する。静磁界系では、測定される既知ベクトルが磁界Hとしたとき、 σ_i と λ_i がそれぞれ電流密度と単位値"1"となるため未知数 α_i (=電流密度×体積)電流双極子[A-m]となる。静磁界系の利点は媒質のパラメータ λ が無関係になる点にある。(4)式で、解ベクトルSと行列Dを

$$S = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T, \quad (7)$$

$$D = [d_1, d_2, \dots, d_m], \quad (8)$$

と定義すれば、(4)式は

$$U = DS, \quad (9)$$

とかける。いま、既知ベクトルUの要素数nと解ベクトルSの要素数mが等しいとすればDは正方行列となる。即ち、体積Vの分割個数mと同じ測定点数nを得たとき、行列Dが正則行列である限りDの逆行列が存在し、解ベクトルSが求め

られることとなる。しかし、残念なことに行列 D は一般に Vandermonde 型の行列となり、分割個数 n, m の増加と共に D の行列式の値は零に近くなり、分割個数を無限大にしたとき D は完全な特異行列となる。これは、強形式の逆問題が従来の解析的方法では解けない問題であることを意味する。分割個数 n, m を有限個として、数値的に近似解を得る場合も特別な計算技法を駆使しなければならない[3]。現実の測定では、フィールドはある面上に沿って測定されるのに対し、電磁界源は立体空間中に存在するために、既知ベクトル U の要素数 n は解ベクトル S の要素数 m に比較して圧倒的に少なく、

$$m \gg n, \quad (10)$$

が成立する。(10)式の条件を前提に厳密な解を期待することは到底不可能であるため、多くの場合、解ベクトル S の要素を大部分零とし、最も支配的な電圧又は電流双極子を数個求める方法として

$$e = |U - U'|^2, \quad (11)$$

等を最小化する最小自乗法的方法が使われるのが通例である[4, 5]。ここで、 U' は仮定した双極子が測定点に与えるフィールドが構成するベクトルである。この方法では、特別な

拘束条件を付加しない限り，一意的に決められる双極子の数は一個である。他の方法は，解ベクトル S を厳密に求めるのではなく解の分布を評価する方法が考えられる[6,7]。この方法では，個々の双極子は求められないが複数の局在する双極子の分布が求められる利点がある。(4)式を変形して

$$U = \sum_{i=1}^m \{ \beta_i d_i + \sum_{j \neq i}^m \{ \beta_{ij} (d_i + d_j) + \sum_{k \neq i, k \neq j}^m \{ \beta_{ijk} (d_i + d_j + d_k) + \dots \} \} \}, \quad (12)$$

を得る。(12)式の各係数は形式的には

$$\left. \begin{aligned} \beta_i &= U^T d_i / (|U| |d_i|), \quad i=1 \sim m, \\ \beta_{ij} &= U^T (d_i + d_j) / (|U| |d_i + d_j|), \\ j &\neq i, \quad j = 1 \sim m, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

として求められる。実用的には，(12)式の右辺第1グループの係数は(13)式と同様にして

$$\beta_i = U^T d_i / (|U| |d_i|), \quad i=1 \sim m, \quad (14)$$

と求め，第1グループの係数で β_h が最大値を取るとすれば， d_h をパイロットパターンとして，次式により

$$\beta_{hj} = U^T (d_h + d_j) / (|U| |d_h + d_j|), \quad j \neq h, \quad j = 1 \sim m, \quad (15)$$

第2グループの係数を求める。以下，同様なプロセスで係

数を第 n グループまで求めるか係数が最大値を取るグループまで打ち切り，グループ全体の加算平均を正規化された双極子分布とする。以上の双極子分布を求める方法は因子分析法を一般化した方法で，単純な因子分析法と異なり後述のように各グループが確固たる物理的意味を持つ方法であり，Sampled Pattern Matching (SPM) 法と呼ばれる [6.7]。

d) 物理的意味 (1)式で支配される系で，強形式の逆問題に対して導かれたシステム方程式(4)の物理的意味を考察する。考察事項は，A) 電圧・電流双極子，B) (9)式の係数行列 D の特異性，さらに C) SPM法である。

A) 双極子：通常の電磁気学のテキストで記述されている双極子は $\pm q [c]$ の電荷が微小距離離れて存在する場合に定義される電気双極子である。静磁界系の逆問題から導かれる電流双極子は電気双極子の時間微分に対応する。また，静電界系の逆問題から導かれる電圧双極子は，電荷 $[c]$ を媒質のパラメータである誘電率 $[F/m]$ で割り算して得られるが，これは電気双極子をキャパシタンスで割り算した結果と解釈できる。さらに静電流系の逆問題で導かれる電圧双極子は湧き出し電流 $[A]$ を媒質のパラメータである導電率 $[s/m]$ で割り算して得られるが，この電流双極子は電気双極子を時間微分して得ら

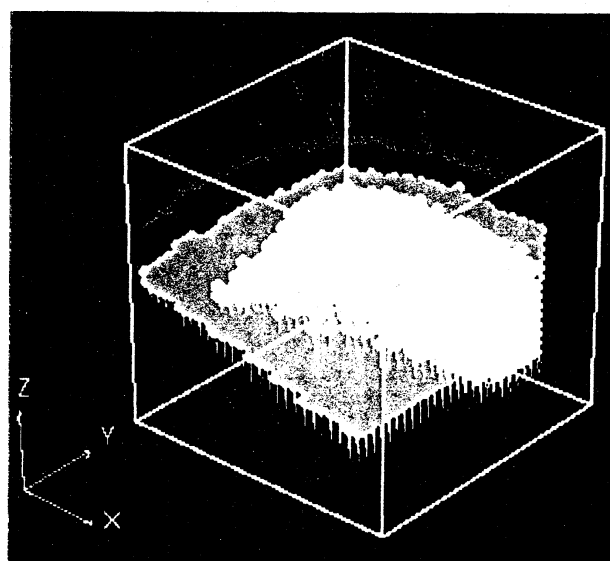
れる電流双極子に抵抗を掛け算した結果と解釈できる。従って、基本となる双極子は最もポピュラーな電気双極子である。

B) 行列 D の特異性：通常、正方行列を構成する列行列又は行行列において、ある任意の行または列が他の行又は列の定数倍に等しいとき、行列式の値は零になり特異行列となる。逆問題で導かれる行列 D は、それを構成する列行列がフィールド源を含む領域の分割個数の増加に伴って隣接する列間で等しくなるため、分割個数 $m = n$ が多くなる程特異行列に近づく。これは、同じ方向の電流又は電圧双極子の距離が近づく程、測定点に同じパターンのフィールド又はポテンシャル分布を与えるためである。

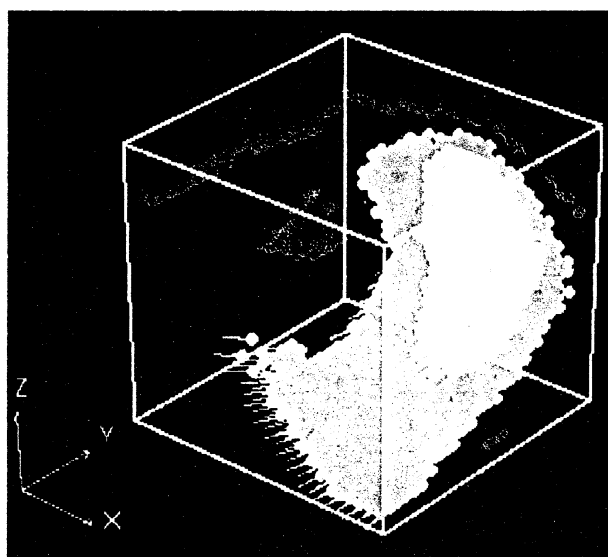
C) SPM法：SPM法又は一般化因子分析法では、(4)式のシステム方程式を(12)式のように多くのパターンを持つ形に変形しているが、これは、(12)式の第1グループは単一双極子の測定点へ与えるパターンを意味し、第2グループは二個の双極子の測定点へ与えるパターンを意味する。換言すれば、第1グループの双極子は常に測定点へ正と負の2極の分布のみを与えるグループであり、第2グループの双極子は常に測定点へ正と負の4極の分布のみを与えるグループである。同様に高次のグループ程多くの正・負対の極分布を与えることを意味する。

3. 例題とむすび

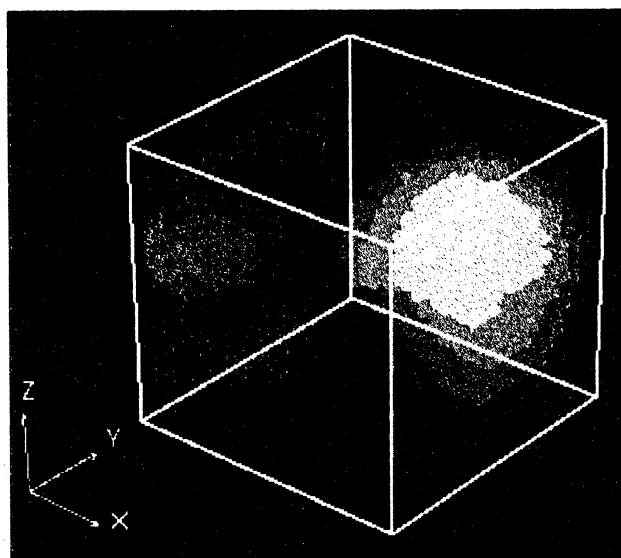
SPM法で心電図から求めた心臓内電圧双極子分布を図1(a)に示す。さらに，SPM法で心磁図から求めた心臓内電流双極子分布を図1(b)に示す。尚，心電図と心磁図の実測データは文献[8]より読み取らせて頂いた。電圧双極子は三次元的方向を持つためにそれらの分布が明瞭でない。しかし，電流双極子は測定面に平行な方向の成分のみであるため，それらの分布は電圧双極子分布よりも明瞭となる。図1(c)は図1(a)の電圧双極子分布と図1(b)の電流双極子分布間で内積をとることによって得られた心臓内電力分布である。明らかに，電力分布は最も明瞭な分布を与える。



(a) 電圧双極子分布。



(b) 電流双極子分布。



(c) 電力分布。

図 1 . SPM法による心臓内電圧、電流及び電力分布。

以上の結果から，生体系の電磁界源分布推定は電圧測定より得られる電圧双極子分布と磁界測定より得られる電流双極

子分布を併用して得られる電力分布で評価する電力分布法が最も信頼性の高い確実な結果を与えることが判る。

4. 参考文献

- [1] G. Anger, Inverse Problems in Differential Equations, (Plenum Press, 1990, New York and London).
- [2] 岩井 他 編著、医用画像診断装置-CT, MRIを中心として- (コロナ社、1988年12月20日)。
- [3] 板垣英美, 法政大学大学院修士論文, 1991年3月。
- [4] 内川 他, 日本応用磁気学会誌, 13, 508-512 (1989).
- [5] T. Katila, International Journal of Applied Electromagnetics in Materials, Vol.1 (1990), pp.179-187.
- [6] 橘田 他、日本生体磁気学会誌 特別号、Vol.5, No.1, June (1992), pp.100-103.
- [7] 早乙女 他、電気学会論文誌 A, 第112巻 4号 (1992) pp.279-286.
- [8] Y. Nakaya et al., Journal of Electrocardiology, Vol.21, No.2, (1988) pp.174-182.